TRABAJO Y ENERGIA: PROBLEMAS VARIOS

En una erupción volcánica se expulsó una masa de 4 km^3 de montaña con una densidad de 1.6 g/cm^3 hasta una altura media de 500 m. a) ¿Cuánta energía en julios se liberó en esta erupción?. b) La energía liberada en una bomba se mide en megatones de TNT, siendo 1 megatón de TNT = $4.2.10^{15}$ J. Expresar la respuesta de a) en megatones de TNT.

Solución: **I.T.T. 92, 95**

Texto solución

Nuestro cuerpo convierte la energía química interna en trabajo y calor a razón de unos 100W, lo que se denomina potencia metabólica. a) ¿Cuánta energía química interna utilizamos en 24 h?. b) La energía procede de los alimentos que comemos y usualmente se mide en Cal (calorías alimenticias), siendo 1 Cal = 4184 J. ¿Cuántas Cal de energía alimentaria debemos ingerir diariamente si nuestra potencia metabólica es 100 W?

Solución: **I.T.T. 92, 95**

Texto solución

¿A qué altura debe elevarse un cuerpo para que incremente su energía potencial en una cantidad igual a la energía que posee si se desplaza a una velocidad de 10 m/s? ¿Cuál es la eficiencia en cuanto al tanto por ciento de energía cinética transformada en energía potencial en el record de salto de altura (2.45m) del cubano Javier Sotomayor?

Solución: **I.T.T. 92, 95**

Texto solución

Una partícula de 4 kg se desplaza a lo largo del eje *X*. Su posición varia con el tiempo según $x = t + 2t^3$, en donde *x* se mide en m y *t* en s. Determinar en función del tiempo: a) su energía cinética, b) la fuerza que actúa sobre ella y su aceleración, c) la potencia de la fuerza. d) Determinar el trabajo realizado sobre la partícula en el intervalo de 0 a 2 s.

Solución: **I.T.I. 00, 02, 05, I.T.T. 99, 02, 05**

a) Derivando con el tiempo:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 1 + 6t^2 \quad \Rightarrow \quad E_c(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \boxed{2\left(1 + 6t^2\right)^2}$$

b) Derivando de nuevo:

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=\boxed{12\,t}\qquad\Rightarrow\qquad F(t)=ma=\boxed{48t}$$

c) La potencia desarrollada por la fuerza será:

$$P(t)=F(t)v(t)=\boxed{48t\left(1+6t^2\right)}$$

d) Para calcular el trabajo podemos integrar la potencia:

$$W=\int_0^2 P(t)dt=\int_0^2 48t\left(1+6t^2\right)dt=\boxed{1248\text{ J}}$$

o podemos calcular la variación de energía cinética sufrida por la partícula:

$$W=\Delta E_c=E_c(2)-E_c(0)=1250\text{ J}-2\text{ J}=\boxed{1248\text{ J}}$$

Un ascensor sube con una velocidad constante de 2 m/s. Un niño que va en el ascensor lanza una piedra de 0.6 kg hacia arriba con una velocidad de 5 m/s con relación al ascensor. Obténgase: a) el trabajo efectuado por el niño para lanzar la piedra, b) la diferencia de energía cinética de la piedra antes y después de ser lanzada. c) ¿Por qué no son iguales los resultados de los apartados a) y b)?

Solución: I.T.I. 99, 02, I.T.T. 99, 02, 05

a) El trabajo realizado por el niño (observador O') se habrá invertido en modificar la energía cinética de la piedra:

$$W_{niño} = \Delta E'_c = \frac{1}{2} m v'^{2}_{final} = \boxed{7.5 \text{ J}}$$

b) Visto por alguien externo al ascensor (observador O) la diferencia entre las energías final e inicial de la piedra es:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v^2_{final} - \frac{1}{2} m v^2_{inicial} = \boxed{13.5 \text{ J}}$$

c) Con objeto de mantener constante la velocidad del ascensor el motor de éste debe hacer un trabajo adicional mientras el niño lanza la piedra, lo que se traduce en una mayor variación de energía cinética de ésta.

Una partícula de masa m se mueve sobre una circunferencia de radio R de centro el origen, bajo la acción de una fuerza de atracción desde el punto P de coordenadas $(-R, 0)$ e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Determinar el trabajo desarrollado por dicha fuerza cuando el punto se traslada desde A $(R, 0)$ a B $(0, R)$.

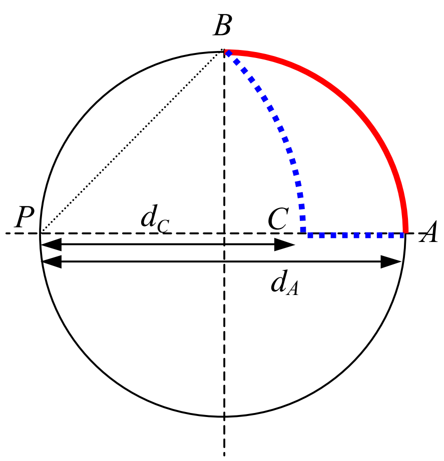
Solución: I.T.I. 94, 02, 03, 02, I.T.T. 95, 00, 03, I.I. 04

La fuerza que nos proponen viene expresada vectorialmente por:

$$\vec{F} = -\frac{k}{r_P^2}\hat{r}_P$$

donde $\vec{r}_P$ hace referencia al vector de posición de la partícula respecto al punto P.

Dicha fuerza central es conservativa (por analogía con la fuerza gravitatoria entre dos partículas, que tiene la misma expresión).



El trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se mueve de A a B no depende de la trayectoria seguida por ésta. En lugar de calcular dicho trabajo a lo largo de la trayectoria circular que une A con B vamos a calcularlo a lo largo de la trayectoria punteada (ver figura) que va de A a C y de C a B:

$$W = \int_{A\to B} \vec{F}d\vec{r} = \int_{A\to C} \vec{F}d\vec{r} + \cancelto{0}{\int_{C\to B} \vec{F}d\vec{r}} = \int_{A\to C} \vec{F}d\vec{r}$$

La integral a lo largo del recorrido de C a B se anula porque la fuerza y el vector desplazamiento son perpendiculares en todos los puntos del recorrido. En el recorrido de A a C los desplazamientos son vectores dirigidos hacia el punto P e implican una variación en la distancia r_P a dicho punto con lo que los podemos expresar como: $d\vec{r} = dr_P\,\hat{r}_P$. El trabajo realizado por la fuerza será entonces:

$$W = \int_{A\to C} \vec{F}d\vec{r} = \int_{r_P(A)}^{r_P(C)} \left(-\frac{k}{r_P^2}\hat{r}_P\right)\left(dr_P\,\hat{r}_P\right) = \int_{r_P(A)}^{r_P(C)} -\frac{k}{r_P^2}dr_P =$$

$$= \frac{k}{r_P}\Bigg]_{r_P(A)}^{r_P(C)} = \frac{k}{r_P(C)} - \frac{k}{r_P(A)} = \frac{k}{d_C} - \frac{k}{d_A}$$

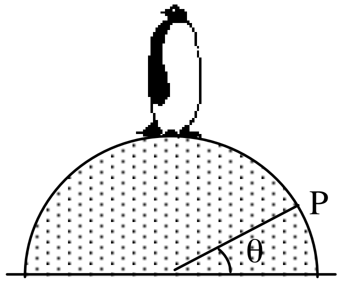
Como se ve el resultado sólo depende de las posiciones inicial y final. La energía potencial asociada a nuestra fuerza conservativa la obtenemos comparando el resultado anterior con la menos variación de la energía potencial:

$$W = -\Delta E_{pot.} = E_{pot.}(A) - E_{pot.}(C) \quad \Rightarrow \quad E_{pot.} = -\frac{k}{r_P} + Cte.$$

Teniendo en cuenta que según la figura $r_A = 2R$ y $r_C = \sqrt{2}R$:

$$W = \frac{k}{\sqrt{2}R} - \frac{k}{2R} = \boxed{\frac{k}{2R}\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

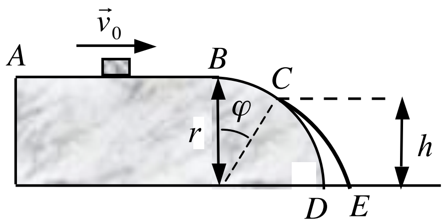
Un pingüino de masa m está de pie sobre un montículo hemiesférico de hielo como se muestra en la figura. Si empieza a resbalar desde el reposo (suponiendo el hielo perfectamente liso) ¿en qué punto P deja el pingüino de tener contacto con el hielo?



Solución: **I.T.I. 92, 95, I.T.T. 95, I.I. 04**

Texto solución

Un bloque pequeño desliza con velocidad v_0 sobre la superficie horizontal AB. Despreciando el rozamiento y sabiendo que $v_0 = \frac{1}{2}\sqrt{gr}$, a) expresar en función de r la altura h del punto C donde el bloque abandona la superficie cilíndrica BD, b) determinar la distancia d entre el punto D y el punto de impacto E con el suelo. c) ¿Para que valor de v_0 h sería mínima y cuál sería su valor? d) Si $r = 0.8$ m determínese el menor valor de v_0 para que se pierda el contacto en el punto B.



