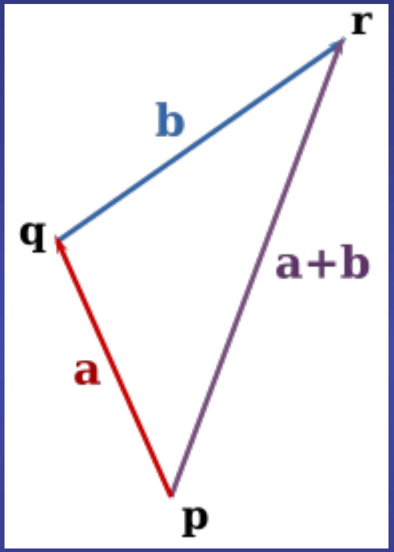
Vectores



Javier Junquera

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Cómo describir la posición de un punto en el espacio: Sistemas de coordenadas

Un sistema de coordenadas que permita especificar posiciones consta de:

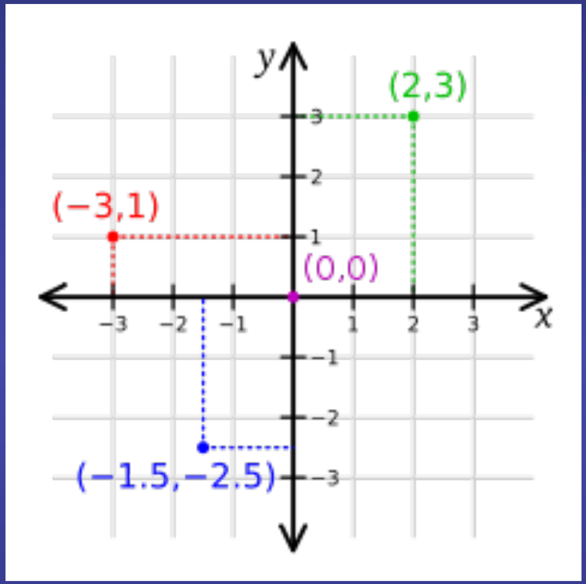
Un punto de referencia fijo, O, denominado origen

Un conjunto de direcciones o ejes especificados, con una escala y unas etiquetas apropiadas sobre sus ejes

Instrucciones que indican como etiquetar un punto en el espacio con respecto del origen y de los ejes.

Sistema de coordenadas cartesiano (u ortogonal)

Ejemplo en dos dimensiones:



Un punto arbitrario se define mediante las coordenadas (x,y)

x **positivas hacia la derecha**

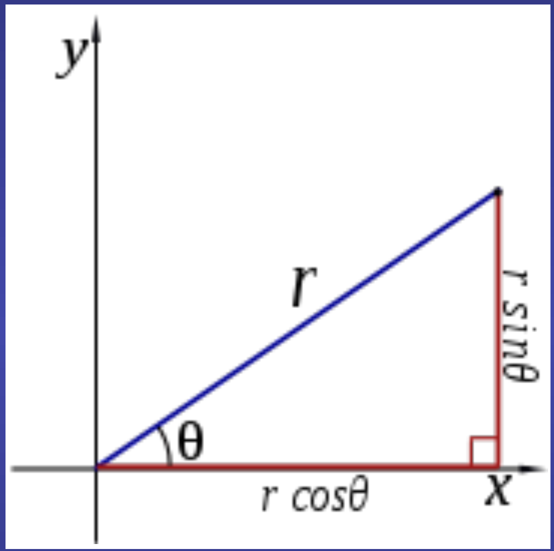
x **negativas hacia la izquierda**

y **positivas hacia arriba**

y **negativas hacia abajo**

Sistema de coordenadas polar

Ejemplo en dos dimensiones:



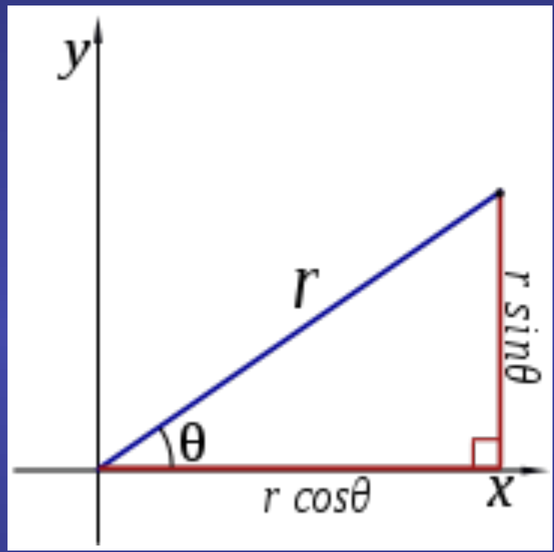
Un punto arbitrario se define mediante las coordenadas polares planas $(r,\ \theta)$

r **es la longitud de la línea que une el origen con el punto**

θ **es el ángulo entre dicha línea y un eje fijo (normalmente el** x**)**

Relación entre sistema de coordenas cartesianas y sistema de coordenadas polar

Ejemplo en dos dimensiones:



asumiendo que θ está medida en sentido contrario de las agujas del reloj con respecto al eje x positivo

De polares a cartesianas

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

De cartesianas a polares,

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dos tipos de magnitudes físicas importantes: escalares y vectoriales

Magnitud escalar:

aquella que queda completamente especificada mediante un número, con la unidad apropiada

- Número de patatas en un saco
- Temperatura en un determinado punto del espacio
- Volumen de un objeto
- Masa y densidad de un objeto
- …

Magnitud vectorial:

aquella que debe ser especificada mediante su módulo, dirección y sentido

- Posición de una partícula
- Desplazamiento de un partícula (definido como la variación de la posición)
- Fuerza aplicada sobre un objeto
- …

Representación tipográfica de un vector

Convenciones para representar una magnitud vectorial en un texto

Letras en negrita: $\mathbf{a}$

Flecha encima del símbolo: $\vec{a}$

Convenciones para representar el módulo de una magnitud vectorial en un texto

Letras en formato normal: a

Dos barras rodeando a la magnitud vectorial: $|\vec{a}|$

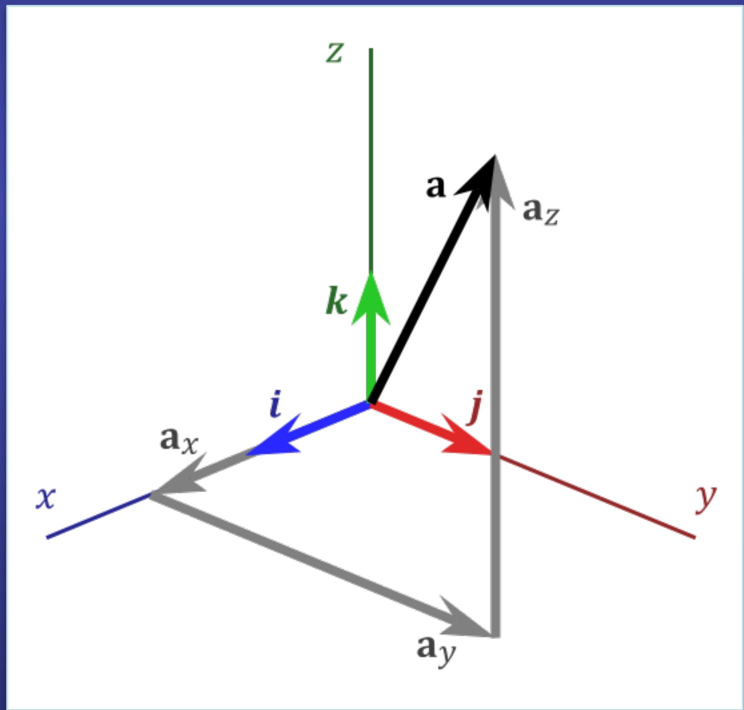
El módulo de un vector siempre es positivo, y especifica las unidades de la magnitud que el vector representa

(Cuántos metros me he desplazado)

Base cartesiana para la representación de vectores en 3D.

En Física a un vector de módulo uno se le denomina versor

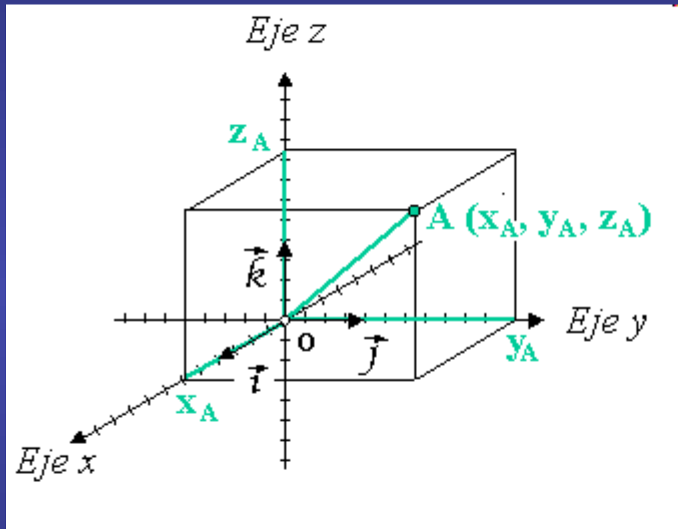
Base ortonormal en el espacio 3D:
Tres vectores de módulo unidad que, además son perpendiculares entre sí.



La base formada por los vectores $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ se le denomina base canónica.
Es la más utilizada usualmente, pero no la única

Componentes cartesianas de un vector

Proyecciones de un vector sobre los ejes de un sistema de coordenadas cartesiano



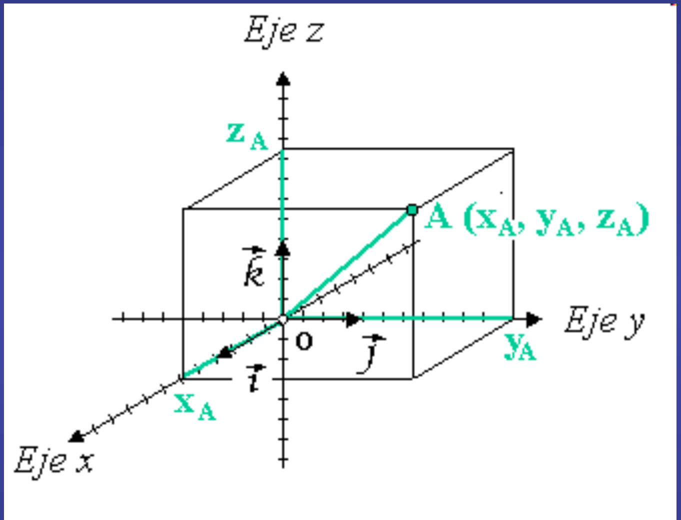
Sistema de Coordenadas Cartesianas Espaciales

$$\vec{A} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}$$

(x_A, y_A, z_A) **: componentes cartesianas de un vector**

Cosenos directores

En una base ortonormal, se llaman cosenos directores del vector $\vec{A}$ a los cosenos de los ángulos que forma el vector $\vec{A}$ con los vectores de la base



Sistema de Coordenadas Cartesianas Espaciales

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$x = |\vec{A}|\cos\alpha \qquad y = |\vec{A}|\cos\beta \qquad z = |\vec{A}|\cos\gamma$$

Álgebra vectorial
Adición de dos vectores

Vector — **Componentes en un sistema de coordenadas particular**

$$\vec{a} \longrightarrow (a_x, a_y, a_z)$$

$$\vec{b} \longrightarrow (b_x, b_y, b_z)$$

La suma de dos vectores es otro vector

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Cuyas componentes en un sistema de coordenadas particular vienen dadas por la suma de las componentes de los dos vectores en el mismo sistema de coordenadas

$$\vec{c} \longrightarrow (c_x, c_y, c_z)$$

$$c_x = a_x + b_x \qquad c_y = a_y + b_y \qquad c_z = a_z + b_z$$

Álgebra vectorial
Adición de dos vectores

Propiedades de la adición de dos vectores

Propiedad conmutativa

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Propiedad asociativa

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

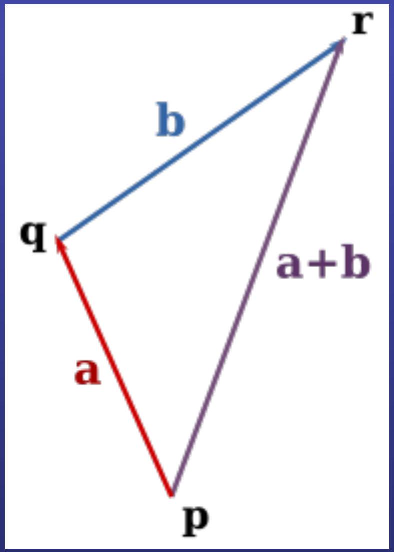
Las dos se siguen inmediatamente a partir de sus componentes

Podemos sumar los vectores en cualquier orden

Significado geométrico de la suma de vectores

Supongamos que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ pueden representarse como segmentos en el papel,
¿Qué sería $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$?

