SUPERPOSICIÓN DE M. A.S.

Encontrar la ecuación del movimiento que resulta de la superposición de dos movimientos armónicos simples paralelos cuyas ecuaciones son $x_1 = A_1 \,\text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ y $x_2 = A_2 \,\text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ con $A_1 = 2\text{m}$ y $A_2 = 3\text{m}$. Hacer un gráfico de cada movimiento y del movimiento resultante. Representar sus respectivos fasores.

Solución: **I.T.T. 97, 99, 02, 05**

El desfase entre los dos M.A.S. es:

$$\left.\begin{array}{r} x_1(t) = A_1 \,\text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = A_1 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) \\[2ex] x_2(t) = A_2 \,\text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A_2 \cos(\omega t) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{6}$$

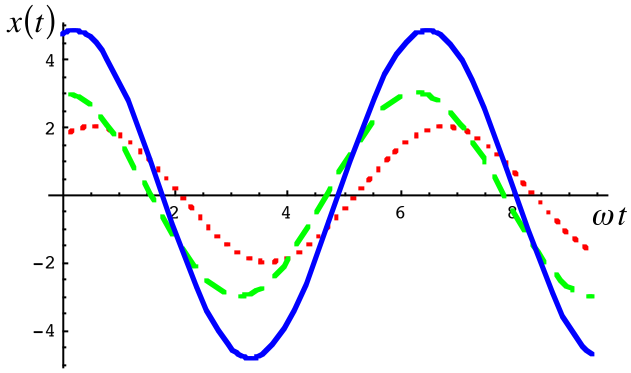
Como los dos M.A.S. tienen la misma frecuencia angular ω el resultado será un M.A.S. con dicha frecuencia angular: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. La amplitud A y la fase inicial φ las podemos obtener fácilmente utilizando los fasores (ver figura):

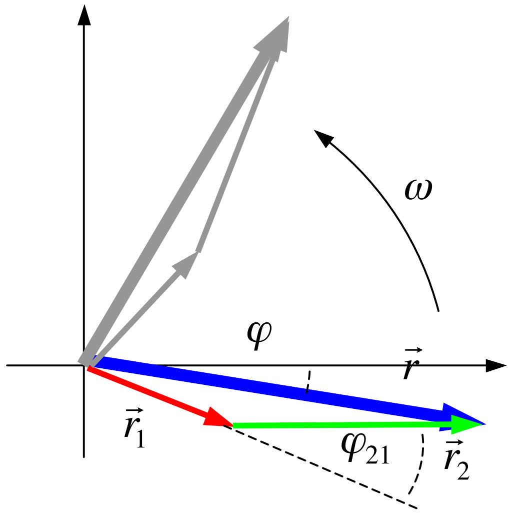
$$A = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}} = \sqrt{(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)\cdot(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi_{21}} = 4.84$$

$$\text{tg}\varphi = \frac{y_0}{x_0} = \frac{y_{1,0} + y_{2,0}}{x_{1,0} + x_{2,0}} = \frac{A_1 \,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 0}{A_1 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + A_2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = -2.083 \text{ rad} = -11.93^{\text{o}}$$

$$\boxed{x(t) = 4.84\cos(\omega t - 2.083) = 4.84\,\text{sen}(\omega t - 0.5122)}$$

La representación gráfica de cada M.A.S. y el diagrama de fasores es:





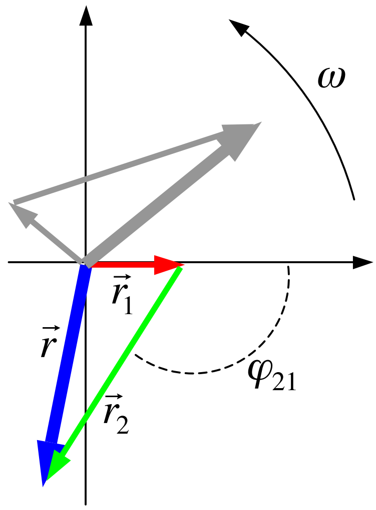
Determinar gráficamente la amplitud de las oscilaciones que surgen a consecuencia de la adición de las siguientes oscilaciones en una misma dirección: a) $x_1 = 3.0\cos(\omega t)$, $x_2 = 8.0\,\text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$, b) $x_1 = 3.0\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$, $x_2 = 5.0\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$, $x_3 = 6.0\,\text{sen}(\omega t + \pi)$.