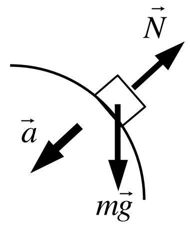
Solución: **I.T.I. 94, 99, 02, 05, I.T.T. 00, 03**

a) Al no haber rozamientos apliquemos la conservación de la energía mecánica para el sistema Tierra-bloque entre el punto A y el punto C (tomamos el origen de energías potenciales gravitatorias a ras del suelo):

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgr = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgh$$

$$\Rightarrow \quad v_C^2 = v_0^2 + 2g(r-h)$$

Dibujando el diagrama de las fuerzas que actúan sobre el objeto a medida que desciende y aplicando la segunda ley de Newton:



$$mg\cos\varphi - N = ma_n = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\varphi - m\frac{v^2}{r}$$

Cuando pasa por C la normal se anula y el objeto abandona la superficie:

$$mg\cos\varphi - m\frac{v_C^2}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad mg\left(\frac{h}{r}\right) - m\frac{\left[v_0^2 + 2g(r-h)\right]}{r} = 0$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{v_0^2 + 2gr}{3g} = \boxed{\frac{3}{4}r}$$

Y la velocidad en ese momento toma el valor:

$$v_C = \sqrt{v_0^2 + 2g(r-h)} = \sqrt{\frac{3}{4}gr}$$

b) Tomando el origen de coordenadas a ras del suelo debajo del punto B, el eje X hacia la derecha y el eje Y hacia arriba, y poniendo a cero el cronómetro en el instante en el que el objeto abandona la superficie, las condiciones iniciales del movimiento parabólico que va a realizar el objeto son:

$$x_0 = r\,\mathrm{sen}\varphi = \sqrt{r^2 - h^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}r \quad , \quad y_0 = h = \frac{3}{4}r$$

$$v_{x,0} = v_C\cos\varphi = \sqrt{\frac{3}{4}gr}\left(\frac{h}{r}\right) = \frac{\sqrt{27gr}}{8}$$

$$v_{y,0} = -v_C\,\mathrm{sen}\varphi = -\sqrt{\frac{3}{4}gr}\left(\frac{\sqrt{r^2-h^2}}{r}\right) = -\frac{\sqrt{21gr}}{8}$$

Las ecuaciones del movimiento serán:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + v_{x,0}t \\ y &= y_0 + v_{y,0}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}\right\}$$

En el momento t_{suelo} en que llega al suelo:

$$y(t_{suelo}) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{suelo} = \frac{v_{y,0} + \sqrt{v_{y,0}^2 + 2gy_0}}{g} = \frac{1}{8}\left(3\sqrt{13} - \sqrt{21}\right)\sqrt{\frac{r}{g}}$$

(La otra solución da un tiempo negativo que no tiene sentido físico)

La distancia que nos piden será:

$$d = x(t_{suelo}) - x_D = x(t_{suelo}) - r = \ldots = \boxed{\left(\frac{7\sqrt{7} + 9\sqrt{39}}{64} - 1\right) r = 0.1676\, r}$$

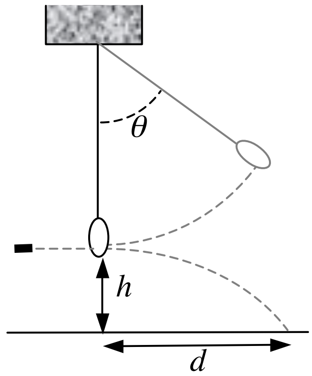
c) Utilizando la expresión encontrada en el primer apartado vemos que la altura mínima se alcanzaría cuando la velocidad inicial del objeto fuese prácticamente nula:

$$h = \frac{v_0^2 + 2gr}{3g} \quad \Rightarrow \quad h_{mín.} = \frac{v_{0,mín.}^2 + 2gr}{3g} = \frac{0 + 2gr}{3g} = \boxed{\frac{2}{3}r}$$

d) Si queremos que el contacto se pierda en B entonces $h = r$, con lo que:

$$h = \frac{v_0^2 + 2gr}{3g} = r \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 = \sqrt{gr}}$$

Un saco de arena de 4 kg de masa pende de un hilo de 0.6 m de longitud. Sobre el saco se dispara un fusil cuya bala tiene una masa de 40 g. La bala atraviesa el saco y recorre una distancia horizontal d = 20 m antes de pegar en el suelo que se encuentra a h = 1.5 m por debajo del impacto en el saco. El saco oscila alcanzando un ángulo máximo $\theta = 60^\circ$ con la vertical. Determinar: a) la velocidad de la bala después del choque, b) la velocidad del saco después del choque, c) la velocidad de la bala antes del choque, d) la energía perdida por el sistema al atravesar la bala el saco, e) la fuerza media que ejerce la arena sobre la bala si tarda en atravesarlo 0.5 s.



Solución: **I.T.I. 01, I.T.T. 01, 04**

a) El tiempo que tarda en llegar la bala al suelo después del choque es:

$$h = \frac{1}{2} g (\Delta t)^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Como nos dan la distancia horizontal recorrida durante ese tiempo:

$$d = v_{bala,después} \Delta t \quad \Rightarrow \quad v_{bala,después} = \frac{d}{\Delta t} = \sqrt{\frac{g}{2h}}\, d = \boxed{36.1 \text{ m/s}}$$

b) Las únicas fuerzas que actúan sobre el saco son el peso, que es una fuerza conservativa, y la tensión de la cuerda, que al ser perpendicular al movimiento del saco no realiza ningún trabajo. Podemos aplicar conservación de la energía entre el punto más bajo de su trayectoria y la posición en la que alcanza su máxima altura. Tomando como origen de energías potenciales gravitatorias en el punto más bajo:

$$E_{abajo} = E_{arriba} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m_{saco} v_{saco}^2 = m_{saco}\, g\, l (1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad v_{saco} = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)} = \boxed{2.42 \text{ m/s}}$$

c) Aplicando el principio de conservación del momento lineal en el choque:

$$m_{bala} \vec{v}_{bala,antes} = m_{bala} \vec{v}_{bala,después} + m_{saco} \vec{v}_{saco}$$

donde todos los vectores tienen la misma orientación horizontal. Despejando:

$$v_{bala,antes} = v_{bala,después} + \left(\frac{m_{saco}}{m_{bala}}\right) v_{saco} = \boxed{624 \text{ m/s}}$$

d) La energía pérdida por el sistema en el choque será:

$$\Delta E_{sistema} = E_{sistema,después} - E_{sistema,antes}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{sistema} = \left(\frac{1}{2} m_{bala} v_{bala,después}^2 + \frac{1}{2} m_{saco} v_{saco}^2\right) - \left(\frac{1}{2} m_{bala} v_{bala,antes}^2\right) = \boxed{-7.70\,\text{kJ}}$$

e) La variación de momento lineal de la bala durante el choque es debido al impulso comunicado por la fuerza ejercida por la arena:

$$\vec{I}(t) = \vec{F}_{arena}\,\Delta t = \vec{p}_{bala,después} - \vec{p}_{bala,antes} = m\left(\vec{v}_{bala,después} - \vec{v}_{bala,antes}\right)$$

Teniendo en cuenta la orientación horizontal de todos los vectores:

$$-F_{arena}\,\Delta t = m\left(v_{bala,después} - v_{bala,antes}\right) \quad \Rightarrow \quad F_{arena} = \frac{m}{\Delta t}\left(v_{bala,antes} - v_{bala,después}\right) = \boxed{47.0\,\text{N}}$$

Calcule la altura, energía potencial gravitatoria y energía total de un satélite de 1000 kg que está orbitando alrededor de la tierra con una rapidez de 7000 m/s.

Solución: I.T.I. 93

Texto

Calcular la energía mínima que hay que comunicarle a un satélite artificial de 4 toneladas de masa para colocarlo en órbita circular alrededor de la tierra a una altura de 35000 km sobre la superficie terrestre. Radio terrestre R = 6370 km.

Solución: I.T.I. 97, I.T.T. 97

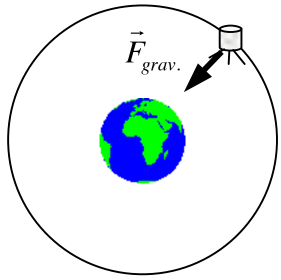
Texto

Calcular la energía potencial gravitatoria y la energía mecánica total de un satélite geosíncrono de masa 1000 kg.

Solución: I.T.I. 96, 01, I.T.T. 01, 04

Un satélite geosíncrono realiza una trayectoria circular tardando 24h en recorrerla completamente (M masa de la Tierra, m masa del satélite, R radio terrestre, r distancia del satélite al centro de la Tierra):

$$\vec{F}_{grav.} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v^2 = G\frac{M}{r} = g\frac{R^2}{r}$$



Donde $g = G\frac{M}{R^2} = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ es la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre.

Por otro lado: $\frac{2\pi r}{v} = T = 24\,\mathrm{h}$

$$\Rightarrow \quad v = \left(\frac{2\pi g R^2}{T}\right)^{\frac{1}{3}} = 3.07\,\mathrm{km/s}\,, \quad r = \left(\frac{T^2 g R^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 42.2\cdot 10^3\,\mathrm{km}$$

La energía potencial gravitatoria del satélite vendrá dada por:

$$E_{pot.grav.} = -G\frac{Mm}{r} = -mg\frac{R^2}{r} = \boxed{-9.42\cdot 10^9\ \mathrm{J}}$$

Para la energía cinética tenemos: $E_{cin.} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mg\frac{R^2}{r}$

Con lo que la energía mecánica total del satélite será:

$$E_{total} = E_{cin.} + E_{pot.grav.} = -\frac{1}{2}mg\frac{R^2}{r} = \boxed{-4.71\cdot 10^9\ \mathrm{J}}$$

Que resulta ser la mitad de lo que valía la energía potencial gravitatoria.

Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de una fuerza de atracción inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, $F = \frac{k}{r^2}$. La trayectoria es una circunferencia de radio R. Encontrar para la partícula: a) su velocidad, b) su energía total, c) su momento angular.