Se disponen gráficamente un vector a continuación del otro, es decir, el origen de $\vec{b}$ coincide con el extremo de $\vec{a}$



El vector suma tiene como origen en el origen de $\vec{a}$ y como extremo el extremo de $\vec{b}$

Los vectores se pueden sumar de esta forma sin hacer referencia a los ejes de coordenadas

Álgebra vectorial
Multiplicación de un vector por un escalar

Vector

Componentes en un sistema de coordenadas particular

$$\vec{a} \longrightarrow (a_x, a_y, a_z)$$

El resultado de multiplicar un vector por un escalar es otro vector

$$\vec{c} = \alpha \vec{a}$$

Cuyas componentes en un sistema de coordenadas particular vienen dadas por el producto de las componentes por el escalar

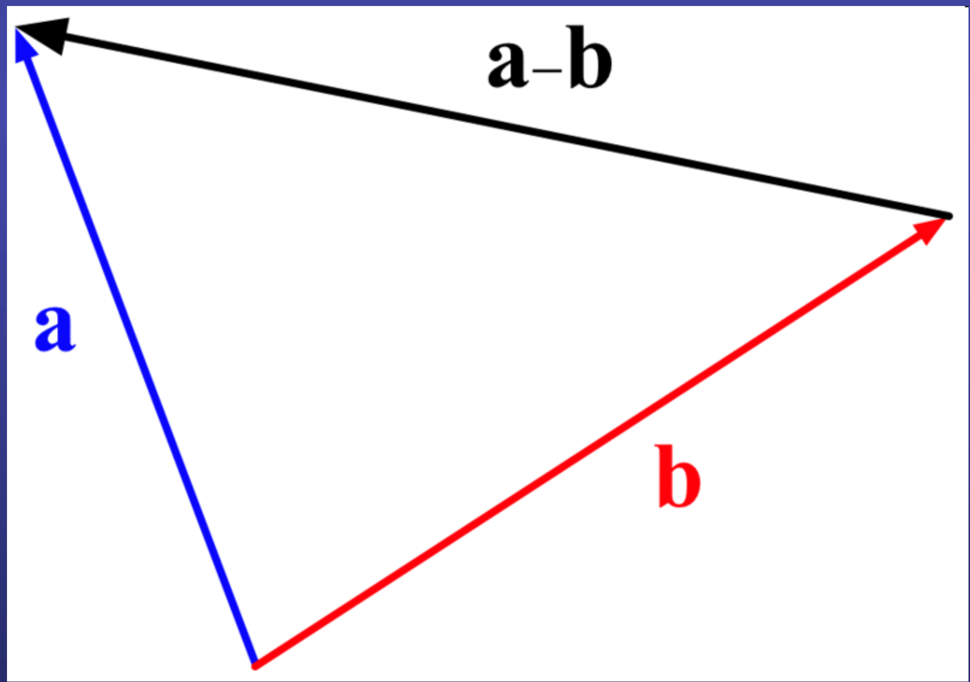
$$\vec{c} \longrightarrow (c_x, c_y, c_z)$$

$$c_x = \alpha a_x \qquad c_y = \alpha a_y \qquad c_z = \alpha a_z$$

Álgebra vectorial
Sustracción de vectores

Se define de la misma manera que la adición, pero en vez de sumar se restan las componentes

Gráficamente: dibujamos el vector desde $\vec{b}$ hasta $\vec{a}$ para obtener $\vec{a} - \vec{b}$



Álgebra vectorial
Multiplicación de vectores

Los vectores se pueden multiplicar de varias maneras diferentes

Producto escalar:	el resultado es un escalar
Producto vectorial:	el resultado es un vector
Producto mixto:	el resultado es un escalar

Álgebra vectorial
Producto escalar de vectores

Dados dos vectores cualesquiera $\vec{a}$ y $\vec{b}$ definimos el producto escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

El producto escalar de dos vectores se representa poniendo un punto, • ,entre los dos vectores

El resultado de esta operación es un escalar, es decir una cantidad que no tiene dirección. La respuesta es la misma en todo conjunto de ejes

Al producto escalar también se le conoce como producto interno, escalar o punto

Álgebra vectorial
Propiedades del producto escalar de vectores

Propiedad conmutativa

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Propiedad asociativa

$$\alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b})$$

Propiedad distributiva

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

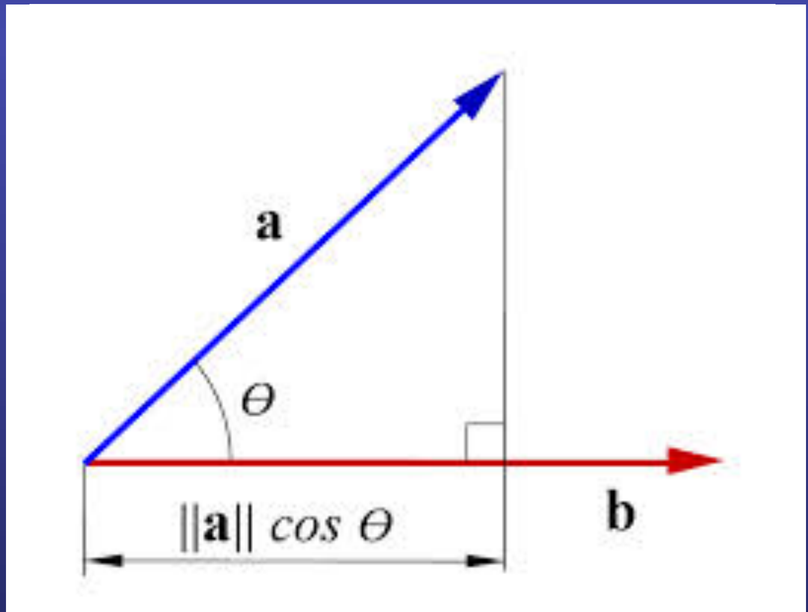
Producto escalar de los vectores de la base ortonormal canónica

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \qquad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

Álgebra vectorial
Definición geométrica del producto escalar

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ **es el producto del módulo de** $\vec{a}$ **por el módulo de** $\vec{b}$ **por el coseno del ángulo que forman**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$$



θ **es el menor de los ángulos que forman los vectores**

Significado geométrico del producto escalar.
La proyección de un vector sobre la dirección del otro.

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ **es el producto del módulo de** $\vec{a}$ **por el módulo de** $\vec{b}$ **por el coseno del ángulo que forman**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$$

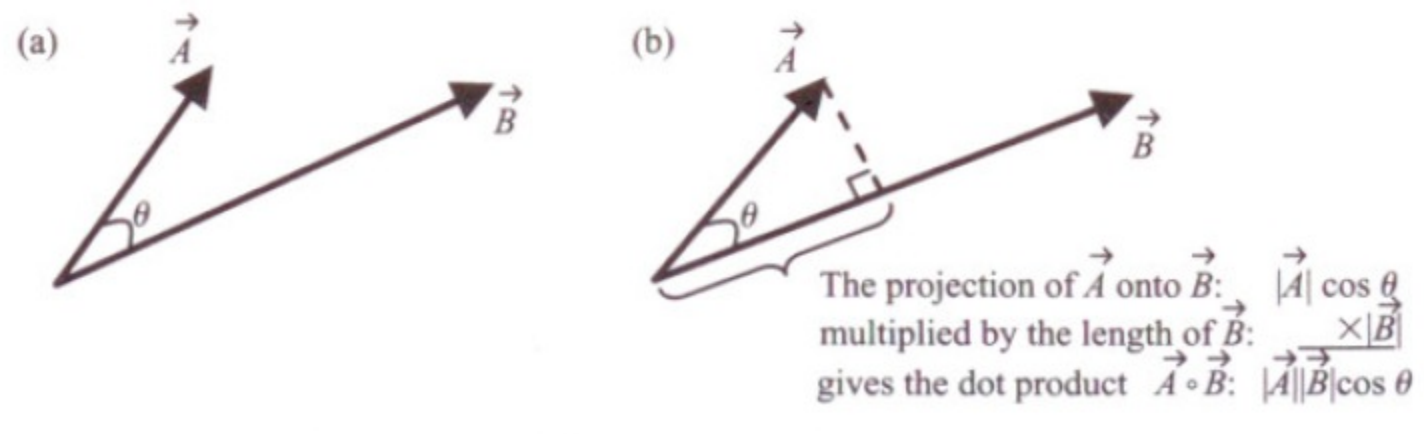


Figure 1.2 The meaning of the dot product.

θ **es el menor de los ángulos que forman los vectores**

Utilización del producto escalar para saber si dos vectores son ortogonales entre sí

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ **es el producto del módulo de** $\vec{a}$ **por el módulo de** $\vec{b}$ **por el coseno del ángulo que forman**

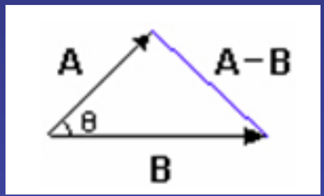
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$$

Si el producto escalar de dos vectores es cero, y el módulo de los dos vectores es distinto de cero, entonces los dos vectores son perpendiculares entre sí.

$$\text{Si } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ y } |\vec{a}| \neq 0 \text{ y } |\vec{b}| \neq 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Equivalencia entre las dos definiciones de producto escalar

Sean dos vectores como los de la figura.
Si tomamos el origen de coordenadas en el origen de los vectores, podemos calcular la distancia al cuadrado entre sus extremos como



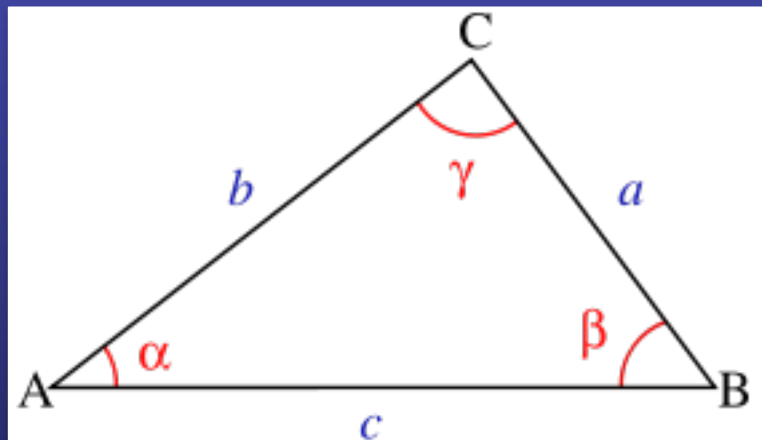
$$d^2 = (A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2$$

La misma distancia puede obtenerse de manera geométrica a partir del teorema del coseno

Teorema del coseno

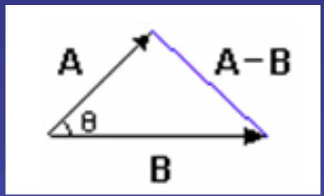
Dado un triángulo ABC, siendo α, β, γ, los ángulos, y *a*, *b*, *c*, los lados respectivamente opuestos a estos ángulos entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



Equivalencia entre las dos definiciones de producto escalar

Sean dos vectores como los de la figura.
Si tomamos el origen de coordenadas en el origen de los vectores, podemos calcular la distancia al cuadrado entre sus extremos como



$$d^2 = (A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2$$

La misma distancia puede obtenerse de manera geométrica a partir del teorema del coseno (particularizando la anterior expresión a nuestro caso concreto)

$$d^2 = |\vec{A} - \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

Igualando las dos ecuaciones y operando

$$(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 + B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 - 2(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$$|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

