CAMPOS CONSERVATIVOS

Sean los dos campos vectoriales siguientes:

$$\vec{A} = -\left(2ax + 3x^2z^2\right)\hat{i} - \left(2by + 3y^2z^4\right)\hat{j} - \left(2x^3z + 4y^3z^3\right)\hat{k}$$

$$\vec{B} = \left(x^2y + \frac{1}{3}y^3\right)\hat{i} + \left(x^3 + 3y^2x\right)\hat{j} + z^3\,\hat{k}$$

a) ¿Cuál corresponde a un campo de fuerzas conservativo y cuál a un campo de velocidades del aire en la atmósfera terrestre alrededor de un centro de bajas presiones?

b) Para el campo de fuerzas conservativo ¿cuál es el campo de energía potencial del cual deriva?

Solución: I.T.T. 96, 01, 05

a) Un campo de fuerzas conservativo presenta un rotacional nulo mientras que en los alrededores de un centro de bajas presiones la corriente de aire circula rotando alrededor de este centro dando lugar a un campo de velocidades cuyo rotacional no será nulo. Por lo tanto si calculamos el rotacional de los dos campos que nos dan: $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{B} \neq 0$, con lo cual queda claro que $\vec{A}$ hace referencia al campo de fuerzas conservativo.

b) El campo conservativo $\vec{A}$ será igual a menos el gradiente de un campo de energía potencial Φ, por lo tanto se verificará que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -A_x = 2ax + 3x^2z^2 \quad \Rightarrow \quad \Phi(x,y,z) = \mathrm{a}x^2 + x^3z^2 + f(y,z)$$

Donde $f(y,z)$ es una función que no depende de x y que por lo tanto actúa de constante a la hora de hacer la integración respecto de x. La función $f(y,z)$ la podemos determinar estudiando la derivada respecto a y:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -A_y = 2by + 3y^2z^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2by + 3y^2z^4 \quad \Rightarrow \quad f(y,z) = by^2 + y^3z^4 + g(z)$$

Para determinar g(z) recurrimos al estudio de la derivada respecto de z:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -A_z = 2x^3z + 4y^3z^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad g(z) = C \quad (\text{constante})$$

Con lo cual la expresión final para Φ será: $\boxed{\Phi(x,y,z) = ax^2 + x^3z^2 + by^2 + y^3z^4 + C}$

Averiguar si el campo $\vec{A} = \left[y\cos(xy) + \frac{1}{x}\right]\hat{i} + x\cos(xy)\,\hat{j} + \frac{1}{z}\hat{k}$ es conservativo.

Solución: I.T.I. 98, I.T.T. 99, 02

Si se tratase de un campo conservativo debería presentar un rotacional nulo:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}=0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{A}\text{ es un campo conservativo}}$$

Demostrar que el campo $\vec{A}=\left(6xy+z^3\right)\hat{i}+\left(3x^2-z\right)\hat{j}+\left(3xz^2-y\right)\hat{k}$ es irrotacional. Hallar Φ de tal forma que $\vec{A}=\vec{\nabla}\Phi$

Solución: I.T.I. 06, I.T.T. 95, 03, 06, I.I. 94

Un campo conservativo debe presentar un rotacional nulo:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}=\boxed{0}$$

El campo conservativo $\vec{A}$ será igual al gradiente de un campo escalar Φ, por lo tanto se verificará que:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=A_x=6xy+z^3 \quad\Rightarrow\quad \Phi(x,y,z)=3x^2y+xz^3+f(y,z)$$

Donde $f(y,z)$ es una función que no depende de x y que por lo tanto actúa de constante a la hora de hacer la integración respecto de x. La función $f(y,z)$ la podemos determinar estudiando la derivada respecto a y:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=A_y=3x^2-z \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-z \quad\Rightarrow\quad f(y,z)=-yz+g(z)$$

Para determinar $g(z)$ recurrimos al estudio de la derivada respecto de z:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=A_z=3xz^2-y \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial g}{\partial z}=0 \quad\Rightarrow\quad g(z)=C \quad \text{(constante)}$$

Con lo cual la expresión final para Φ será: $\boxed{\Phi(x,y,z) = 3x^2 y + xz^3 - yz + C}$

Demostrar que el campo $\vec{A} = \left(yz - y^2 + 2xz\right)\hat{\imath} + \left(xz - 2yx\right)\hat{\jmath} + \left(xy + x^2\right)\hat{k}$ es conservativo. Encontrar el campo escalar del cual deriva.

Solución: **I.T.T. 97, 00, 04**

Un campo conservativo debe presentar un rotacional nulo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k} = \boxed{0}$$

El campo conservativo $\vec{A}$ será igual al gradiente de un campo escalar Φ, por lo tanto se verificará que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = A_x = yz - y^2 + 2\mathrm{xz} \quad \Rightarrow \quad \Phi(x,y,z) = \mathrm{xyz} - y^2 x + x^2 z + f(y,z)$$

Donde $f(y,z)$ es una función que no depende de x y que por lo tanto actúa de constante a la hora de hacer la integración respecto de x. La función $f(y,z)$ la podemos determinar estudiando la derivada respecto a y:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = A_y = xz - 2yx \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(y,z) = g(z)$$

Para determinar $g(z)$ recurrimos al estudio de la derivada respecto de z:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = A_z = xy + x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad g(z) = C \quad (\text{constante})$$

Con lo cual la expresión final para Φ será: $\boxed{\Phi(x,y,z) = xyz - y^2 x + x^2 z + C}$

Demostrar que $f(r)\vec{r}$ es un campo irrotacional.

Solución: **I.T.T. 96, 00**

Que un campo vectorial sea irrotacional implica que su rotacional es nulo. Calculando el rotacional del campo que nos dan:

$$\vec{\nabla}\times\left[f(r)\vec{r}\right]=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ f(r)x & f(r)y & f(r)z\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{f(r)\vec{r}\text{ es un campo irrotacional}}$$

donde hemos utilizado el resultado (usando la regla de la cadena):

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x}=\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x}=\frac{df(r)}{dr}\frac{x}{x^2+y^2+z^2}=\frac{df(r)}{dr}\frac{x}{r}$$

e igualmente: $\dfrac{\partial f(r)}{\partial y}=\ldots=\dfrac{df(r)}{dr}\dfrac{y}{r}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f(r)}{\partial z}=\ldots=\dfrac{df(r)}{dr}\dfrac{z}{r}$