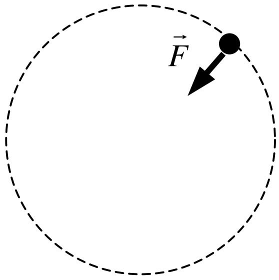
Solución: I.T.I. 95, 98, 99, I.T.T. 95, 03

La fuerza que nos proponen viene expresada vectorialmente por: $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$ donde $\vec{r}$ hace referencia al vector de posición de la partícula respecto al centro de atracción.
Por analogía con la fuerza gravitatoria entre dos partículas, que tiene la misma expresión, nuestra fuerza central es conservativa, y su energía potencial asociada será (dada la analogía con la fuerza gravitatoria):

$$E_p(\vec{r}) = -\frac{k}{r}$$

a) Planteando la segunda ley de Newton para el movimiento de nuestra partícula:

$$\left.\begin{aligned} F &= ma = m\frac{v^2}{R} \\ F &= \frac{k}{R^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{k}{mR}}}$$



b) La energía total de la partícula será:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{R} = \boxed{-\frac{1}{2}\frac{k}{R} = \frac{1}{2}E_p}$$

c) El momento angular de la partícula calculado respecto del centro de fuerzas será:

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) \quad \Rightarrow \quad L = mvR = \boxed{\sqrt{kRm}}$$

Una masa de 5 kg se mueve sobre una superficie horizontal sin rozamiento con la velocidad de 4 m/s, y choca frontalmente con un muelle elástico de masa despreciable y de constante recuperadora 9.8 N/cm. Determinar: a) la energía cinética del sistema en el momento en que la masa alcanza al muelle, b) la compresión máxima del muelle, c) velocidad de la masa cuando el muelle se ha comprimido 10 cm. d) Repetir el apartado b) para el caso en que el coeficiente de rozamiento dinámico con el suelo situado justo debajo del muelle sea 0.25. e) ¿Cual debería ser el coeficiente de rozamiento estático para que el muelle quede finalmente comprimido?

Solución: I.T.I. 97, I.T.T. 97

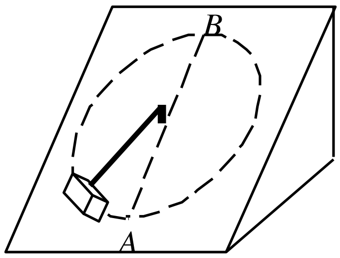
Texto solución

Sobre un plano inclinado un ángulo de 30° con la horizontal se lanza hacia arriba un cuerpo de masa 100 g y con velocidad inicial de 10 m/s. Siendo el coeficiente de rozamiento dinámico con el plano 0.3, determinar: a) espacio que recorre el cuerpo sobre el plano hasta que se para, b) energía desprendida en forma de calor debida al rozamiento, c) alcanzada la máxima altura el cuerpo desciende, ¿cuál es su velocidad al pasar por su posición inicial?

Solución: I.T.I. 97, I.T.T. 97

Texto solución

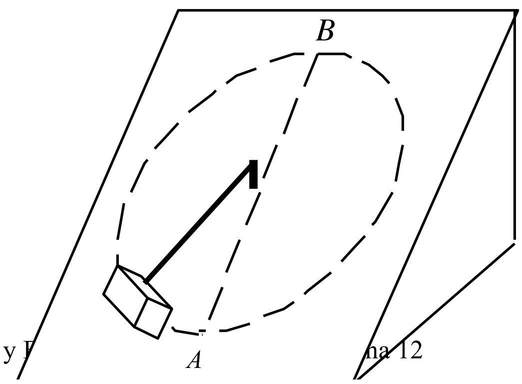
El cuerpo de masa 4 kg sujeto por la cuerda de longitud 2 m, gira en el plano inclinado de la figura, con el que tiene un coeficiente de rozamiento 0.25. Calcular: a) la velocidad mínima que debe tener en *A* para que pase por *B*, b) la velocidad, en este caso, con que pasará de nuevo por *A*



Solución: I.T.I. 97, I.T.T. 97

Texto solución

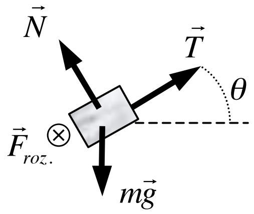
Un objeto de 12 kg de masa se ata al extremo de una cuerda fina de 0.75 m de longitud y se desliza por una rampa de 37° con la que tiene un coeficiente de rozamiento $\mu = 0.25$. En un instante determinado el objeto pasa por el punto más bajo *A* y la tensión de la cuerda es de 1100 N. a) Determinar la velocidad del objeto en dicho instante. Cuando el objeto asciende, al pasar por *B*



determinar: b) el módulo de la velocidad, c) la tensión en la cuerda, d)la potencia desarrollada por la fuerza de rozamiento sobre el objeto. Suponer que el módulo de la velocidad en el punto más bajo es v_0. e) Determinar el valor mínimo de v_0 para que el objeto pueda completar su trayectoria circular.

Solución: I.T.T. 04

a) Teniendo en cuenta el diagrama de fuerzas para el bloque y aplicando la segunda ley de Newton para las componentes a lo largo del plano:



$$T - mg\,\text{sen}\,\theta = ma_n = m\frac{V_A^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad V_A = \left[R\left(\frac{T}{m} - g\,\text{sen}\,\theta\right)\right]^{1/2} = \boxed{8.02 \text{ m/s}}$$

b) Teniendo en cuenta que la fuerza de rozamiento va a realizar trabajo y tomando el origen de energía potencial gravitatoria en A:

$$W_{roz.} = \Delta\mathcal{E} \quad , \quad F_{roz.} = \mu N = \mu mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad -\mu mg\cos\theta(\pi R) = \left[\frac{1}{2}mV_B^2 + mg(2R\,\text{sen}\,\theta)\right] - \left[\frac{1}{2}mV_A^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad V_B = \left[V_A^2 - gR(4\,\text{sen}\,\theta + 2\pi\mu\cos\theta)\right]^{1/2} = \boxed{6.12 \text{ m/s}}$$

c) Planteando ahora la segunda ley de Newton en el punto más alto:

$$T + mg\,\text{sen}\,\theta = ma_n = m\frac{V_B^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad T = m\left(\frac{V_B^2}{R} - g\,\text{sen}\,\theta\right) = \boxed{527.8 \text{ N}}$$

d) La potencia desarrollada por la fuerza de rozamiento será:

$$P_{roz.} = \vec{F}_{roz.}\cdot\vec{V}_B = -F_{roz.}V_B = -\mu mg\cos\theta\,V_B = \boxed{-143.6 \text{ W}}$$

e) La velocidad mínima que el móvil puede poseer en la posición B se correspondería con una tensión nula en la cuerda con lo que, según se ha determinado en el apartado c), tenemos que:

$$T_{mín.} = m\left(\frac{V_{B,mín.}^2}{R} - g\,\text{sen}\,\theta\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{B,mín.} = \sqrt{gR\,\text{sen}\,\theta}$$

y teniendo en cuenta el resultado del apartado b) y que dicha velocidad mínima en B se alcanzaría con la velocidad mínima v_0 en A

$$V_{B,mín.} = \left[v_0^2 - gR\left(4\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\pi\mu\cos\theta\right)\right]^{1/2}$$

Igualando las dos expresiones:

$$\Rightarrow \quad v_0 = \left[gR\left(5\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\pi\mu\cos\theta\right)\right]^{1/2} = \boxed{5.60 \text{ m/s}}$$

Una masa de 5 kg cae desde 5 m de altura por encima del extremo de un muelle vertical de constante 9.8 N/cm. Calcular la máxima compresión del muelle, considerando que no se pierde energía en el proceso.

Solución: I.T.I. 97, I.T.T. 97

Texto solución

Un bloque de 30 kg se deja caer desde una altura de 30 m sobre el plato de 10 kg de una báscula de resorte. Si el choque es perfectamente plástico, determinar el desplazamiento máximo del plato. Constante del resorte *K*=20 kN/m

---

Solución: I.T.I. 93, 04

Aplicando la conservación de la energía entre la situación *A* en la que se suelta el bloque y la situación *B* que es justo cuando el bloque entra en contacto con el plato de la báscula:

$$m_{bloque} g h_A = \frac{1}{2} m_{bloque} v_{bloque}^2 + m_{bloque} g h_B \quad \Rightarrow \quad v_{bloque} = \sqrt{2g\left(h_A - h_B\right)} = \sqrt{2gh}$$

Aplicando la conservación del momento lineal en el choque obtenemos la velocidad conjunta *V* del bloque y el plato:

$$m_{bloque} v_{bloque} = \left(m_{bloque} + m_{plato}\right) V \quad \Rightarrow \quad V = \left(\frac{m_{bloque}}{m_{bloque} + m_{plato}}\right) v_{bloque} = \left(\frac{m_{bloque}}{m_{bloque} + m_{plato}}\right)\sqrt{2gh}$$

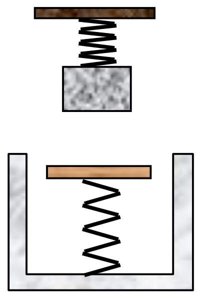
Aplicando ahora la conservación de la energía entre la situación inicial en la que bloque y plato inician su movimiento conjunto y el muelle está comprimido una distancia x_0 debido al peso del plato ($m_{plato} g = K x_0$) y la situación final en la que el muelle se comprime una distancia adicional *x* (y tomando el origen de energías potenciales gravitatorias en las situación final):

$$\frac{1}{2}\left(m_{bloque} + m_{plato}\right) V^2 + \left(m_{bloque} + m_{plato}\right) g x + \frac{1}{2} K x_0^2 = \frac{1}{2} K \left(x + x_0\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{m_{bloque}^2}{m_{bloque}+m_{plato}}\right) gh + m_{bloque}gx = \frac{1}{2}Kx^2$$

$$\Rightarrow \quad x = m_{bloque}\frac{g}{K} + \sqrt{m_{bloque}^2\frac{g^2}{K^2} + \left(\frac{m_{bloque}^2}{m_{bloque}+m_{plato}}\right)\frac{2gh}{K}} = \boxed{82.8 \text{ cm}}$$

Un cuerpo de masa m_1 se encuentra colgado de un muelle de cte. elástica k_1, d metros más abajo se encuentra una plataforma de masa m_2 apoyada sobre un muelle de cte. elástica k_2. a) Calcular la energía elástica almacenada en el muelle 1. b) Si en un momento determinado se suelta el enganche que sujeta a m_1, calcular la velocidad con la que choca contra la plataforma. c) Si en el choque entre m_1 y la plataforma quedan pegados y se conserva el momento lineal, calcular cuanto se comprime el muelle 2.