Como hallar el módulo de un vector. Vectores unitarios

Aplicando la definición de producto escalar, podemos calcular fácilmente el módulo de un vector

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a \cdot a \cdot \cos 0 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Se denomina vector unitario a aquel vector que tiene por módulo la unidad.
Podemos calcular un vector unitario en la dirección del vector $\vec{a}$ **sin más que dividir por su módulo**

$$\vec{u}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{\vec{a}}{\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}}$$

Magnitudes físicas en las que interviene el producto escalar de dos vectores

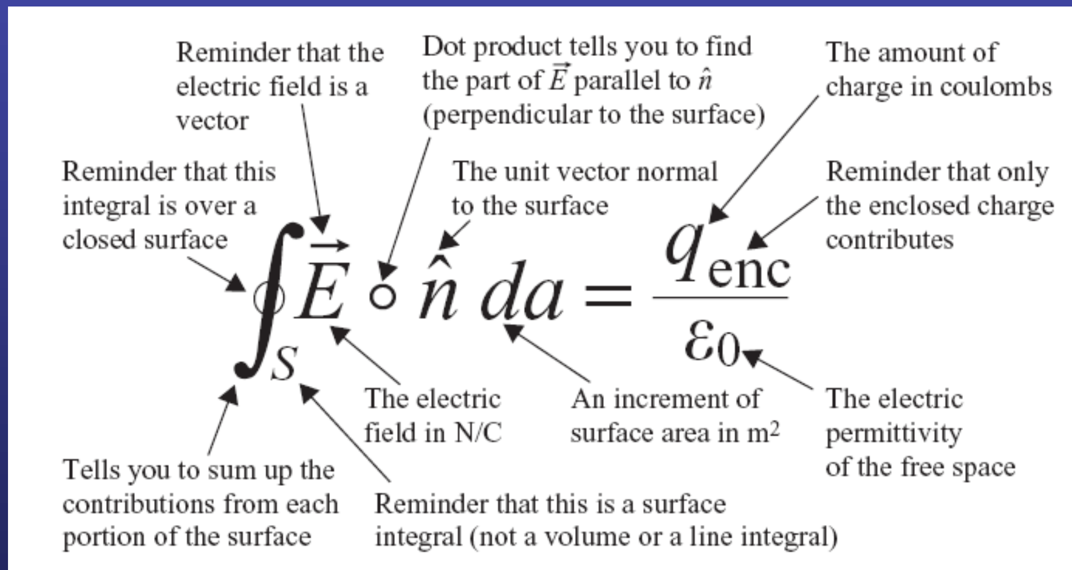
Trabajo

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Flujo de un campo vectorial

$$\int_S \vec{A} \cdot \vec{n} \; da$$

Ley de Gauss para campos eléctricos



A student's guide to Maxwell's equations
Daniel Fleisch
Cambridge University Press
(New York, 2008)

Álgebra vectorial
Producto vectorial de vectores

Dados dos vectores cualesquiera $\vec{a}$ y $\vec{b}$ definimos el producto vectorial como un nuevo vector $\vec{c}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Cuyas componentes vienen dadas por

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y \qquad c_y = a_z b_x - a_x b_z \qquad c_z = a_x b_y - a_y b_x$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Álgebra vectorial
Producto vectorial de vectores

Dados dos vectores cualesquiera $\vec{a}$ y $\vec{b}$ definimos el producto vectorial como un nuevo vector $\vec{c}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Cuyas componentes vienen dadas por

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y \qquad c_y = a_z b_x - a_x b_z \qquad c_z = a_x b_y - a_y b_x$$

El producto vectorial de dos vectores se representa poniendo una cruz, $\times$, o un ángulo, $\wedge$, entre los vectores

El resultado de esta operación es un vector, es decir una cantidad que sí tiene dirección.

Al producto vectorial también se le conoce como producto externo, o producto cruz

Módulo del vector producto vectorial

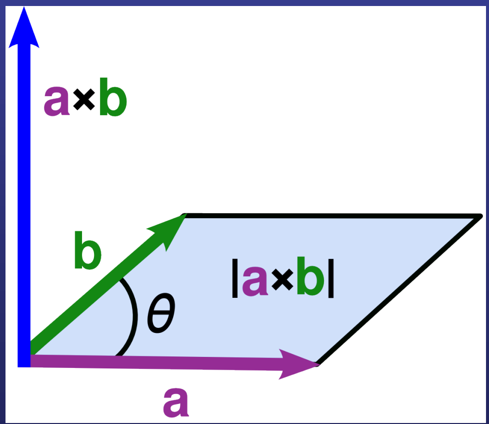
Dados dos vectores cualesquiera $\vec{a}$ y $\vec{b}$ definimos el producto vectorial como un nuevo vector $\vec{c}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Módulo del vector producto vectorial

El módulo de $\vec{c}$ es el producto del módulo de $\vec{a}$ por el módulo de $\vec{b}$ por el seno del ángulo que forman

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$$



El módulo del vector producto vectorial coincide con el área del paralelogramo definido por los dos vectores

Dirección del vector producto vectorial

Dados dos vectores cualesquiera $\vec{a}$ y $\vec{b}$ definimos el producto vectorial como un nuevo vector $\vec{c}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Dirección del vector producto vectorial

Dirección del vector producto vectorial: perpendicular a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

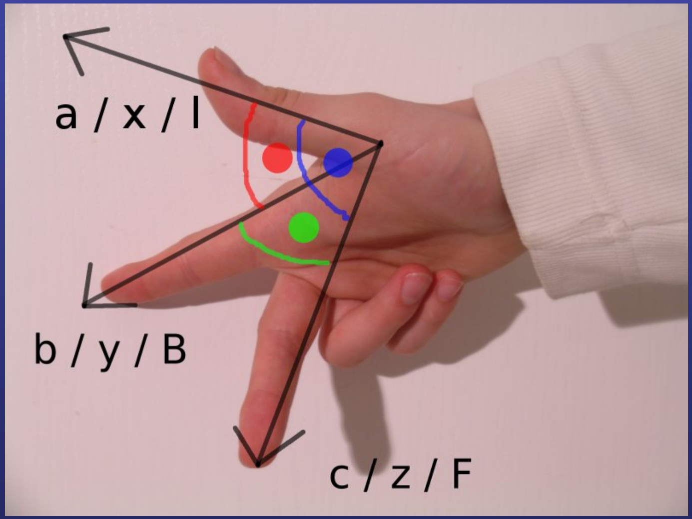
$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

Sentido del vector producto vectorial

El sentido de $\vec{c}$ viene determinado por la regla de la mano derecha

Con los tres dedos consecutivos de la mano derecha, empezando con el pulgar, índice y, finalmente, el dedo medio, los cuáles se posicionan apuntando a tres diferentes direcciones perpendiculares. Se inicia con la palma hacia arriba, y el pulgar determina la primera dirección vectorial, el índice la segunda y el corazón nos indicará la dirección del tercero.



Equivalencia en las definiciones del módulo del vector producto vectorial

Si tomamos como definición de producto vectorial de dos vectores

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left(|\vec{A}| \; |\vec{B}| \; \sin\theta \right) \hat{n}$$

donde $\hat{n}$ es el vector unitario y ortogonal a los dos vectores y su dirección está dada por la regla de la mano derecha, y θ es el ángulo entre los dos vectores

Entonces podemos deducir la equivalencia entre las dos maneras de calcular el módulo del vector producto vectorial

Comenzamos expandiendo los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en función de sus componentes

$$\begin{aligned}
|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin(\theta) &= |[A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}] \times [B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}]| \\
&= |A_xB_x(\hat{\imath} \times \hat{\imath}) + A_xB_y(\hat{\imath} \times \hat{\jmath}) + A_xB_z(\hat{\imath} \times \hat{k}) \\
&+ A_yB_x(\hat{\jmath} \times \hat{\imath}) + A_yB_y(\hat{\jmath} \times \hat{\jmath}) + A_yB_z(\hat{\jmath} \times \hat{k}) \\
&+ A_zB_x(\hat{k} \times \hat{\imath}) + A_zB_y(\hat{k} \times \hat{\jmath}) + A_zB_z(\hat{k} \times \hat{k})|.
\end{aligned}$$

Operando

$$\begin{aligned}
|\vec{A}||\vec{B}|\sin(\theta) = |A_xB_x(0) &+ A_xB_y(\hat{k}) + A_xB_z(-\hat{\jmath}) \\
&+ A_yB_x(-\hat{k}) + A_yB_y(0) + A_yB_z(\hat{\imath}) \\
&+ A_zB_x(\hat{\jmath}) + A_zB_y(-\hat{\imath}) + A_zB_z(0)|
\end{aligned}$$

$$|\vec{A}||\vec{B}|\sin(\theta) = |[(A_yB_z - A_zB_y)\hat{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}]|.$$

A student's guide to Vectors and Tensors Daniel Fleisch Cambridge University Press (New York, 2008)

Álgebra vectorial
Propiedades del producto vectorial de vectores

Propiedad anticonmutativa $$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\Downarrow$$

Si $\vec{a} = \vec{b}$ $$\vec{a} \times \vec{a} = 0$$

Propiedad distributiva con respecto a la suma

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Producto de un escalar con respecto a un producto vectorial

$$m\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(m\vec{b}\right)$$

Productos vectoriales entre los vectores de la base canónica

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

Álgebra vectorial
Propiedades del producto vectorial de vectores

Utilización del producto vectorial para saber si dos vectores son paralelos

$$\text{Si } \vec{a} \times \vec{b} = 0 \text{ y } |\vec{a}| \neq 0 \text{ y } |\vec{b}| \neq 0 \;\; \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

Magnitudes físicas que se pueden definir como el producto vectorial de dos vectores

Momento angular $$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Fuerza de Lorentz $$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Productos triples:
Triple producto escalar

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$$

El resultado es un vector.

Precaución:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}\neq\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$$

Ejemplo:

$$\left(\vec{i}\cdot\vec{j}\right)\vec{j}\neq\vec{i}\left(\vec{j}\cdot\vec{j}\right)$$

Productos triples:
Triple producto vectorial

Se define como el producto vectorial de un vector por el producto vectorial de otros dos
El resultado es un vector.

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c} \right)$$

El triple producto escalar cumple la fórmula de Lagrange

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) = \vec{b} \left(\vec{a} \cdot \vec{c} \right) - \vec{c} \left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right)$$

Precaución

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) \neq \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \times \vec{c} \qquad \text{ejemplo} \qquad \vec{i} \times \left(\vec{j} \times \vec{j} \right) \neq \left(\vec{i} \times \vec{j} \right) \times \vec{j}$$

Productos triples:
Producto mixto de vectores

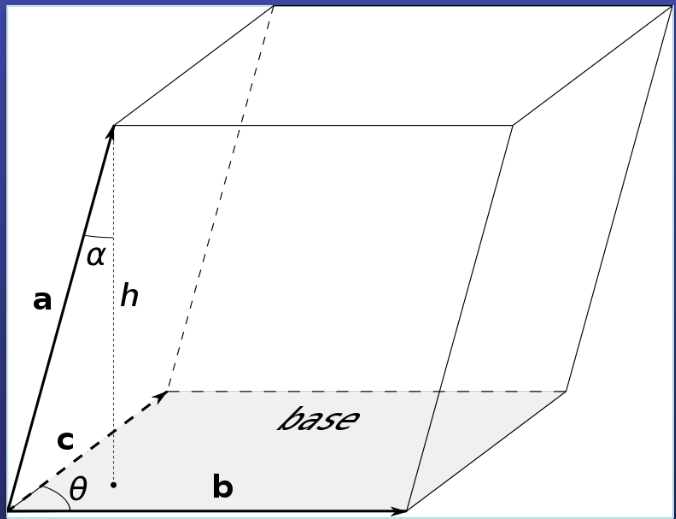
Se define como el producto escalar de un vector por el producto vectorial de otros dos
El resultado es un escalar

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$$

Si los tres vectores vienen dados en coordenadas cartesianas se calcula

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Propiedad geométrica: el volumen del paralelepípedo definido por estos tres vectores es igual al valor absoluto de su producto mixto