Solución: **I.T.T. 96, 00, 03**

a) El desfase entre los dos M.A.S. es:

$$\left.\begin{array}{r} x_1(t) = A_1\cos(\omega t) \\ x_2(t) = A_2\,\text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) = A_2\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{2\pi}{3}$$

Como los dos M.A.S. tienen la misma frecuencia angular ω el resultado será un M.A.S. con dicha frecuencia angular: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. La amplitud A y la fase inicial φ las podemos obtener fácilmente utilizando los fasores (ver figura):



$$A = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}} = \sqrt{(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)\cdot(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)} =$$

$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi_{21}} = 7$$

$$\text{tg}\varphi = \frac{y_0}{x_0} = \frac{y_{1,0} + y_{2,0}}{x_{1,0} + x_{2,0}} = \frac{0 + A_2\,\text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}{A_1 + A_2\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = -1.714\ \text{rad} = -98.21^\circ$$

$$\boxed{x(t) = 7\cos(\omega t - 1.714)}$$

b) Los diferentes M.A.S. que debemos combinar son:

$$\left.\begin{array}{r} x_1(t) = A_1\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) \\[2ex] x_2(t) = A_2\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{6}\right) \\[2ex] x_3(t) = A_3\,\text{sen}\left(\omega t + \pi\right) = A_3\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \varphi_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = \dfrac{2\pi}{3} \\[2ex] \varphi_{31} = \varphi_3 - \varphi_1 = \pi \\[2ex] \varphi_{32} = \varphi_3 - \varphi_2 = \dfrac{\pi}{3} \end{array}$$

Como los tres M.A.S. tienen la misma frecuencia angular ω el resultado será un M.A.S. con dicha frecuencia angular: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. La amplitud A y la fase inicial φ las podemos obtener de nuevo utilizando los fasores asociados a los tres M.A.S. (ver figura):

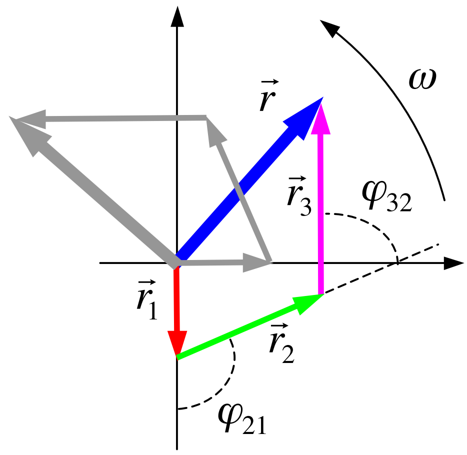
$$A = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}} = \sqrt{(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)\cdot(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)} =$$

$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + 2A_1A_2\cos\varphi_{21} + 2A_1A_3\cos\varphi_{31} + 2A_2A_3\cos\varphi_{32}} = 7$$

$$\text{tg}\varphi = \frac{y_0}{x_0} = \frac{y_{1,0} + y_{2,0} + y_{2,0}}{x_{1,0} + x_{2,0} + x_{2,0}} =$$

$$= \frac{A_1\,\text{sen}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + A_2\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + A_3\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}{A_1\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + A_2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + A_3\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = 0.9038\ \text{rad} = 51.79^{\circ}$$