Solución: I.T.I. 96, 99, 01, 02, 05, I.T.T. 01, 04

a) El cuerpo colgado del muelle se encuentra en reposo con lo cual su peso está equilibrado con la fuerza elástica del muelle que tira hacia arriba. Si llamamos Δl_1 al alargamiento sufrido por el muelle 1:

$$k_1\,\Delta l_1 = m_1 g \quad \Rightarrow \quad \Delta l_1 = \frac{m_1 g}{k_1}$$

La energía potencial elástica acumulada en el muelle será:

$$E_{pot.elástica\ 1} = \frac{1}{2}k_1(\Delta l_1)^2 = \boxed{\frac{m_1^2 g^2}{2k_1}}$$

b) Vamos a tomar el origen de energías potenciales gravitatorias a la altura a la que se encuentra la plataforma. Planteando la conservación de la energía entre la situación inicial (el enganche se acaba de soltar) y la situación final (el cuerpo impacta contra la plataforma) y teniendo en cuenta que durante su desplazamiento la única fuerza que realiza trabajo sobre el bloque es la de la gravedad (no actúan fuerzas elásticas y no habrá por lo tanto que considerar energías potenciales elásticas, la energía potencial elástica acumulada en el muelle 1 sigue en él, y se transformará en energía cinética del muelle ya que empezará a oscilar arriba y abajo):

$$\left.\begin{array}{l} E_{inicial} = m_1 g d \\ \\ E_{final} = \dfrac{1}{2}m_1 v_1^2 \end{array}\right\} \quad E_{inicial} = E_{final} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \boxed{\sqrt{2gd}}$$

(En la solución anterior se ha tomado el sentido positivo de movimiento hacia abajo para el movimiento unidimensional)

c) Si aplicamos la conservación del momento lineal en el choque (las velocidades que aparecen en la ecuación son componentes y no módulos, en nuestro caso con la elección del sentido positivo del movimiento las dos velocidades serán positivas):

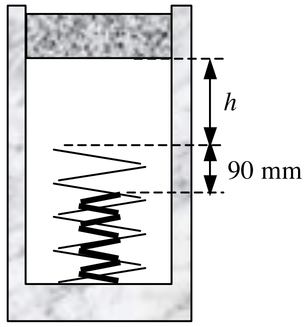
$$m_1 v_1 = \left(m_1 + m_2\right) v_{conjunto} \quad \Rightarrow \quad v_{conjunto} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)\sqrt{2gd}$$

Si la compresión máxima que se produce en el muelle 2 es $\Delta l_{2,máx.}$ y aplicamos el principio de conservación de la energía teniendo en cuenta que inicialmente el muelle 2 ya estaba comprimido debido al peso de la plataforma $\Delta l_2 = \dfrac{m_2 g}{k_2}$ (resultado que se calcula igual que en el primer apartado):

$$\left.\begin{aligned} E_{inicial} &= \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) v_{conjunto}^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\Delta l_2\right)^2 = \left(\frac{m_1^2}{m_1 + m_2}\right) gd + \frac{m_2^2 g^2}{2k_2} \\ E_{final} &= \frac{1}{2} k_2 \left(\Delta l_{2,máx.}\right)^2 - \left(m_1 + m_2\right) g \left(\Delta l_{2,máx.} - \Delta l_2\right) \end{aligned}\right\}$$

$$E_{inicial} = E_{final} \quad \Rightarrow \quad \Delta l_{2,máx.} = \boxed{\left(\frac{m_1 + m_2}{k_2}\right) g \left\{1 + \sqrt{1 - \frac{m_2\left(2m_1 + m_2\right)}{\left(m_1 + m_2\right)^2 g} + \frac{2m_1^2 k_2 d}{\left(m_1 + m_2\right)^3 g}}\right\}}$$

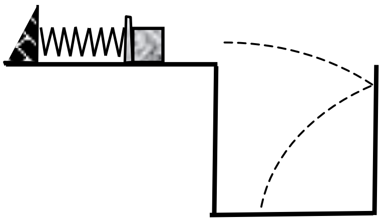
Un émbolo de 8 kg se suelta desde el reposo en la posición representada y es frenado por dos resortes concéntricos. La constante del resorte exterior es de 3 kN/m y la del interior de 10 kN/m. Se observa que la máxima deformación del resorte exterior es de 150 mm. Determinar la altura desde la cual cae el émbolo.



Solución: **I.T.I. 94**

Texto solución

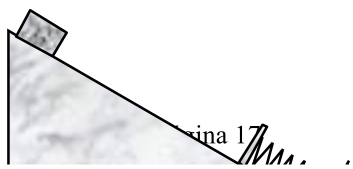
Tenemos un muelle sobre una superficie horizontal a una altura de 1800 mm y una pared vertical lisa a 4 m de distancia. Utilizamos un muelle para lanzar una bola de 2 kg de masa para lo cual lo comprimimos 20 cm. Sabiendo que la bola choca contra la pared a una altura de 1 m y que el coeficiente de restitución entre ambos es e = 0.5 determinar: a) la constante del muelle, b) punto de la horizontal en que la bola llega al suelo, c) ángulo que forma la trayectoria con la horizontal en dicho punto, d) ecuación de la trayectoria que sigue la bola desde que abandona el muelle hasta que choca con la pared.



Solución: **I.T.I. 92**

Texto solución

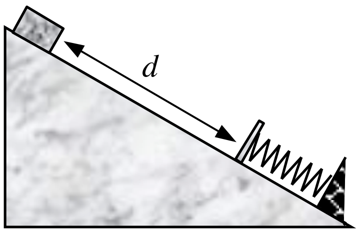
Se usa un resorte para detener un paquete que desciende por un plano inclinado 30º. La constante del muelle es de 1 kN/m e



inicialmente se encuentra comprimido 5 cm. Si la velocidad del paquete es de 3 m/s cuando se encuentra a 5 m del resorte determinar la deformación adicional máxima que experimenta el resorte.

Solución: **I.T.I. 94**

Texto solución

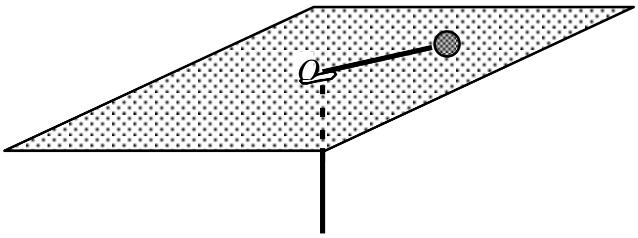


Se usa un muelle para detener un paquete que desciende por un plano inclinado. El muelle se encontraba inicialmente comprimido una distancia s. Calcular la contracción adicional máxima que se produce en el muelle en función de la velocidad v del paquete, su distancia d al muelle, la constante elástica k de éste, su contracción inicial s, el coeficiente de rozamiento cinemático μ_c y el ángulo φ que forma el plano con la horizontal. ¿A qué altura regresará el paquete cuando el muelle recupere su posición inicial? ¿Qué condición debería cumplir el coef. de rozamiento cinemático para que el paquete no despegue del muelle? ¿Qué condición debería cumplir el coef. de rozamiento estático para que el muelle permanezca completamente comprimido?

Solución: **I.I. 94**

Texto solución

Una esfera de 0.6 kg está unida a una cuerda elástica de constante 100 N/m, que está sin deformar cuando la esfera se encuentra en el origen O. Si la esfera puede deslizar sin rozamiento sobre la superficie horizontal y en el instante inicial, $t_0 = 0$, su distancia al origen era de 0.5 m, y su velocidad era de 20 m/s formando un ángulo de 60° con el vector de posición determinar las distancias máximas y mínimas de la esfera al origen O y los valores correspondientes de su velocidad. Ayuda: En los puntos de máximo acercamiento o de máximo alejamiento los vectores de posición y de velocidad tienen que ser forzosamente perpendiculares.



Solución: **I.T.I. 99, 00, 02, I.T.T. 99, 02, 05**

Sobre la esfera actúan el peso y la normal, que se anulan entre sí, y la fuerza elástica dirigida en todo momento hacia el punto O. Al ser esta última fuerza conservativa y central se conservarán en nuestro problema la energía total de la esfera, suma de la energía cinética y potencial elástica:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kr_0^2 = 132.5\ \mathrm{J}$$