$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

Reglas de la multiplicación usando productos escalares y vectoriales

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

Derivada de un vector

Sea $\vec{A}$ **una función vectorial que depende de un escalar** t

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j} + A_z(t)\vec{k}$$

Ejemplo:

$\vec{A}$ **puede ser la posición de un objeto**

t **puede ser el tiempo**

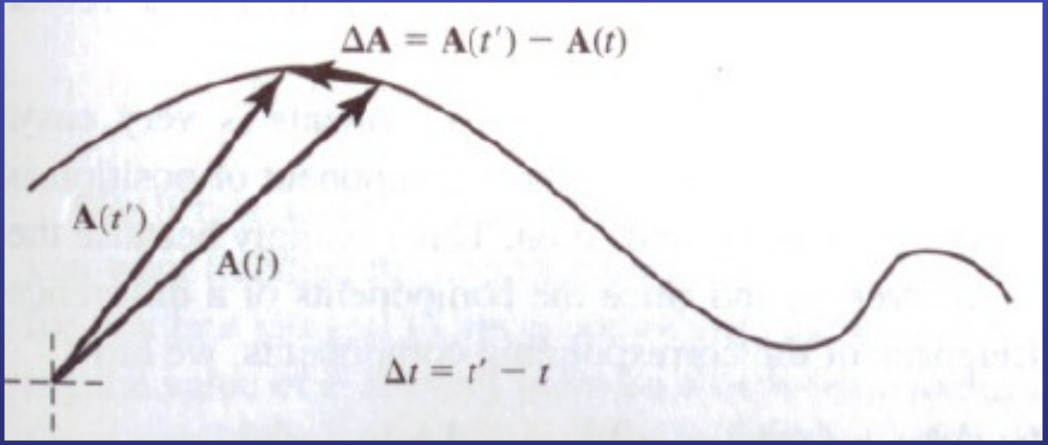
Instante	**Posición**
t	$\vec{A}(t)$
t'	$\vec{A}(t')$

Objetivo: calcular la razón de cambio de $\vec{A}(t)$ **como función de t**

Derivada de un vector

En el intervalo de tiempo $\Delta t = t' - t$

El objeto se ha movido desde $\vec{A}(t)$ hasta $\vec{A}(t')$ ⇒ desplazamiento $\Delta\vec{A} = \vec{A}(t') - \vec{A}(t)$



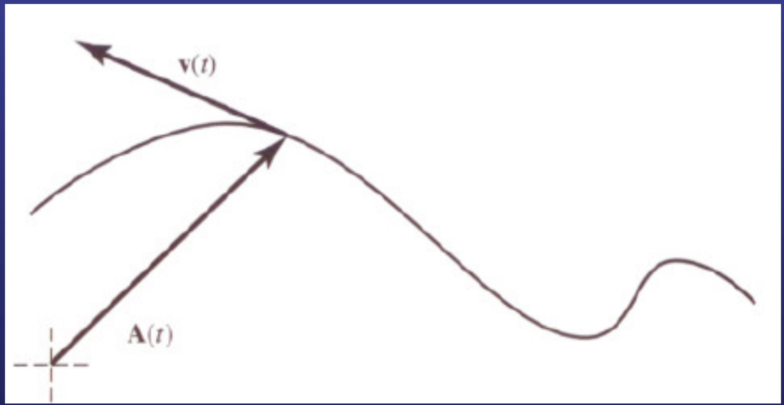
Derivada de un vector

Cuanto más pequeño sea $\Delta(t)$, más parecidos serán $\vec{A}(t)$ y $\vec{A}(t')$

más pequeño será el desplazamiento $\Delta\vec{A}$

Definición de derivada: divide $\Delta\vec{A}$ entre $\Delta(t)$ y tomar el límite cuando $\Delta t \longrightarrow 0$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}$$



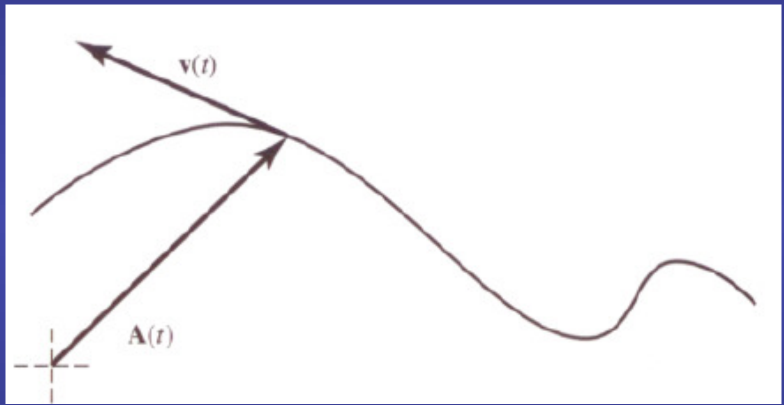
Si $\vec{A}(t)$ es la posición, su derivada es la velocidad:

Dirección: tangente a la trayectoria

Magnitud: depende de lo rápido que recorra la trayectoria

Derivada de un vector

Tened cuidado al dibujar posición y velocidad en la misma gráfica:



Los dos vectores no se pueden sumar

Cuidado con las escalas

Derivada de un vector: componentes de la derivada de un vector

La derivada puede contemplarse como una diferencia de vectores.

Las componentes de una diferencia de vectores es igual a la diferencia de las componentes

$$\left(\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}\right)_x = \frac{\Delta A_x}{\Delta t} \qquad \left(\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}\right)_y = \frac{\Delta A_y}{\Delta t} \qquad \left(\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}\right)_z = \frac{\Delta A_z}{\Delta t}$$

Tomando límites

$$v_x = \frac{dA_x}{dt} \qquad v_y = \frac{dA_y}{dt} \qquad v_z = \frac{dA_z}{dt}$$

Si la dirección a lo largo de la cuál se calcula la componente se mantiene fija con el tiempo

ntegral de un vector que depende de una variable escalar

$$\int \vec{F}(t)dt = \left[\int F_x(t)dt\right]\vec{i} + \left[\int F_y(t)dt\right]\vec{j} + \left[\int F_z(t)dt\right]\vec{k}$$

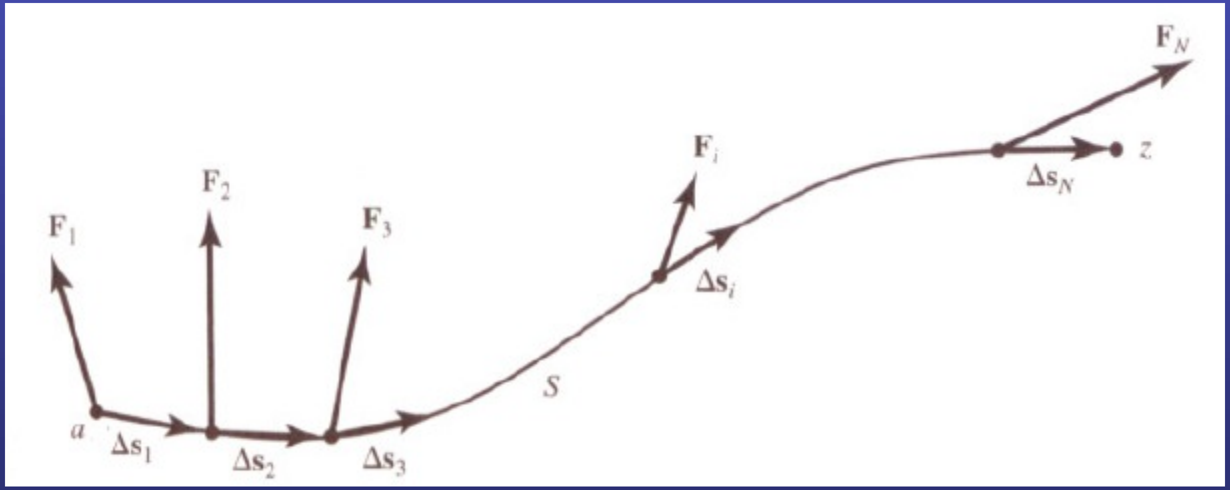
El resultado es un vector

ntegral de un vector:
a integral de línea

Sea un campo vectorial $\vec{F}$,

queremos calcular la integral a lo largo de una curva S desde un punto a hasta un punto z

$$\int_a^z \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

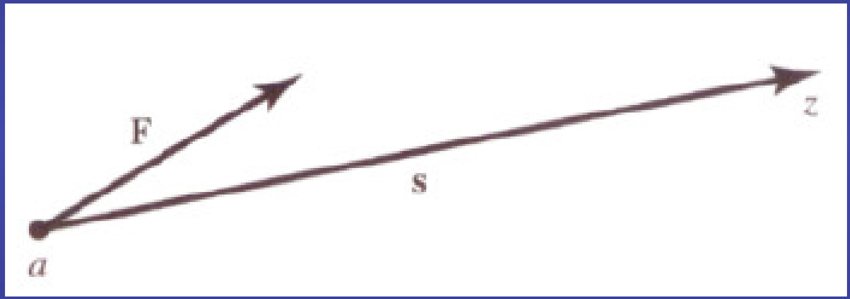


Como punto de partida, necesito conocer lo que vale el campo $\vec{F}$ a lo largo de la curva S entre a y z

ntegral de un vector:
a integral de línea

Caso sencillo: **el campo vectorial es constante**

el camino en el que hay que integrar es una línea recta



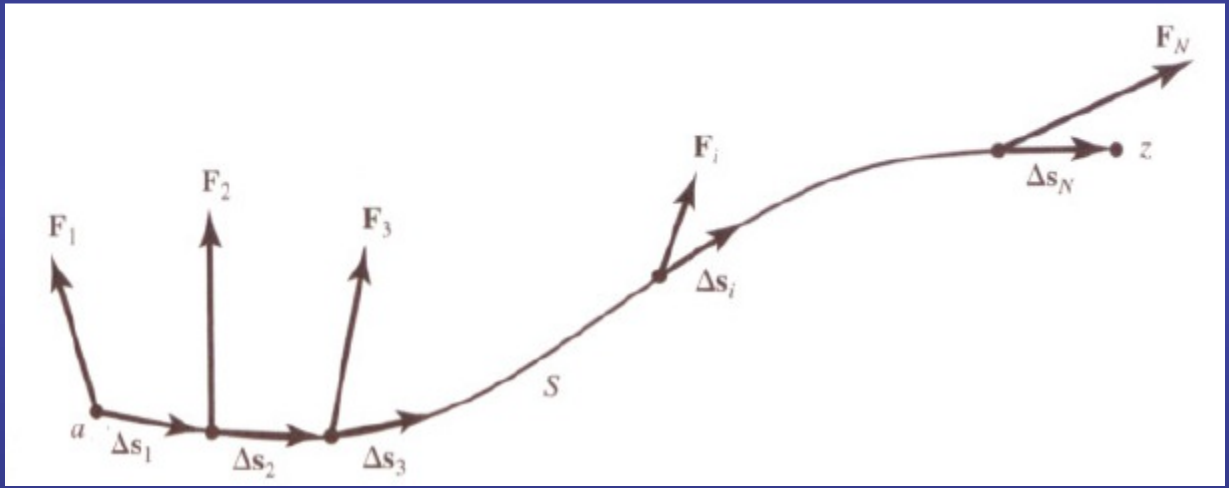
$$\int_a^z \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \int_a^z d\vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Resultado: la distancia a lo largo de la línea multiplicada por la componente de la fuerza en esa dirección

ntegral de un vector:
a integral de línea

Caso general

descomponer la integral diviendo la trayectoria S entre a y z pequeños fragmentos



descomponer la integral diviendo la trayectoria S entre a y z pequeños fragmentos