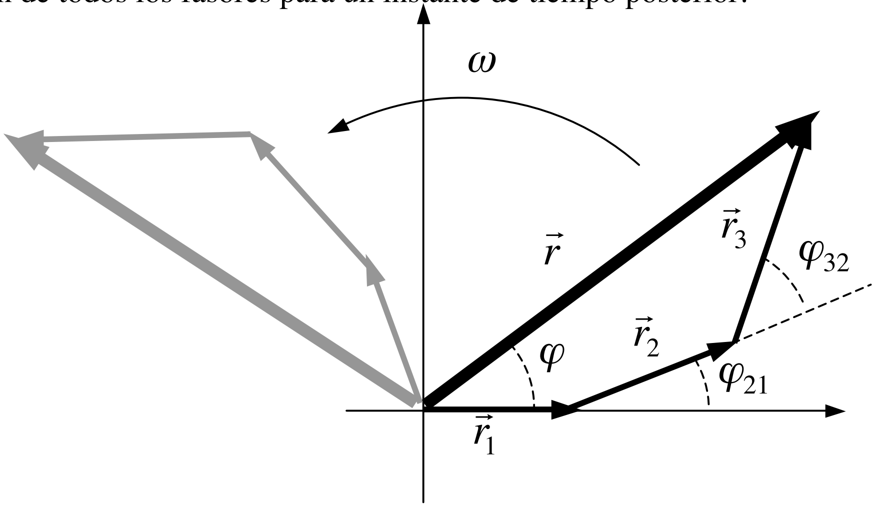
$$\boxed{x(t) = 7\cos(\omega t + 0.9038)}$$

Una partícula que se mueve a lo largo del eje X está sometida a tres movimientos armónicos de la misma frecuencia, siendo las amplitudes respectivas de cada uno 0.30, 0.35 y 0.45 mm y la diferencia de fase entre el segundo y el primero 25º y entre el tercero y el segundo 35º. Determinar la amplitud de la vibración resultante realizada por la partícula, así como su fase relativa al primero de los movimientos armónicos anteriores.

Solución: I.T.T. 01, 04

En vez de trabajar directamente con los tres M.A.S. del enunciado vamos a hacerlo con los fasores correspondientes. Si tomamos el origen de tiempos cuando el primer M.A.S.

alcanza su máxima amplitud (lo que equivale a anular la fase inicial de dicho M.A.S.) los fasores de los tres M.A.S., $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$, mostrarán una orientación inicialmente (para $t = 0$) como se muestra en la figura. El hecho de que los tres fasores $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$ giren con la misma velocidad angular ω da lugar a que el fasor resultante $\vec{r}$ gire también con la misma velocidad angular. En la figura se muestra además de la situación inicial, la disposición de todos los fasores para un instante de tiempo posterior.



La combinación de los tres movimientos circulares es por lo tanto un movimiento circular (el módulo de $\vec{r}$ es constante) con la misma velocidad angular. Su proyección sobre el eje X será por lo tanto un M.A.S. resultado de combinar los tres M.A.S. del enunciado del problema. Si llamamos A_1, A_2, A_3 y A a los módulos de cada uno de los fasores (o lo que es lo mismo a las amplitudes de los M.A.S. asociados):

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) =$$

$$= A_1\cos(\omega t) + A_2\cos(\omega t + \varphi_{21}) + A_3\cos(\omega t + \varphi_{21} + \varphi_{32}) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

La amplitud A del M.A.S. resultante vendrá dada por:

$$A = |\vec{r}\,| = |\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3| = \sqrt{(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)\cdot(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)} =$$

$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{21}) + 2A_2A_3\cos(\varphi_{32}) + 2A_1A_3\cos(\varphi_{21} + \varphi_{32})} = \boxed{1.00\,\text{mm}}$$

y la fase inicial φ la podemos obtener a partir de la situación para $t = 0$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y(0)}{x(0)} = \frac{y_1(0) + y_2(0) + y_3(0)}{x_1(0) + x_2(0) + x_3(0)} =$$

$$= \frac{A_2\operatorname{sen}\varphi_{21} + A_3\operatorname{sen}(\varphi_{21} + \varphi_{32})}{A_1 + A_2\cos\varphi_{21} + A_3\cos(\varphi_{21} + \varphi_{32})} \quad\Rightarrow\quad \varphi = \boxed{32.55^\circ}$$

Trazar y determinar las ecuaciones de la trayectoria de un punto si este se mueve según las ecuaciones: a) $x = a\,\text{sen}(\omega t)$, $y = a\,\text{sen}(2\omega t)$, b) $x = a\,\text{sen}(\omega t)$, $y = a\cos(2\omega t)$.