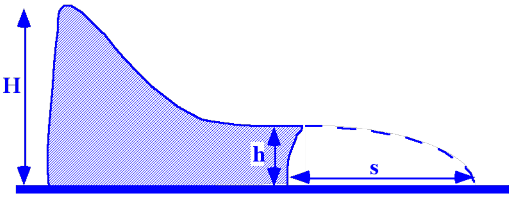
y el momento angular calculado respecto al punto O:

$$L_O = mvr\,\mathrm{sen}\theta = mv_0 r_0\,\mathrm{sen}\,\theta_0 = 5.196\ \mathrm{kg\ m^2/s}$$

donde θ es el ángulo entre el vector de posición y el vector velocidad.
Teniendo en cuenta la expresión de la energía, cuando la esfera alcance la distancia mínima la velocidad debe tomar un valor máximo, y viceversa. Teniendo en cuenta que en estos casos los vectores posición y velocidad son perpendiculares (téngase en cuenta que cuando la distancia al origen sea mínima o máxima la velocidad no puede tener componente radial $\frac{dr}{dt}$, ya que si la tuviera la distancia radial seguiría disminuyendo o aumentando):

$$\left.\begin{array}{l} L_O = mv_{máx.}r_{mín.} \\ L_O = mv_{mín.}r_{máx.} \\ E = \frac{1}{2}mv_{máx.}^2 + \frac{1}{2}kr_{mín.}^2 \\ E = \frac{1}{2}mv_{mín.}^2 + \frac{1}{2}kr_{máx.}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v_{máx.} = m^{-1/2}\left[E + \left(E^2 - \frac{kL_O^2}{m}\right)^{1/2}\right]^{1/2} = \boxed{20.28\ \mathrm{m/s}} \\ v_{mín.} = m^{-1/2}\left[E - \left(E^2 - \frac{kL_O^2}{m}\right)^{1/2}\right]^{1/2} = \boxed{5.513\ \mathrm{m/s}} \\ r_{máx.} = m^{-1/2}L_O\left[E + \left(E^2 - \frac{kL_O^2}{m}\right)^{1/2}\right]^{-1/2} = \boxed{1.571\ \mathrm{m}} \\ r_{máx.} = m^{-1/2}L_O\left[E + \left(E^2 - \frac{kL_O^2}{m}\right)^{1/2}\right]^{-1/2} = \boxed{0.427\ \mathrm{m}} \end{array}\right.$$

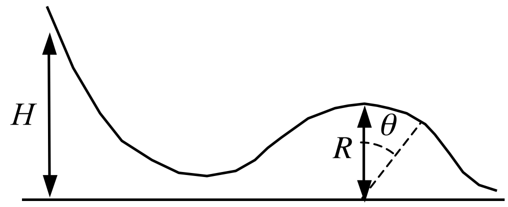
Un esquiador se desliza, partiendo del reposo, desde la cúspide de una rampa lisa de altura H hasta su parte final donde hay un trampolín horizontal de altura h. ¿Qué altura h hace que la distancia s recorrida sea máxima? ¿Cuánto valdrá dicha distancia?



Solución: I.T.I. 96, I.T.T. 96

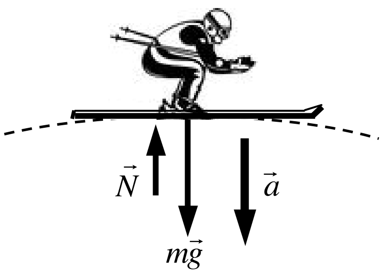
Texto solución

Un esquiador inicia desde el reposo un descenso de altura H respecto al centro de una colina circular de radio R. Suponiendo despreciable el rozamiento, calcular el valor máximo de H para el cual el esquiador permanece en contacto con la nieve en la parte superior de la colina. El esquiador inicia el descenso de la parte superior de la colina con una velocidad inicial pequeña v_0, calcular su velocidad en función del ángulo θ. Calcular el valor del ángulo para el cual pierde el contacto de los esquíes con la pendiente.



Solución: I.T.I. 98, 03, I.T.T. 03

En la cima de la colina si dibujamos el diagrama de fuerzas y planteamos la segunda ley de Newton:



$$\left.\begin{aligned} mg - N = ma = m\frac{v_{cima}^2}{R} \\ N \geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad v_{cima} \leq \sqrt{gR}$$

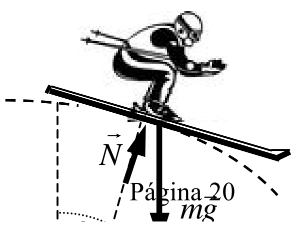
Si aplicamos la conservación de la energía entre el punto de partida y la cima de la colina:

$$mgH = \frac{1}{2}mv_{cima}^2 + mgR \quad \Rightarrow \quad v_{cima} = \sqrt{2g(H-R)}$$

Comparando estas dos expresiones tenemos que:

$$\boxed{H \leq \frac{3}{2}R}$$

Si ahora nuestro esquiador inicia el descenso de la colina con una velocidad inicial v_0 pequeña, aplicando la conservación de



la energía entre la cima y la posición indicada en la figura podemos calcular su velocidad en función del ángulo θ:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad v(\theta) = \sqrt{v_0^2 + 2gR(1-\cos\theta)} \approx \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$$

(donde hemos despreciado la velocidad v_0 por ser muy pequeña)

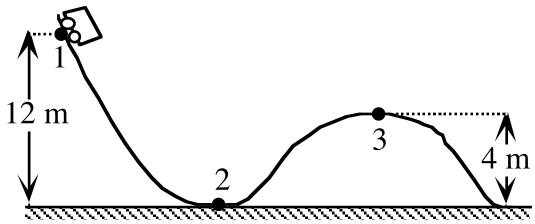
Si planteamos la segunda ley de Newton para la componente normal a la trayectoria:

$$mg\cos\theta - N = ma_n = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N = m\left(g\cos\theta - \frac{v^2}{R}\right) = (3\cos\theta - 2)mg$$

Cuando para el ángulo $\theta_{\text{crítico}}$ el esquiador esté a punto de despegarse de la superficie la normal en ese momento se anulará:

$$N(\theta_{crítico}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (3\cos\theta_{crítico} - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{crítico} = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 48.19^{\circ}}$$

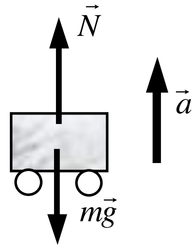
Una vagoneta de 1000 kg de peso parte del reposo en el punto 1 y desciende, sin rozamiento, por la vía indicada en la figura. a) Calcular la fuerza que la vía ejerce sobre la vagoneta en el punto 2, donde el radio de curvatura es de 6 m. b) Determinar el mínimo valor del radio de curvatura en el punto 3 para salvar dicho punto.



Solución: **I.T.I. 94, 00, I.T.T. 99, 02, 05**

a) Teniendo en cuenta que la única fuerza que realiza trabajo y que actúa sobre la vagoneta es el peso y es una fuerza conservativa podemos aplicar la conservación de la energía entre los puntos 1 y 2 para el sistema Tierra-vagoneta:

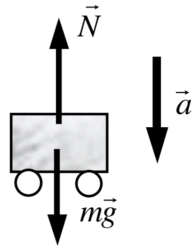
$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$



Al pasar por 2 todas las fuerzas que actúan sobre la vagoneta son verticales, o lo que es lo mismo, perpendiculares a la trayectoria. Según la segunda ley de Newton la aceleración en ese momento también será perpendicular a la trayectoria, es decir será una aceleración normal.

$$N - mg = ma \quad \Rightarrow \quad N = m(g + a) = m\left(g + \frac{v_2^2}{R_2}\right) = mg\left[1 + 2\left(\frac{h_1 - h_2}{R_2}\right)\right] = \boxed{49.0 \text{ kN}}$$

b) El razonamiento para el movimiento de la vagoneta al pasar por el punto 3 se parece al razonamiento empleado en el apartado anterior, la única diferencia es que ahora si la vagoneta pasa físicamente por 3 su aceleración estará orientada hacia abajo (hacia el lado cóncavo de la trayectoria) y no hacia arriba. Haciendo un análisis similar tenemos que:

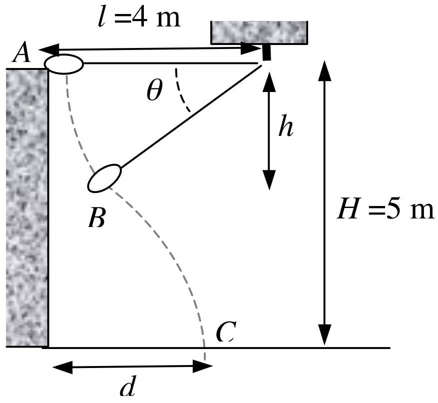


$$mg - N = ma \quad \Rightarrow \quad N = m(g - a) = m\left(g - \frac{v_3^2}{R_3}\right) = mg\left[1 - 2\left(\frac{h_1 - h_3}{R_3}\right)\right]$$

En esta expresión vemos que la normal N depende del radio de curvatura R_3 en el punto 3. A medida que este radio disminuye la normal se hace cada vez menor. Como la normal no puede ser negativa, el caso límite que nos piden analizar se produciría si la vagoneta pasase por 3 apenas rozando la superficie (a punto de perder contacto), la normal en este caso sería nula, y el radio de curvatura sería el mínimo que podríamos tener en 3 para que la vagoneta no perdiese el contacto con el suelo. En este caso límite tenemos que:

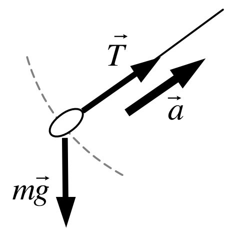
$$1 - 2\left(\frac{h_1 - h_3}{R_{3,mín.}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{3,mín.} = 2(h_1 - h_3) = \boxed{16 \text{ m}}$$

Una bolsa se empuja suavemente desde lo alto de una pared en A y oscila en un plano vertical en el extremo de una cuerda de longitud l, determínese el ángulo θ para el cual la cuerda se romperá sabiendo que puede soportar una tensión máxima del doble del peso de la bolsa. ¿A qué distancia de la pared cae el saco?