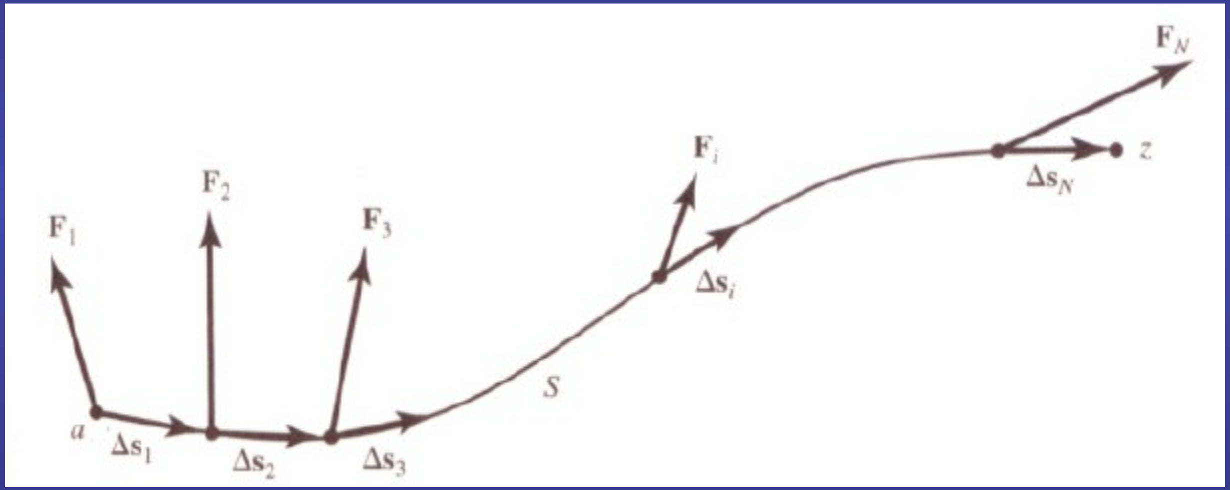
La integral a lo largo de S es la suma de las integrales a lo largo de cada uno de los fragmentos

En cada uno de los pequeños fragmentos, la fuerza puede considerarse como constante

ntegral de un vector:
a integral de línea

Caso general

descomponer la integral diviendo la trayectoria S entre a y z pequeños fragmentos



$$\int_a^z \vec{F} \cdot d\vec{s} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i$$

El resultado es un escalar

ntegral de superficie de un campo vectorial: el flujo

Sea $\vec{F}$ una función vectorial que depende de la posición

Sea $\hat{n}$ un vector unitario perpendicular a una superficie.
Por convenio, el vector normal unitario de una superficie cerrada se toma apuntando hacia fuera, en la dirección opuesta del volumen encerrado por la superficie

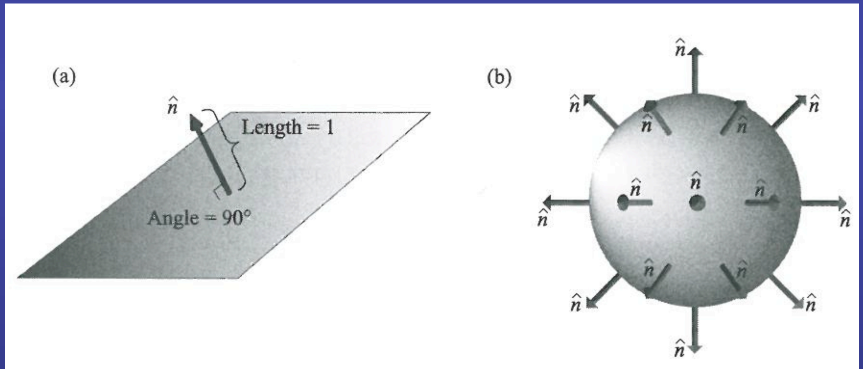


Figure 1.3 Unit normal vectors for planar and spherical surfaces.

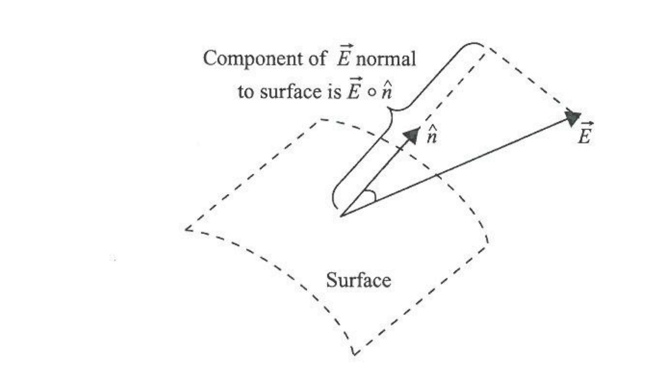


Figure 1.4 Projection of $\vec{E}$ onto direction of $\hat{n}$.

Se define la integral de flujo como

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{a} = \int \vec{F} \cdot \hat{n} \; da$$

El resultado es un escalar

A student's guide to Maxwell's equations
Daniel Fleisch
Cambridge University Press
(New York, 2008)

Campos vectoriales y escalares: Definición

En una región del espacio tenemos un campo vectorial (respectivamente escalar), cuando tenemos definida una magnitud vectorial (respectivamente escalar) para cada punto de esa región como función de la posición $\vec{r}$

Ejemplo de campo escalar: la presión atmosférica sobre la tierra

Para cada punto geográfico (identificado mediante una longitud, una latitud y una altura) tenemos definido un valor de la presión (expresada en Pascales)

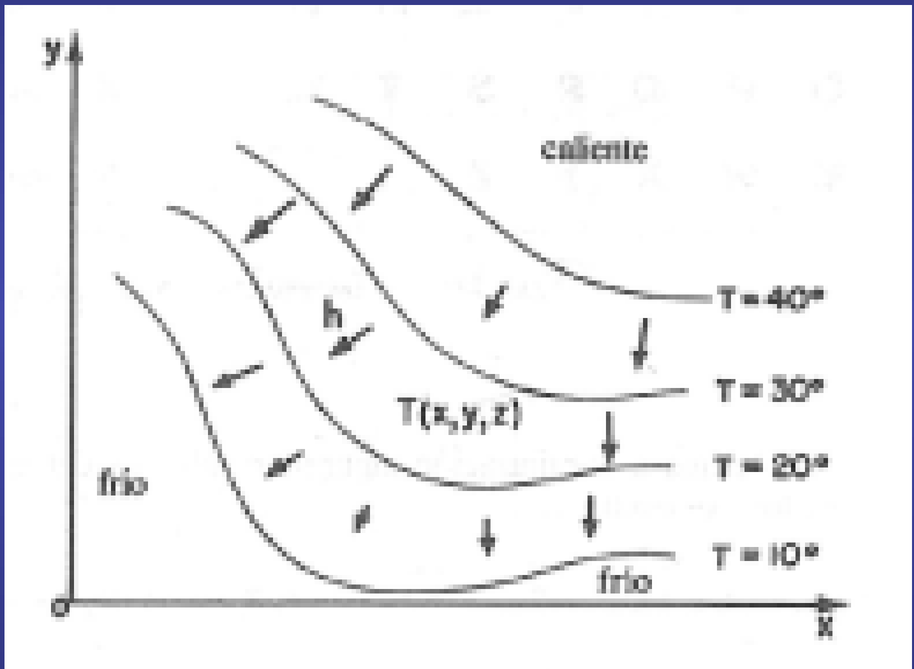
Ejemplo de campo vectorial: la velocidad del viento en cada punto de la tierra

Para cada punto geográfico (identificado mediante una longitud, una latitud y una altura) tenemos definido un valor de la velocidad. Dicha velocidad se expresa no solo con su valor, sino con la *dirección* en la que sopla el viento.

http://www.ciencia.net/VerArticulo/matematicas/Campos-Vectoriales?idArticulo=7

Campos escalares: Ejemplo físico

La temperatura, T, es un campo escalar



A cada punto (x,y,z) del espacio se le asocia un número $T(x,y,z)$.

Todos los puntos de la superficie marcada por $T = 20°$ (representada por una curva para $z = 0$) están a la misma temperatura

Física, Volumen II-Electromagnetismo y Materia,

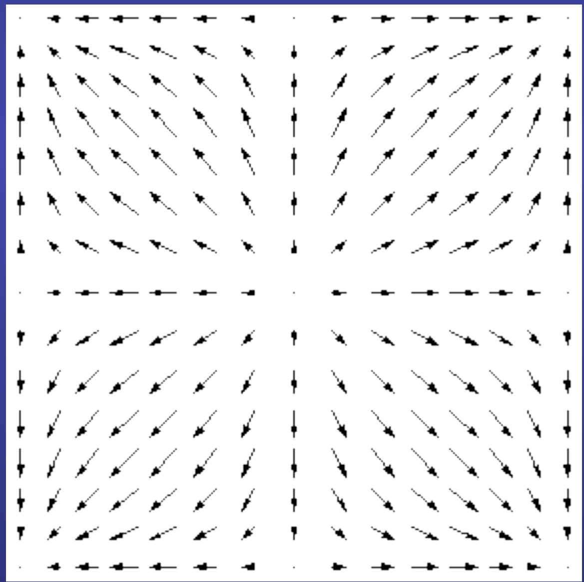
Feynman

Pearson Education, Addison Wesley Longman, Méjico, 1998

Campos vectoriales en dos dimensiones: Ejemplo

A cada punto del espacio se le asocia un vector plano y se suele escribir $\vec{E}(x,y)$ **o** $\vec{E}(\vec{r})$

$$\vec{E}(x,y) = \sin(x)\vec{i} + \sin(y)\vec{j}$$



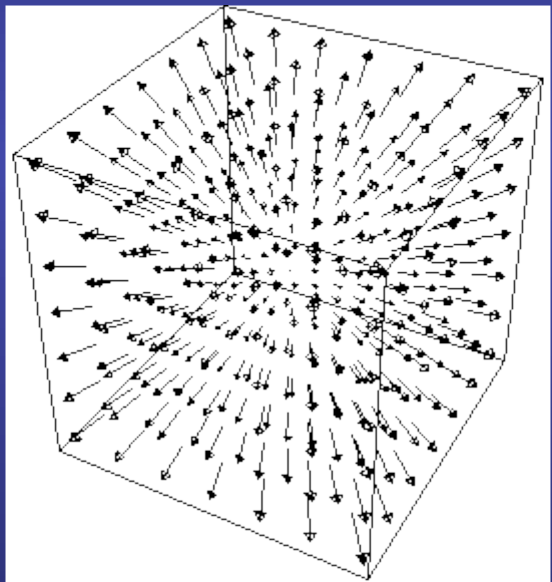
A cada punto x,y**, asocio un vector cuya componente** x **mide** $sin(x)$ **y la componente** y**,** $sin(y)$

http://www.ciencia.net/VerArticulo/matematicas/Campos-Vectoriales?idArticulo=7

Campos vectoriales en tres dimensiones: Ejemplo

A cada punto del espacio se le asocia un vector 3D y se suele escribir $\vec{E}(x,y,z)$ **o** $\vec{E}(\vec{r})$

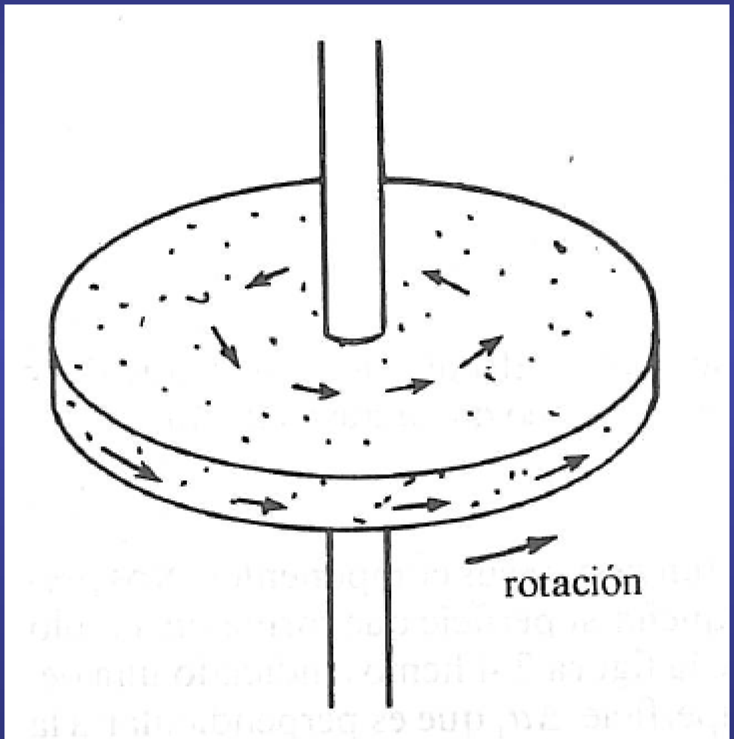
$$\vec{E}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



http://www.ciencia.net/VerArticulo/matematicas/Campos-Vectoriales?idArticulo=7

Campos vectoriales en tres dimensiones: Ejemplo físico

La velocidad de los átomos en un cuerpo en rotación



Física, Volumen II-Electromagnetismo y Materia,

Feynman

Pearson Education, Addison Wesley Longman, Méjico, 1998

Derivadas espaciales de los campos

Cuando los cambios cambian con el tiempo, es muy fácil describir la variación

$$\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} \qquad \text{describe variación temporal campo escalar T}$$

Ahora queremos describir de una manera similar variaciones con respecto a la posición.