Solución: **I.T.T. 96, 00, 03**

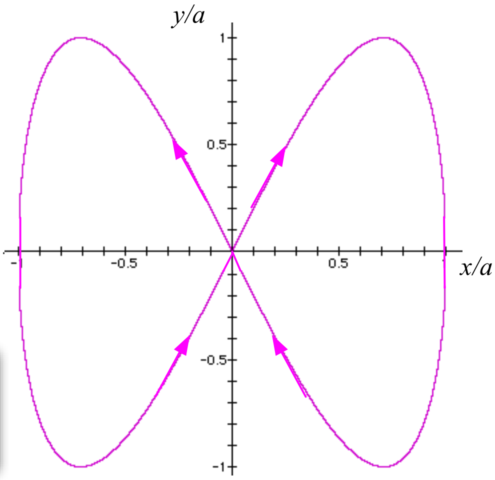
a) En el primer caso:

$$y = a\,\text{sen}(2\omega t) = 2a\,\text{sen}(\omega t)\cos(\omega t) =$$

$$= \pm 2a\,\text{sen}(\omega t)\left[1 - \text{sen}^2(\omega t)\right]^{1/2}$$

Sustituyendo la expresión $\text{sen}(\omega t) = \dfrac{x}{a}$:

$$y = \pm 2x\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y^2 = 4x^2\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}$$



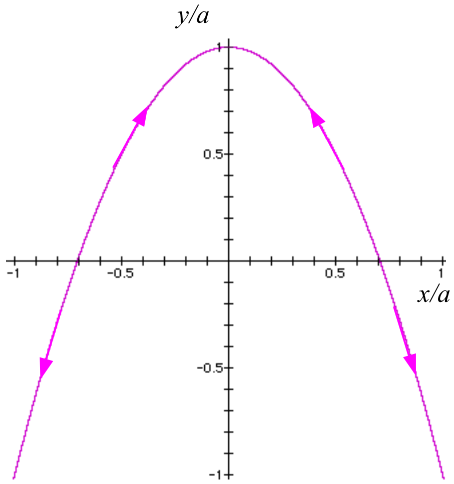
b) En el segundo caso:

$$y = a\cos(2\omega t) = a\left[\cos^2(\omega t) - \text{sen}^2(\omega t)\right] =$$

$$= a\left[1 - 2\,\text{sen}^2(\omega t)\right]$$

Sustituyendo la expresión $\text{sen}(\omega t) = \dfrac{x}{a}$:

$$\boxed{y = a\left[1 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}$$



Para $\delta = 0, \pi/2, \pi$ y $3\pi/2$ encuentre y represente la ecuación de la trayectoria del movimiento resultante de dos M.A.S. perpendiculares cuyas ecuaciones son: $x = A_x\,\text{sen}(\omega t)$ e $y = A_y\,\text{sen}(\omega t + \delta)$, con $A_x = 4\text{m}$ y $A_y = 3\text{m}$.

Solución: **I.T.T. 97, 01, 04**

Para encontrar la ecuación de la trayectoria $y(x)$ tenemos que eliminar el tiempo en las ecuaciones que nos dan:

$$x = A_x\,\text{sen}(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \text{sen}(\omega t) = \frac{x}{A_x} \quad , \quad \cos(\omega t) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(\omega t)} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A_x}\right)^2}$$