Solución: **I.T.I. 94, 99, 02, 05, I.T.T. 02, 05**

La bolsa va a realizar inicialmente un movimiento circular. Si dibujamos el diagrama de fuerzas sobre la bolsa cuando se encuentra en la situación B y aplicamos la segunda ley de Newton para las componentes normales:



$$T - mg\,\text{sen}\,\theta = ma_n = m\frac{v^2}{l}$$

La velocidad de la bolsa la podemos obtener aplicando la conservación de la energía entre A y B para el sistema Tierra-bolsa:

$$mgh_A = mgh_B + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2g(h_A - h_B)} = \sqrt{2gl\,\text{sen}\,\theta}$$

Sustituyendo en la expresión anterior expresamos la tensión T de la cuerda en función del ángulo θ : $T = 3mg\,\text{sen}\,\theta$. La tensión de rotura se alcanzará para un cierto ángulo crítico $\theta_{crítico}$:

$$3mg\,\text{sen}\,\theta_{crítico} = T_{rotura} = 2mg \quad \Rightarrow \quad \theta_{crítico} = \text{arc sen}\left(\frac{2}{3}\right) = \boxed{41.8^{\circ}}$$

La velocidad que lleva la bolsa en ese instante será:

$$\vec{v}_{rotura} = \sqrt{2gl\,\text{sen}\,\theta_{crítico}}\left(\text{sen}\,\theta_{crítico}, -\cos\theta_{crítico}\right) = \sqrt{\frac{4gl}{3}}\left(\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

Situemos nuestro origen de coordenadas en el suelo al pie de la pared, con el eje X hacia la derecha y el eje Y hacia arriba y pongamos a cero nuestro cronómetro justo cuando se rompe la cuerda. La posición de la bolsa en el momento de rotura será:

$$\vec{r}_{rotura} = \left(l - l\cos\theta_{crítico}, H - l\,\text{sen}\,\theta_{crítico}\right) = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{H}{l} - \frac{2}{3}\right)l$$

Las ecuaciones del movimiento parabólico que va a realizar la bolsa serán:

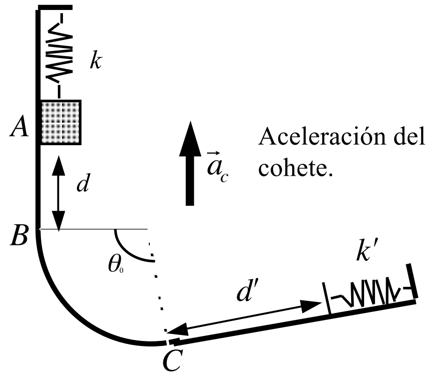
$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \left(1-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) l + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{gl}{3}}\, t \\ y(t) &= H - \frac{2}{3} l - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5gl}{3}}\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} v_x(t) &= \frac{4}{3}\sqrt{\frac{gl}{3}} \\ v_y(t) &= -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5gl}{3}} - gt \end{aligned}\right\}$$

En el instante t_{suelo} en que llega al suelo:

$$y(t_{suelo}) = H - \frac{2}{3} l - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5gl}{3}}\, t_{suelo} - \frac{1}{2} g t_{suelo}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{suelo} = 0.332 \text{ s}$$

Sustituyendo en la expresión para la coordenada x: $d = \boxed{x(t_{suelo}) = 2.62 \text{ m}}$

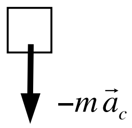
El dispositivo de la figura se encuentra en el interior de un cohete suficientemente alejado de cualquier planeta y con los motores encendidos, lo que le comunica una aceleración a_c. En este dispositivo tenemos un cuerpo colgado de un muelle de constante elástica k y al que produce un alargamiento x. En un momento determinado el enganche con el muelle se rompe y el cuerpo sale de A hacía B. Si los coeficientes de rozamiento estático y dinámico del cuerpo con la superficie son μ_e y μ_d determinar para un observador en el interior del cohete: a) ¿Cual será su velocidad al llegar a B? Si al llegar el cuerpo a B el cohete apaga sus motores: b) Demostrar que la fuerza de rozamiento hace que la velocidad disminuya de forma exponencial con el ángulo, y que $V_C = V_B e^{-\mu_d \theta_0}$. Al llegar el cuerpo a C el cohete enciende de nuevo sus motores. c) ¿Cuál debe ser la constante elástica k' para que se produzca una contracción $x' = x$? d) ¿Cuál debe ser el coeficiente de rozamiento estático μ_e para que se quede comprimido el segundo muelle?



Aplicar para: $k = 1000$ N/m, $x = 10$ cm, $a_c = 10$ m/s^2, $d = 5$ m, $d' = 2$ m, $\theta_0 = 100°$ y $\mu_d = 0.4$.

Solución: **I.T.I. 00, I.T.T. 99, 02, 05**

a) Si estudiamos el movimiento del cuerpo desde A hasta B desde el punto de vista de un observador dentro del cohete, la única fuerza que actúa sobre dicho objeto es una fuerza de inercia dirigida verticalmente hacia abajo y constante, debida al movimiento acelerado ascendente del cohete (téngase en cuenta que una vez roto el enganche la fuerza elástica no actúa sobre el objeto, no realiza ningún trabajo ni hay que tener en cuenta ninguna energía potencial elástica). Para el observador dentro del cohete es como si existiese una aceleración de la gravedad efectiva igual a la del cohete pero de sentido contrario: $\vec{g}_{efectiva} = -\vec{a}_c$.



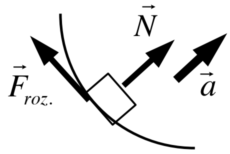
Si ve caer al objeto una distancia d bajo la acción de dicha aceleración efectiva y partiendo del reposo, la velocidad que alcanzará al llegar a B será:

$$v_B = \sqrt{2g_{efectiva}d} = \sqrt{2a_c d} = \boxed{10\ \text{m/s}}$$

Cuando el objeto estaba enganchado al muelle teníamos un equilibrio entre la fuerza elástica y la fuerza de gravedad efectiva lo que con los datos que nos dan nos permite conocer la masa del objeto:

$$kx = mg_{efectiva} = ma_c \quad \Rightarrow \quad m = \frac{kx}{a_c}$$

b) Si al llegar el objeto a B el cohete para sus motores, la gravedad efectiva en el interior del cohete es ahora nula (el cohete no está acelerando). El objeto va a realizar parte de una trayectoria circular debido a la actuación de una fuerza normal y de una fuerza de rozamiento. La fuerza normal por ser perpendicular al desplazamiento del objeto no va a realizar ningún trabajo. El trabajo realizado por la



fuerza de rozamiento cuando el objeto ha recorrido un ángulo $d\theta$ a lo largo de la trayectoria circular, o lo que es lo mismo, una distancia $ds = Rd\theta$, se invertirá en modificar ligeramente su energía cinética con lo que:

$$\left.\begin{array}{r} dW_{roz.} = dE_c = d\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right) = mv\,dv \\ dW_{roz.} = -F_{roz.}ds = -\mu_d N\,ds = -\mu_d m\dfrac{v^2}{R}ds = -\mu_d mv^2 d\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \quad v\,dv = -\mu_d v^2 d\theta$$

Separando variables e integrando, imponiendo las condiciones iniciales de dicho movimiento circular, obtenemos la relación entre la velocidad del objeto y el ángulo θ recorrido:

$$\frac{dv}{v} = -\mu_d\,d\theta \quad \Rightarrow \quad \int_{v_B}^{v}\frac{dv}{v} = -\int_0^{\theta}\mu_d\,d\theta \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{v}{v_B}\right) = -\mu_d\theta \quad \Rightarrow \boxed{v = v_B e^{-\mu_d\theta}}$$

En concreto cuando el objeto llegue al punto C $(\theta = \theta_0)$ tendremos para su velocidad:

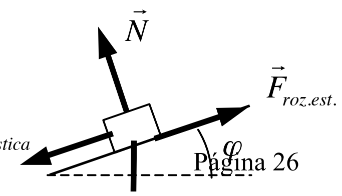
$$\boxed{v_C = v_B e^{-\mu_d\theta_0}}$$

c) Al llegar el objeto a C el cohete enciende de nuevo sus motores de forma que de nuevo tenemos una gravedad efectiva en su interior. Las fuerzas que van a realizar trabajo a medida que el objeto asciende por el plano inclinado un ángulo φ son, por un lado dos fuerzas conservativas: la gravedad efectiva y en último término la fuerza elástica sobre el muelle al contraerse éste, con lo que su trabajo lo podemos escribir como variaciones (con signo menos) en la energía potencial gravitatoria y elástica y por otro lado una fuerza no conservativa: la fuerza de rozamiento. La variación de energía total para el objeto vendrá dada por (cogemos el origen de energía potencial gravitatoria en la parte inferior del plano y el origen de la energía potencial elástica cuando el muelle está con su longitud natural):

$$\left.\begin{array}{r} \Delta E = \left[\dfrac{1}{2}k'x'^2 + mg_{efectiva}(d' + x')\,\mathrm{sen}\,\varphi\right] - \left[\dfrac{1}{2}mv_C^2\right] \\ W_{roz.} = -\mu_d mg_{efectiva}\cos\varphi(d' + x') \\ W_{roz.} = \Delta E \quad , \quad x' = x \quad , \quad \varphi = \theta_0 - \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}k'x^2 + kx(d' + x)(-\cos\theta_0) - kxd\,e^{-2\mu_d\theta_0} = -\mu_d kx\,\mathrm{sen}\theta_0\,(d' + x)$$

$$\Rightarrow \quad k' = \left(\frac{2k}{x}\right)\left[(d' + x)(\cos\theta_0 - \mu_d\,\mathrm{sen}\,\theta_0) + d\,e^{-2\mu_d\theta_0}\right] = \boxed{914\ \mathrm{N/m}}$$

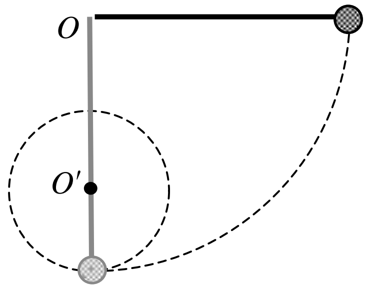


d) Cuando el muelle está comprimido una distancia $x' = x$, planteando el diagrama de fuerzas sobre el objeto y teniendo en cuenta que su aceleración es nula:

$$\left.\begin{array}{l} F_{roz.est.} = F_{elástica} + mg_{efectiva}\,\text{sen}\varphi = k'x - ma_c\cos\theta_0 = k'x - kx\cos\theta_0 \\ F_{roz.est.} \le F_{roz.est.máx.} = \mu_e N = \mu_e mg_{efectiva}\cos\varphi = \mu_e ma_c\,\text{sen}\,\theta_0 = \mu_e kx\,\text{sen}\,\theta_0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad k' - k\cos\theta_0 \le \mu_e k\,\text{sen}\theta_0 \quad \Rightarrow \quad \mu_e \ge \frac{k'}{k\,\text{sen}\theta_0} - \text{ctg}\theta_0 = \boxed{1.10}$$