Por ejemplo, ¿Cuál es la relación entre la temperatura en un punto dado y la temperatura en otro punto suficientemente cercano?.

En este caso, ¿Cómo deberíamos de tomar la derivada con respecto a la posición?.

¿Derivamos con respecto a x, y o z?

$$\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x} \qquad \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y} \qquad \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z}$$

Las leyes físicas no deben depender de la orientación del sistema de coordenadas

Las leyes deben físicas deben escribirse de una forma en la cual los dos lados de la ecuación sean un escalar o sean un vector.

$$\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x}$$ **es un escalar o es un vector?**

Ni lo uno ni lo otro.

Si rotamos el sistema de coordenadas y tomamos un eje x diferente, el valor de la derivada será diferente.

El operador nabla $\vec{\nabla}$

El símbolo $\vec{\nabla}$ representa un **operador vectorial diferencial.**
Recibe el nombre de "nabla" o "delta"

Nos indica que vamos a tomar derivadas en las tres direcciones espaciales sobre la magnitud en la cuál está actuando

En coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla} \equiv \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Por si mismo, no significa nada. Necesita una magnitud sobre la que actuar.
"hungry for something to differentiate"

Combinando el operador nabla $\vec{\nabla}$ con campos escalares
El gradiente

Supongamos que tenemos dos puntos P_1 y P_2 separados por una pequeña distancia $\Delta\vec{R}$

Punto	Temperatura
P_1	T_1
P_2	T_2

Diferencia de temperaturas entre los dos puntos físicos reales

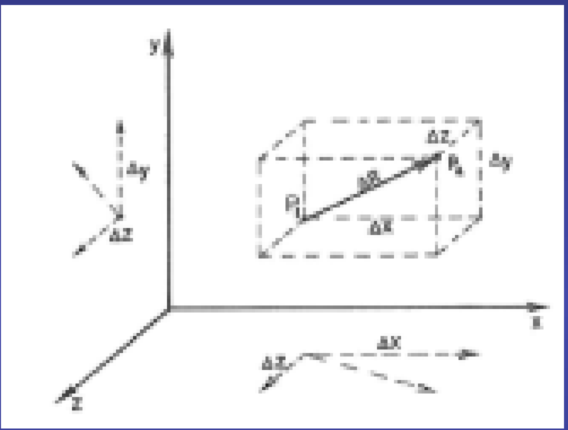
$$\Delta T = T_2 - T_1$$

No depende del sistema de coordenadas escogido para medir las coordenadas de los puntos

La diferencia de temperaturas es un escalar

Combinando el operador nabla $\vec{\nabla}$ con campos escalares
El gradiente

Si ahora escogemos un sistema de referencia adecuado a nuestro problema



Punto	**Temperatura**
P_1	$T_1 = T(x, y, z)$
P_2	$T_2 = T(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$

Componentes de Δ

Diferencia de temperaturas entre los dos puntos físicos reales

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial T}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial T}{\partial z}\Delta z$$

Parte izquierda de la ecuación es un escalar

Parte derecha de la ecuación: producto de tres derivadas parciales por componenentes de vector

Combinando el operador nabla $\vec{\nabla}$ con campos escalares
El gradiente

Definición de gradiente de un campo escalar

$$grad\ T = \vec{\nabla} T = \vec{i}\ \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j}\ \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k}\ \frac{\partial T}{\partial z}$$

El gradiente transforma un campo escalar en un campo vectorial.

En cada punto el vector gradiente apunta en la dirección de máxima variación

Diferencia de temperaturas entre los dos puntos físicos reales

$$\Delta T = \vec{\nabla} T \cdot \Delta \vec{R}$$

La diferencia de temperaturas entre dos puntos cercanos es el producto escalar del gradiente de la temperatura multiplicado por el vector desplazamiento entre los dos puntos.

Combinando el operador nabla $\vec{\nabla}$ con escalares. El gradiente en varias coordenadas

En coordenadas cilíndricas

$$\vec{\nabla}\psi \equiv \hat{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \hat{\phi}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \hat{z}\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

En coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla}\psi \equiv \hat{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}$$

Derivada direccional

Se define la derivada direccional de un campo escalar T a lo largo de una determinada dirección, determinada por un vector unitario $\hat{n}$, como la razón de cambio del campo escalar cuando nos movemos a lo largo de esa dirección

$$D_{\hat{n}}T = \vec{\nabla}T \cdot \hat{n}$$

Combinando el operador nabla $\vec{\nabla}$ con vectores
La divergencia

Podemos calcular el producto escalar del operador $\vec{\nabla}$ con un campo vectorial $\vec{a}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

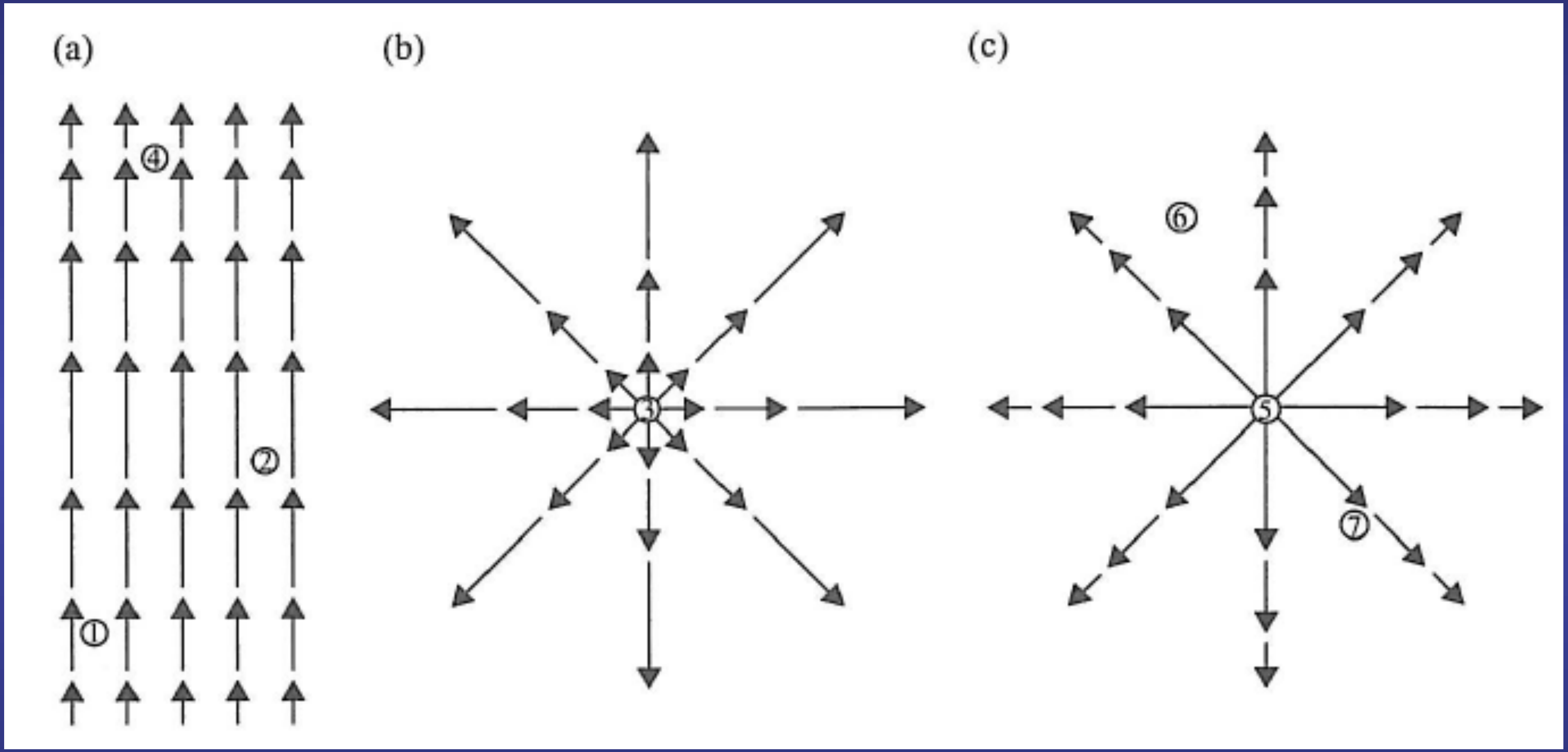
El resultado es un campo escalar

(la suma es invariante ante una transformación de coordenadas)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \mathrm{div}\ \vec{a} = \mathrm{divergencia\ de}\ \vec{a}$$

La divergencia transforma un campo vectorial en un campo escalar

Ejemplos de campos vectoriales con distintos valores de la divergencia



Puntos 1, 2, 3 y 5 son puntos con divergencia positiva.

Punto 4 es un punto con diverencia negativa.

En la Figura (c), la divergencia es nula en todos los puntos, excepto en el origen (5)

Combinando el operador nabla $\vec{\nabla}$ con vectores. La divergencia en varias coordenadas

En coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

En coordenadas cilíndricas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r A_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

En coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_\theta \sin\theta\right) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

Combinando el operador nabla $\vec{\nabla}$ con vectores
El rotacional

Podemos calcular el producto vectorial del operador $\vec{\nabla}$ con un campo vectorial $\vec{a}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \text{curl } \vec{a} = \text{rot } \vec{a} = \text{rotacional de } \vec{a}$$

El resultado es un campo vectorial, cuyas componentes se pueden escribir siguiendo las reglas usuales de los productos vectoriales

En coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(\vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z \right)$$

Combinando el operador nabla $\vec{\nabla}$ con vectores
El rotacional

Podemos calcular el producto vectorial del operador $\vec{\nabla}$ con un campo vectorial $\vec{a}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \mathrm{curl}\ \vec{a} = \mathrm{rot}\ \vec{a} = \mathrm{rotacional\ de}\ \vec{a}$$

El resultado es un campo vectorial, cuyas componentes se pueden escribir siguiendo las reglas usuales de los productos vectoriales

El producto vectorial se puede escribir en forma de determinante

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Combinando el operador nabla $\vec{\nabla}$ con vectores
El rotacional

Podemos calcular el producto vectorial del operador $\vec{\nabla}$ con un campo vectorial $\vec{a}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \text{curl} \;\; \vec{a} = \text{rot} \;\; \vec{a} = \text{rotacional} \;\; \text{de} \;\; \vec{a}$$

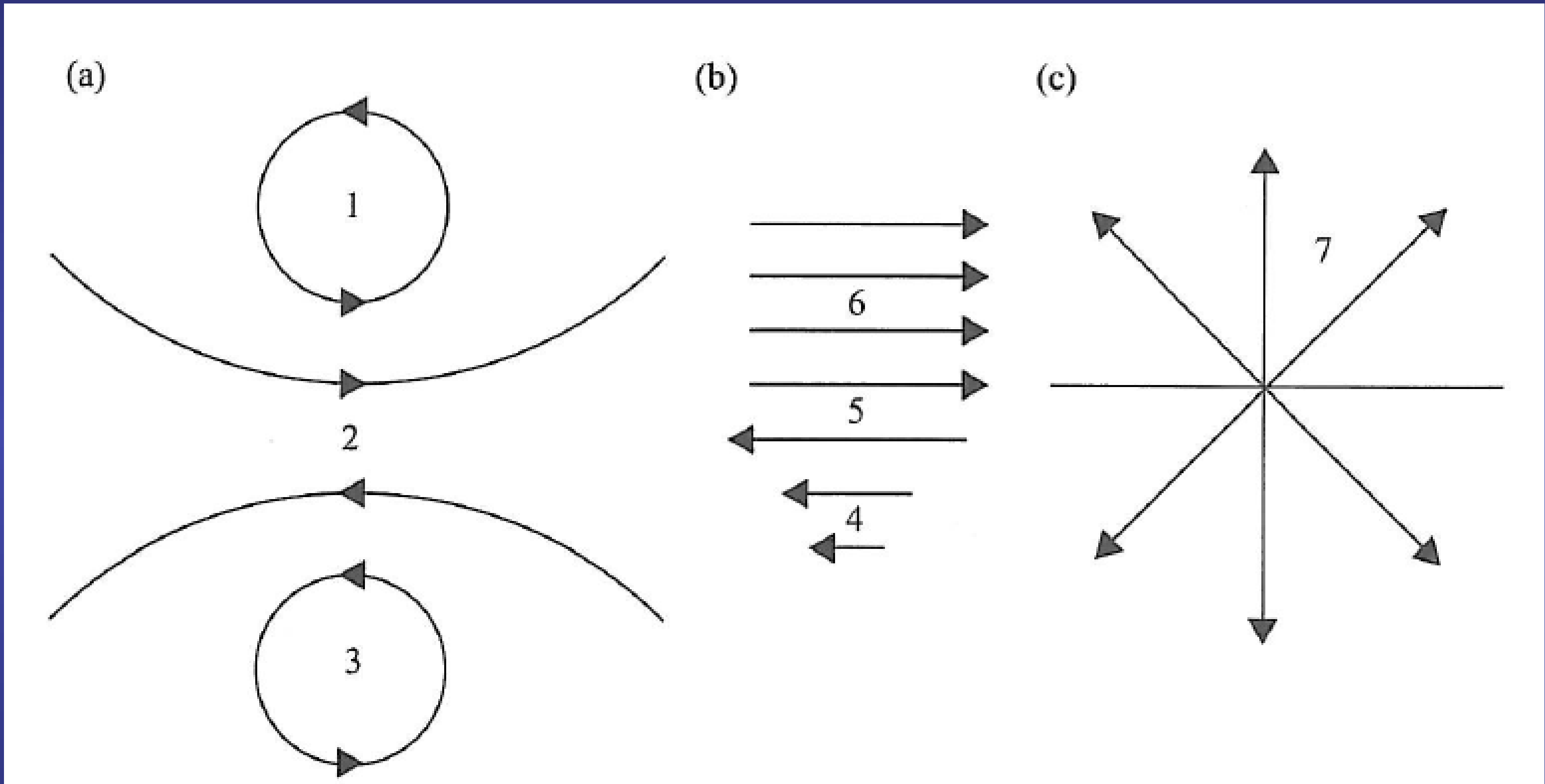
El resultado es un campo vectorial, cuyas componentes se pueden escribir siguiendo las reglas usuales de los productos vectoriales

Las componentes del vector rotacional vienen dadas por

$$(\vec{\nabla} \times \vec{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \qquad (\vec{\nabla} \times \vec{a})_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \qquad (\vec{\nabla} \times \vec{a})_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$$

El rotacional transforma un campo vectorial en un campo vectorial

Ejemplos de campos vectoriales con distintos valores del rotacional.



Puntos 1, 2, 3 (panel a) y 4, 5 (panel b) son puntos con rotacional grande.

Punto 6 (punto de flujo uniforme en el panel b), y el punto 7 (flujo divergente en el panel c) son puntos de bajo o nulo rotacional.

Significado físico del rotacional.

El rotacional de un campo vectorial mide la tendencia del campo a rotar en torno a un determinado punto.

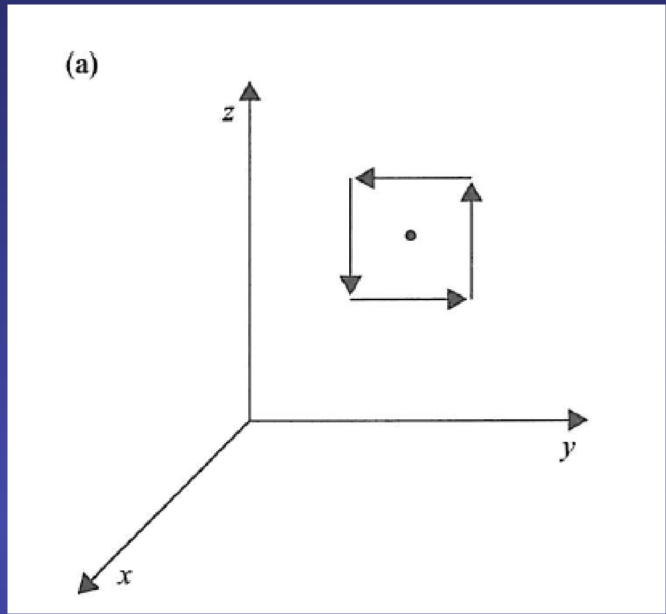
Para encontrar las posiciones con un valor alto del rotacional:

- Imaginar que las líneas de campo representan las líneas de flujo de un fluído.

- Buscar puntos en los cuales los vectores de flujo en un lado del punto son significativamente diferentes (en magnitud, dirección o en ambos) a los vectores de fujo en el lado opuesto del punto.

- Para ayudar en este experimento mental, imaginemos que somos capaces de colocar un diminuto molino de viento en cada punto del flujo. Si el flujo hace que el molinillo de viento rote, entonces el centro del mismo marca una posición de rotacional no nulo. La dirección del rotacional estará dirigida siguiendo el eje del molinillo. Por convenio, el sentido positivo del rotacional viene determinado por la regla de la mano derecha: si uno enrosca los dedos de la mano derecha siguiendo la rotación del flujo en ese punto, el pulgar señala en la dirección positiva del rotacional.

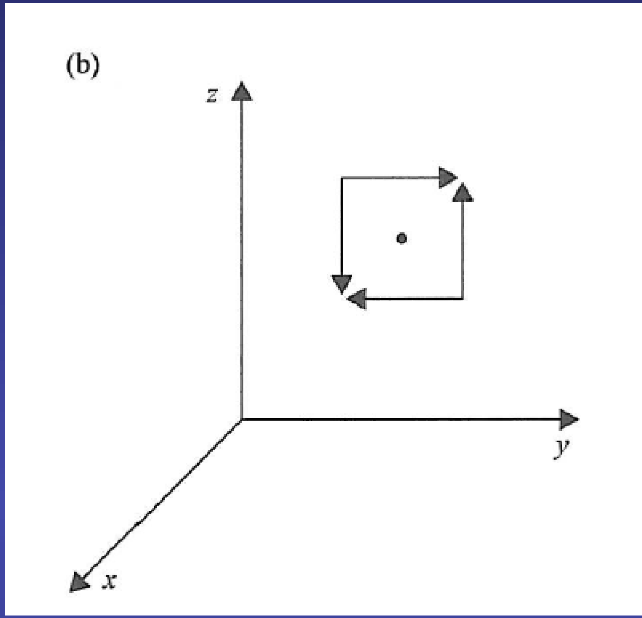
El rotacional mide la rotación de un campo vectorial



Vamos a fijarnos en la componente x del rotacional de los campos vectoriales en las figuras

$$(\vec{\nabla} \times \vec{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}$$

El rotacional mide la rotación de un campo vectorial



Vamos a fijarnos en la componente x del rotacional de los campos vectoriales en las figuras

$$(\vec{\nabla} \times \vec{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}$$

Combinando el operador nabla $\vec{\nabla}$ con vectores. El rotacional en varias coordenadas

En coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(\vec{i} a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z \right)$$

En coordenadas cilíndricas

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} \equiv \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \hat{\varphi} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right) \hat{z}$$

En coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} \equiv \frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial \left(a_\phi \sin\theta \right)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{\partial \left(r a_\phi \right)}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \left(r a_\theta \right)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \hat{\varphi}$$

Resumen de las tres clases de combinaciones con el operador nabla $\vec{\nabla}$

Actuando sobre un campo escalar

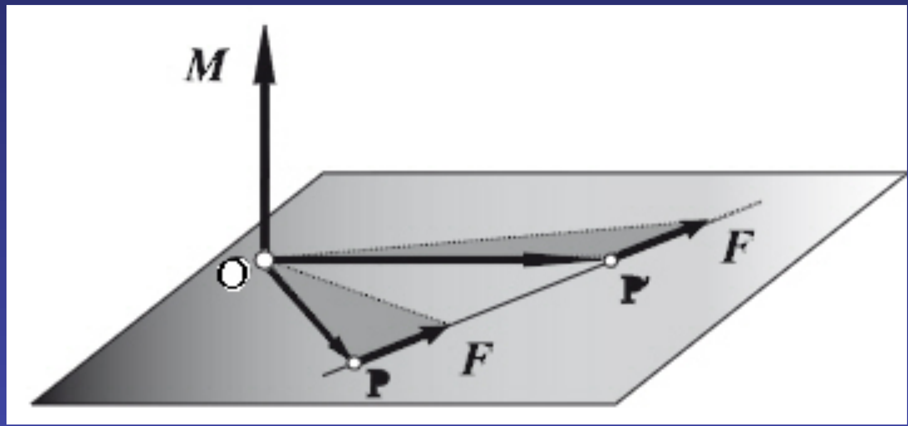
$$\vec{\nabla} T = \mathrm{grad}\ \ T = \mathrm{un\ \ vector}$$

Actuando sobre un campo vectorial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \mathrm{div}\ \ \vec{a} = \mathrm{un\ \ escalar}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \mathrm{rot}\ \ \vec{a} = \mathrm{un\ \ vector}$$

Momento de un vector



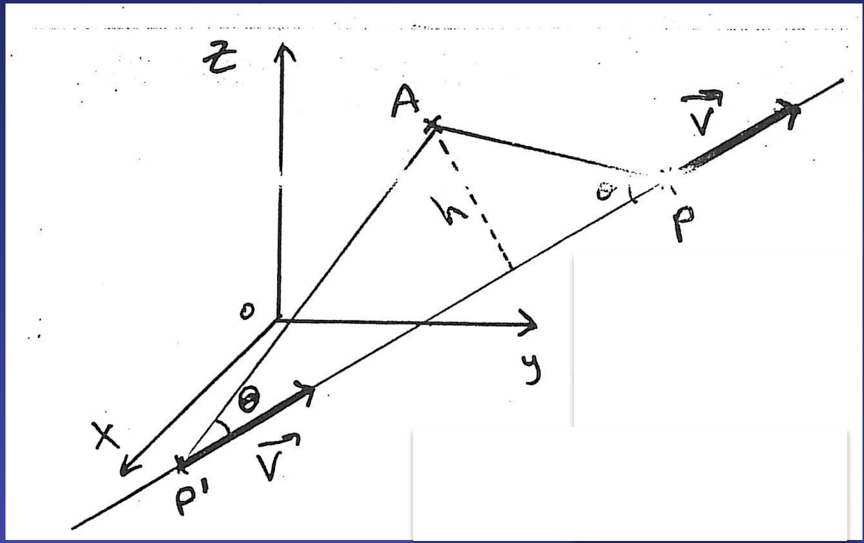
El momento de un vector $\vec{F}$ aplicado en un punto P con respecto de un punto O viene dado el producto vectorial del vector $\overrightarrow{OP}$ por el vector $\vec{F}$

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Donde $\vec{r}$ es el vector que va desde O hasta P

Por la propia definición del producto vectorial, el momento es un vector perpendicular al plano derterminado por los vectores $\vec{F}$ y $\vec{r}$