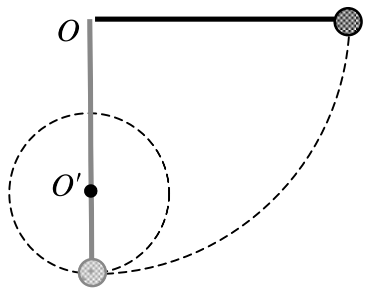
De un soporte O pende un objeto de masa m mediante una cuerda de longitud L. Se le desplaza hasta que la cuerda está extendida horizontalmente, como indica la figura, y se le suelta desde el reposo. a) Calcular la velocidad del objeto cuando está en el punto más bajo de su trayectoria. b) Calcular la tensión de la cuerda en dicho instante. Una espiga horizontal O' situada a $2L/3$ por debajo del punto de suspensión intercepta el movimiento de la cuerda lo que obliga al objeto a realizar un movimiento circular alrededor de la espiga. c) ¿Cuál es la velocidad del objeto cuando alcanza un punto directamente arriba de la espiga? d) Calcular la tensión de la cuerda en dicho momento. e) ¿A qué distancia mínima por debajo del punto de suspensión deberá situarse la espiga para que el objeto realice un movimiento circular completo?



Solución: **I.T.I. 98**

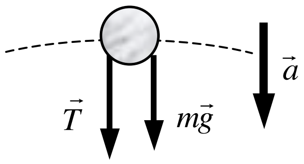
Texto solución

Colgamos una partícula de un hilo inextensible, sin peso apreciable y de 2 m de largo. Apartamos 90° de la posición de equilibrio la partícula, de forma que el hilo quede horizontal. Soltamos la partícula y al pasar por la vertical encuentra un clavo O'. Determinar: a) ¿Cuál debe ser la mínima distancia entre el punto de suspensión O y el clavo O' para que la partícula describa giros completos en torno a O'?, b) si la distancia entre O y O' fuese de 1 m, determinar las coordenadas del punto P en el que la partícula abandona la trayectoria circular alrededor de O', y determine la ecuación de su nueva trayectoria.



Solución: **I.T.I. 97, 00, 03, I.T.T. 97, 00, 03**

a) Si aplicamos la conservación de la energía entre la situación indicada en la figura y la inicial (colocamos el origen de energía potencial gravitatoria en el punto más bajo de la trayectoria de la partícula):



$$mgL = \frac{1}{2}mv^2 + mg(2R) \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2g(L - 2R)$$

Por otro lado: $R = L - d_{OO'} \quad \Rightarrow \quad v^2 = g(4d_{OO'} - 2L)$

Cuando se encuentra en el punto más alto de la trayectoria circular aplicando la segunda ley de Newton:

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad T + mg = ma = m\frac{v^2}{R}$$

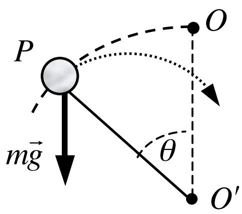
$$\Rightarrow \quad T = mg\left(\frac{v^2}{Rg} - 1\right) = mg\left(\frac{4d_{OO'} - 2L}{L - d_{OO'}} - 1\right) = mg\left(\frac{5d_{OO'} - 3L}{L - d_{OO'}}\right)$$

Como la tensión debe ser positiva o como mínimo nula:

$$T = mg\left(\frac{5d_{OO'} - 3L}{L - d_{OO'}}\right) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 5d_{OO'} - 3L \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d_{OO'} \geq \frac{3}{5}L = 1.2 \text{ m}}$$

b) Si dibujamos el diagrama de fuerzas en un momento en el que la cuerda, que forma un ángulo θ con la vertical, se destensa, abandonando la partícula la trayectoria circular:

$$\left.\begin{aligned} mg\cos\theta = ma_n = m\frac{v^2}{R} \\ R = \frac{L}{2} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{L}{2}g\cos\theta$$



Si aplicamos la conservación de la energía entre la situación indicada en la figura y la inicial (colocamos el origen de energía potencial gravitatoria en el punto más bajo de la trayectoria de la partícula):

$$mgL = \frac{1}{2}mv^2 + mg\left(\frac{L}{2}\right)(1+\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad v^2 = gL(1-\cos\theta)$$

Comparando estos dos resultados:

$$\frac{L}{2}g\cos\theta = gL(1-\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{2}{3}$$

Con lo que la posición de la partícula respecto del punto O' en el momento de destensarse la cuerda será:

$$\vec{r}_P = \left(-\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta,\ \frac{L}{2}\cos\theta\right) = \boxed{\frac{1}{3}\left(-\sqrt{5},2\right)\ \mathrm{m}}$$

Las ecuaciones del movimiento para la partícula a partir de dicho momento serán:

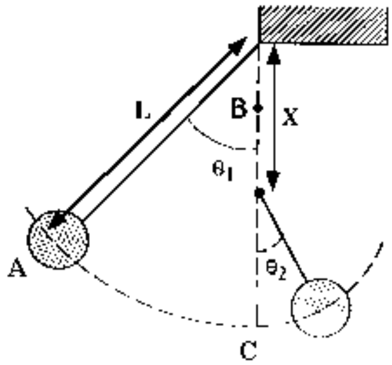
$$x = x_P + v\cos\theta t \quad , \quad y = y_P + v\operatorname{sen}\theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

Despejando el tiempo en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda:

$$y(x) = y_P + \operatorname{tg}\theta(x - x_P) - \left(\frac{g}{2v^2\cos^2\theta}\right)(x - x_P)^2 =$$

$$= \boxed{\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{2}\left(x + \frac{\sqrt{5}}{3}\right) - \frac{27}{16}\left(x + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}$$

Un péndulo de longitud L tiene una lenteja de masa m. Se deja libre desde un cierto ángulo θ_1. La cuerda choca contra un clavo situado a una distancia x por debajo del propio pivote, y se enrolla alrededor de dicho clavo, acortándose la longitud del péndulo. a)Determinar el ángulo θ_2 que forma la cuerda con la vertical cuando se detiene el péndulo. b) Si L = 2m y x = 1.5m calcular el valor mínimo de θ_1 para que la lenteja llegue al punto B situado encima del clavo. c) Calcular el valor de la tensión de la cuerda en los puntos A, B y C.

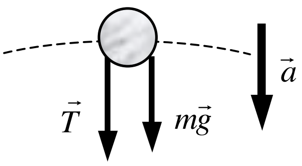


Solución: **I.T.I. 95, 05, I.T.I. 95**

a) Como las únicas fuerzas que actúan sobre la lenteja del péndulo son la tensión que no realiza trabajo y el peso que es una fuerza conservativa, podemos aplicar la conservación de la energía. Tomando el nivel nulo de referencia para la energía potencial gravitatoria en el enganche del péndulo:

$$-mgL\cos\theta_1 = -mg\left(x + L\cos\theta_2\right) \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_2 = \boxed{\cos\theta_1 - \frac{x}{L}}$$

b) Cuando se encuentra en el punto más alto de la trayectoria circular aplicando la segunda ley de Newton:



$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad T + mg = ma = m\frac{v^2}{L-x}$$

$$\Rightarrow \quad T = mg\left[\frac{v^2}{(L-x)g} - 1\right]$$

Como la tensión debe ser positiva o como mínimo nula:

$$T = mg\left[\frac{v_B^2}{(L-x)g} - 1\right] \geq 0 \quad \Rightarrow \quad v_B \geq \sqrt{(L-x)g}$$

aplicando la conservación de la energía entre la situación en A con el ángulo $\theta_{1,mín.}$ y la situación en B con la velocidad mínima $v_{B,mín.}$:

$$-mgL\cos\theta_{1,mín.} = -mg(2x - L) + \frac{1}{2}mv_{B,mín.}^2$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta_{1,mín.} = \frac{5}{2}\frac{x}{L} - \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_{1,mín.} = \boxed{68^\circ}$$

c) En la situación B la tensión resulta ser nula según lo discutido en el apartado anterior. En la situación A el móvil parte del reposo luego no hay aceleración normal y la tensión se verá equilibrada por la componente normal del peso:

$$T_A = mg\cos\theta_{1,mín.} = \boxed{0.375\ mg}$$

En la situación C la velocidad de la lenteja del péndulo la podemos obtener por conservación de la energía:

$$-mgL\cos\theta_{1,mín.} = -mgL + \frac{1}{2}mv_C^2 \quad \Rightarrow \quad v_C^2 = 2gL\left(1-\cos\theta_{1,mín.}\right)$$

y aplicando la segunda ley de Newton:

$$T_C - mg = m\frac{v_C^2}{L-x} \quad \Rightarrow \quad T_C = mg + m\frac{v_C^2}{L-x} = mg + mg\left(\frac{2L}{L-x}\right)\left(1-\cos\theta_{1,mín.}\right) = \boxed{6\ mg}$$

Una cadena de longitud L está suspendida de una tira de goma de longitud natural h que está enganchada al techo y que ejerce una fuerza elástica proporcional al cuadrado de su alargamiento. Por efecto del peso la goma se alarga hasta una longitud $2h$. Si se corta la cadena a una distancia x por debajo del enganche con la goma, cuánto debe valer x para que dicha porción de cadena se eleve: a) hasta permitir que la goma recupere su longitud natural, b) hasta tocar el techo.