Momento de un vector deslizante



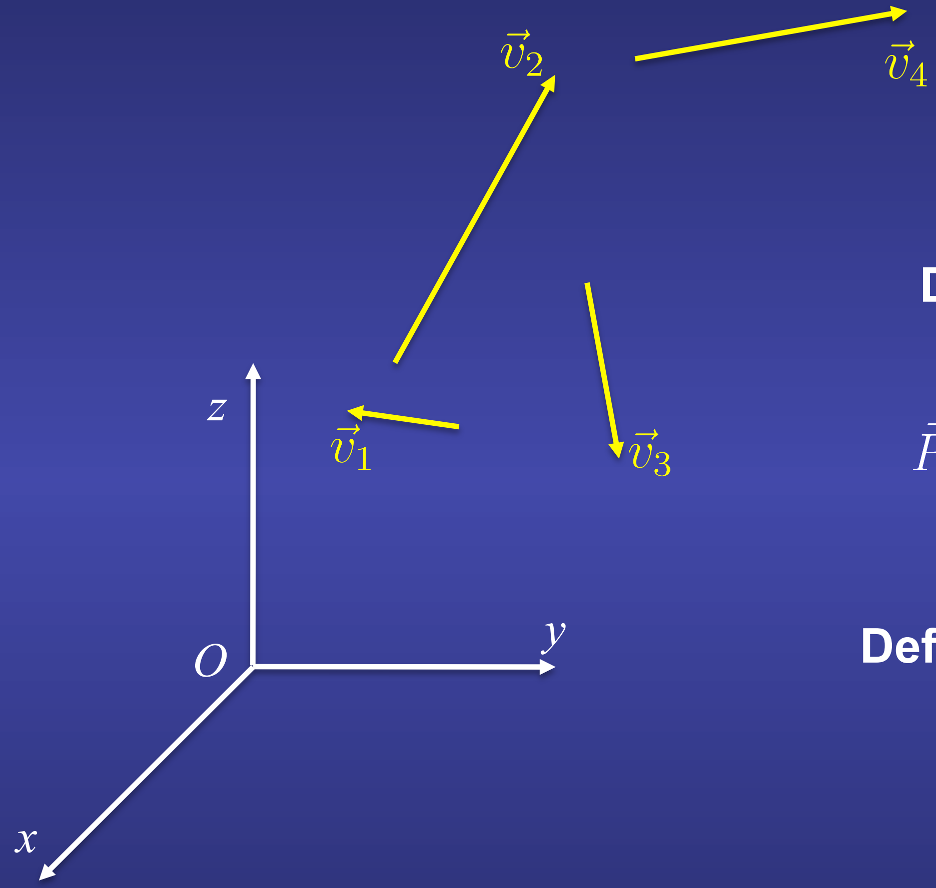
Vectores deslizantes: su punto de aplicación puede deslizar a lo largo de su recta de acción.

El módulo del momento del vector deslizante vendrá dado por

$$|\vec{M}_A\vec{v}| = |\vec{AP}|\sin\theta|\vec{v}| = h|\vec{v}|$$

Este módulo es constante
(tanto la distancia del punto A a la recta, h , como el módulo del vector son constantes)

Sistema de vectores



Supongamos un conjunto de vectores,

$$\vec{v}_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

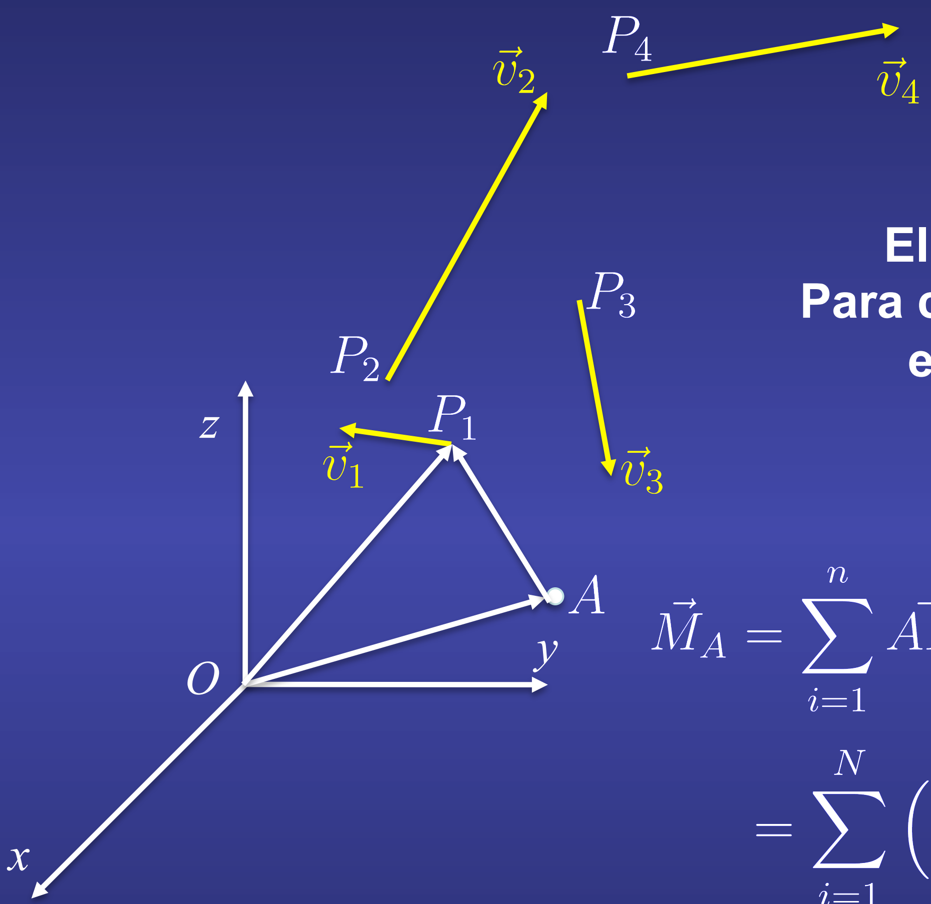
Definimos la resultante del sistema de vectores como

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} v_{xi} \right) \vec{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} v_{yi} \right) \vec{j} + \left(\sum_{i=1}^{n} v_{zi} \right) \vec{k}$$

Definimos el momento resultante con respecto a un punto

$$\vec{M}_A = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{Ai}$$

Campo de momentos



El momento resultante genera un campo vectorial.
Para cada punto en el espacio podemos definir un vector:
el momento resultante con respecto a ese punto

$$\vec{M}_A = \sum_{i=1}^{n} \vec{AP_i} \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{AO} + \vec{OP_i} \right) \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(-\vec{OA} + \vec{OP_i} \right) \times \vec{v}_i$$

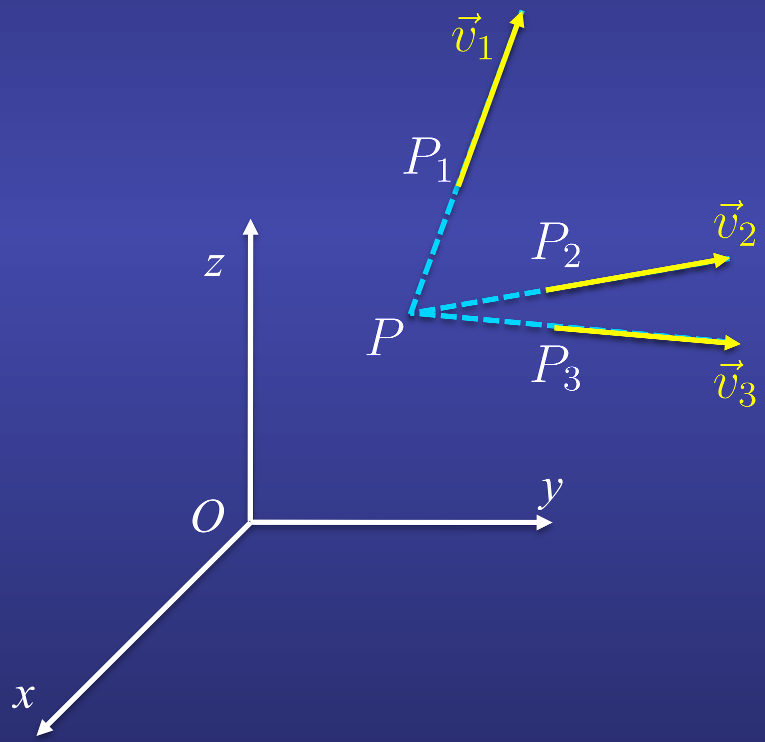
$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{OP_i} \times \vec{v}_i \right) + \sum_{i=1}^{N} \left(-\vec{OA} \times \vec{v}_i \right) = \vec{M}_O - \vec{OA} \times \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i \right)$$

$$= \vec{M}_O - \vec{OA} \times \vec{R}$$

Si la resultante de un sistema de vectores es nula,
entonces el momento resultante es independiente del punto con respecto al que se toma

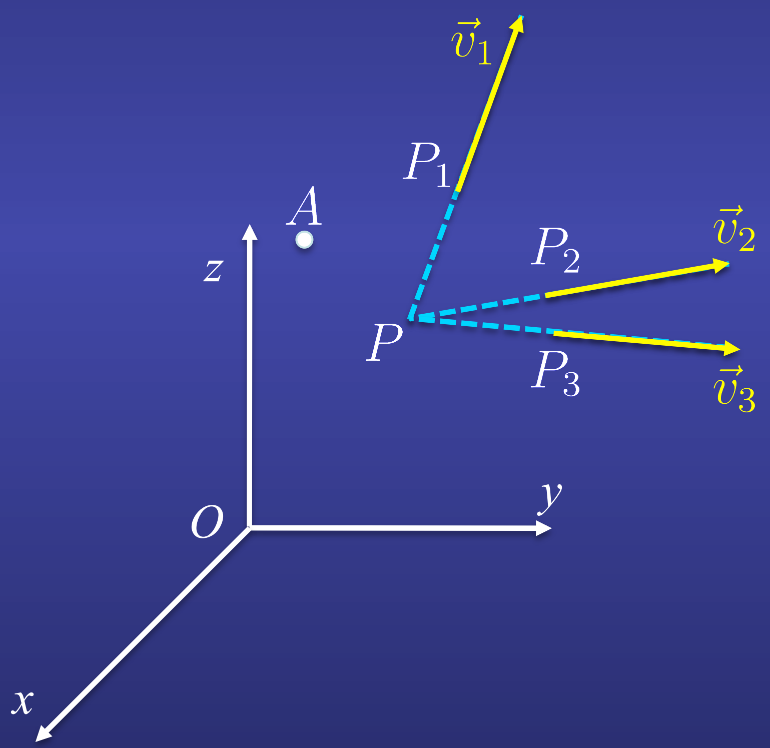
Sistema de vectores concurrentes

Un sistema de vectores concurrentes es aquel para el cual existe un punto en común para todas las rectas de acción de los vectores componentes



Teorema de Varignon para un sistema de vectores concurrentes

Dadas varias fuerzas concurrentes el momento resultante de las distintas fuerzas es igual al momento de la resultante de ellas aplicada en el punto de concurrencia.



$$\vec{M}_A = \sum_{i=1}^{n} \vec{AP_i} \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{AP} + \vec{PP_i} \right) \times \vec{v}_i$$

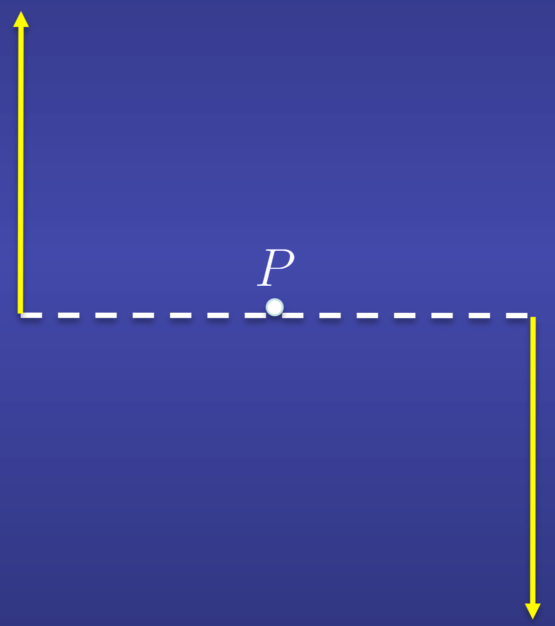
$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{AP} \times \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{PP_i} \times \vec{v}_i$$

$$= \vec{AP} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i + 0$$

$$= \vec{AP} \times \vec{R}$$

El teorema de Varignon no se cumple para un sistema de vectores no concurrentes

Contraejemplo: un par de fuerzas



La resultante de las fuerzas se anula

$$\vec{R} = 0$$

El momento de las fuerzas no se anula

$$\vec{M}_P \neq 0$$