Solución: I.T.I. 95, 99, 03, I.T.T. 95, 00, 03

Si llamamos x al alargamiento o contracción de la goma su energía potencial elástica será (tomamos el origen de energía potencial cuando la goma está con su longitud natural):

$$F_{goma,x} = -\frac{dE_p}{dx} = \begin{cases} -kx^2 & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E_p = \begin{cases} \frac{1}{3}kx^3 & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Cuando la cadena colgada de la goma se encuentra en equilibrio ($x = h$):

$$F_{goma} = mg \quad \Rightarrow \quad kh^2 = mg \quad \Rightarrow \quad k = \frac{mg}{h^2} \quad (1)$$

Al cortar la cadena nos quedamos con una trozo de longitud x y masa: $m_x = \left(\frac{x}{L}\right)m$ (2).

La energía inicial de dicho trozo de cadena será (tomamos la energía potencial gravitatoria nula en el techo, y la posición de la cadena viene dada por la posición de su punto medio):

$$E_{inicial} = \frac{1}{3}kh^3 + m_x g\left(-2h - \frac{x}{2}\right)$$

a) Si la cadena sube y se para cuando la goma recupera su longitud natural:

$$E_{final} = m_x g\left(-h - \frac{x}{2}\right)$$

Igualando y teniendo en cuenta los resultados (1) y (2):

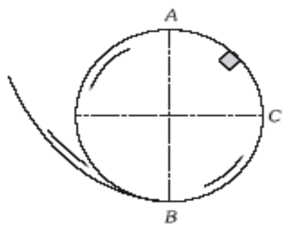
$$E_{inicial} = E_{final} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}kh^3 = m_x gh \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}mgh = \left(\frac{x}{L}\right)mgh \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{1}{3}L}$$

b) Si la cadena sube hasta el techo: $E_{final} = m_x g\left(-\frac{x}{2}\right)$

Igualando y teniendo en cuenta los resultados (1) y (2):

$$E_{inicial} = E_{final} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}kh^3 = 2m_x gh \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}mgh = 2\left(\frac{x}{L}\right)mgh \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{1}{6}L}$$

Lanzamos un cuerpo de 100 g de masa por el aparato de «rizar el rizo», cuya pista circular tiene 10 cm de radio, suponemos que el cuerpo no se encuentra enganchado a la pista y que desliza por ella sin rozamiento. Tomando g =10 m/s^2 calcular: 1) La velocidad crítica en A para que dé vueltas. 2) La velocidad crítica en B para que dé vueltas. 3) La velocidad crítica en C para que dé vueltas. 4) La fuerza que la pista ejerce sobre el cuerpo en los tres puntos citados.



Solución: I.T.I. 04

1) La velocidad crítica en A es aquella para la cual la fuerza normal en dicho punto se anula. La única fuerza que actúa sobre el cuerpo es su peso que está dirigido hacia el centro del rizo:

$$Mg = Ma_n = M\frac{V_A^2}{R} \quad \Rightarrow \quad V_A = \sqrt{gR} = \boxed{1 \text{ m/s}}$$

2) Si en A el cuerpo tiene la velocidad crítica calculada en el anterior apartado, aplicando la conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}MV_A^2 + Mgh_A = \frac{1}{2}MV_B^2 + Mgh_B$$

$$\Rightarrow \quad V_B = \sqrt{V_A^2 + 2g\left(h_A - h_B\right)} = \sqrt{5gR} = \boxed{\sqrt{5} \text{ m/s}}$$

3) Razonando de igual forma para el punto C:

$$\frac{1}{2}MV_A^2 + Mgh_A = \frac{1}{2}MV_C^2 + Mgh_C$$

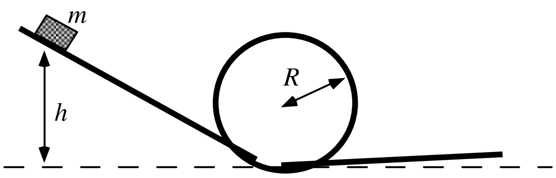
$$\Rightarrow \quad V_B = \sqrt{V_A^2 + 2g\left(h_A - h_C\right)} = \sqrt{3gR} = \boxed{\sqrt{3}\ \text{m/s}}$$

4) En el punto A la normal se anula, según lo discutido en el primer apartado. Aplicando la segunda ley de Newton al cuerpo cuando se encuentra en los puntos B y C tenemos que:

$$N_B - Mg = Ma_n = M\frac{V_B^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N_B = 6Mg = \boxed{6\ \text{N}}$$

$$N_C = Ma_n = M\frac{V_C^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N_C = 3Mg = \boxed{3\ \text{N}}$$

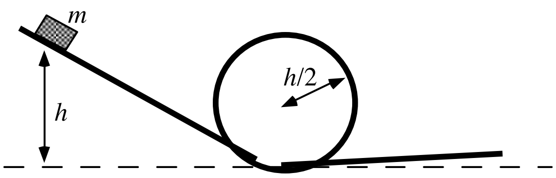
Un vagón de masa m se desliza sin rozamiento por una montaña rusa con un rizo como el indicado en la figura. El rizo circular tiene un radio R. El vagón parte del reposo a una altura h por encima de la parte inferior del rizo. ¿Cúal es la energía cinética del vagón cuando alcanza la parte superior del rizo? ¿Cuál es su aceleración en la parte superior del rizo admitiendo que no se sale de la vía? ¿Cuál es el menor valor de h si el vagón ha de alcanzar la parte superior del rizo sin salirse de la vía?



Solución: **I.T.T. 93, 95, I.I. 04**

Texto solución

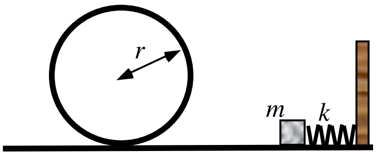
Un pequeño cuerpo comienza a deslizarse desde la altura h de un canalón que comienza inclinado y termina en una semicircunferencia de radio $h/2$. Despreciando el rozamiento hallar: a) ¿En qué momento se separó del canalón? b) Su velocidad en la cúspide de su trayectoria.



Solución: **I.T.I. 96, I.T.T. 96**

Texto solución

Un objeto de 200 g comprime el resorte en A y se suelta desde el reposo. Despreciando el rozamiento determinar la deformación mínima del resorte para que el cuerpo permanezca en contacto con la pista en todo instante.
Datos: $r = 1$ m, $k = 3$ kN/m.



Solución: I.T.I. 94, I.I. 04

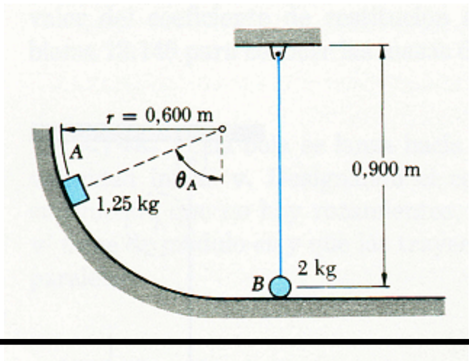
Texto solución

De un hilo de longitud l se cuelga una bola de masa m. ¿A qué velocidad mínima hay que desplazar el punto de suspensión para que la bola comience a moverse en círculo alrededor de este punto? ¿Cuál sería la tensión del hilo cuando la bola pasa por la posición horizontal?

Solución: I.T.I. 96, I.T.T. 96

Texto solución

Se deja en libertad un bloque A cuando $\theta_A = 90°$ y desliza, sin rozamiento, hasta chocar con la bola B. Sabiendo que el coeficiente de restitución en el choque es $e = 0.90$, calcular: a) las velocidades de A y B inmediatamente después del choque, b) la máxima tensión que soporta el hilo que sostiene a B, c) la altura máxima a la que se eleva B, d) la energía perdida en el choque.



Solución: I.T.I. 00, 05

a) Aplicando la conservación de la energía para el cuerpo A desde que se suelta hasta justo antes de chocar con la bola (tomamos el nivel de referencia nulo para la energía potencial gravitatoria en el suelo) calculamos su velocidad de impacto con B:

$$m_A g r = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \quad \Rightarrow \quad v_A = \sqrt{2gr}$$

Aplicando en el choque la conservación del momento lineal y la ecuación del coeficiente de restitución:

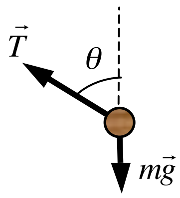
$$\left.\begin{aligned} m_A v_A &= m_A v'_A + m_B v'_B \\ e &= \frac{v'_B - v'_A}{v_A} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} v'_A &= \left(\frac{m_A - e\,m_B}{m_A + m_B}\right) v_A = \boxed{-0.58 \text{ m/s}} \\ v'_B &= (1+e)\left(\frac{m_A}{m_A + m_B}\right) v_A = \boxed{2.51 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

b) Dibujando el diagrama de fuerzas para B para un ángulo θ cualquiera y planteando la segunda ley de Newton para las componentes normales se obtiene el valor de la tensión de la cuerda en función del ángulo y teniendo en cuenta que la velocidad de B es máxima justamente abajo:

$$T - m_B g \cos\theta = m_B a_n = m_B \frac{v_B(\theta)^2}{L}$$

$$\Rightarrow \quad T = m_B \left[\frac{v_B(\theta)^2}{L} + g\cos\theta\right]$$

$$\Rightarrow \quad T_{máx.} \overset{(\theta=0)}{=} m_B \left[\frac{v_B'^2}{L} + g\right] = \boxed{33.56 \text{ N}}$$



c) Aplicando la conservación de la energía para B entre justo después del choque y la posición final de máxima altura:

$$\frac{1}{2} m_B v_B'^2 = m_B g h_B = \quad \Rightarrow \quad h_B = \frac{v_B'^2}{2g} = \boxed{0.32 \text{ m}}$$

d) La variación de energía en el choque será:

$$\Delta\mathcal{E} = \left(\frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2\right) - \left(\frac{1}{2} m_A v_A^2\right) = \boxed{-0.86 \text{ J}}$$