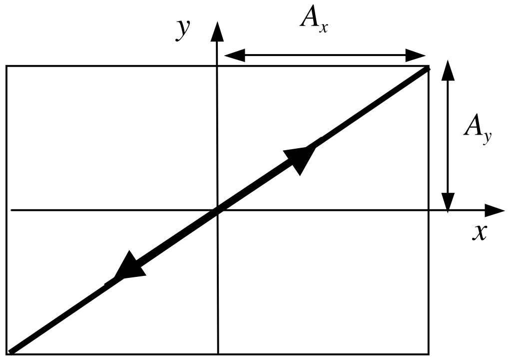
Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$y = A_y \operatorname{sen}(\omega t + \delta) = A_y\left[\operatorname{sen}(\omega t)\cos\delta + \operatorname{sen}\delta\cos(\omega t)\right] = A_y\left[\left(\frac{x}{A_x}\right)\cos\delta + \sqrt{1-\left(\frac{x}{A_x}\right)^2}\operatorname{sen}\delta\right]$$

Para cada uno de los casos que nos piden:

c) $\delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \left(\frac{A_y}{A_x}\right)x}$

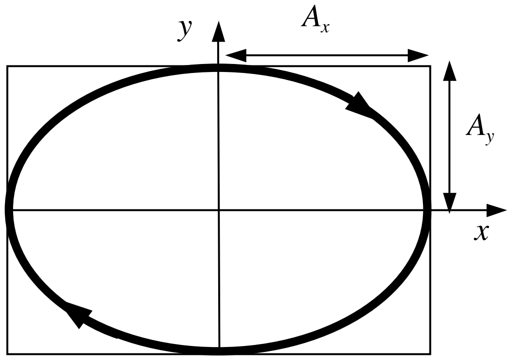
LINEA RECTA



d) $\delta = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad y = A_y\sqrt{1-\left(\frac{x}{A_x}\right)^2}$

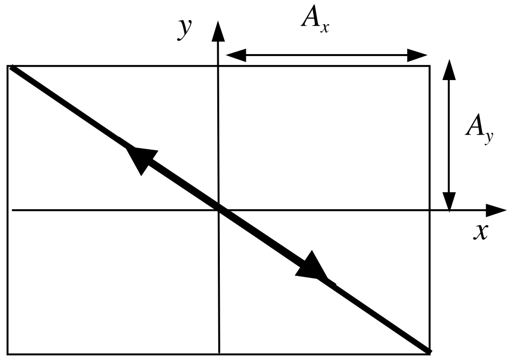
$$\Rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_y}\right)^2 = 1}$$

ELIPSE HORARIA $\left(v_x(t=0) > 0\right)$

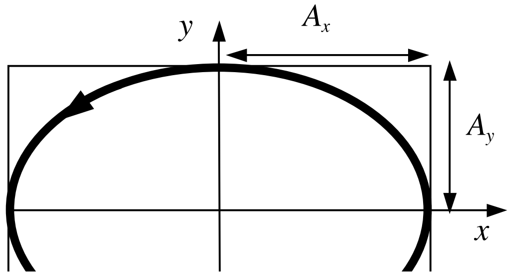


e) $\delta = \pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = -\left(\frac{A_y}{A_x}\right)x}$

LINEA RECTA



f) $\delta = \dfrac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad y = -A_y\sqrt{1-\left(\frac{x}{A_x}\right)^2}$



$$\Rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_y}\right)^2 = 1}$$

ELIPSE ANTIHORARIA $\left(v_x(t=0) > 0\right)$

Dibujar la trayectoria de un cuerpo sometido a la combinación de dos M.A.S. perpendiculares: $x = A\cos(\omega_1 t)$, $y = B\cos\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{4}\right)$ con $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{5}{6}$.

Solución: **I.T.T. 99, 02, 05**

En la figura se muestra la posición de los fasores de los dos M.A.S. para los primeros 10 intervalos temporales. En cada intervalo el primer M.A.S. (círculo inferior) recorre tres sectores angulares y el segundo M.A.S. (círculo a la derecha) sólo dos y medio, de acuerdo con la relación de frecuencias del enunciado. Las proyecciones de dichos fasores a lo largo del eje X y del eje Y respectivamente nos dan las posiciones sucesivas del objeto cuya trayectoria forma una figura de Lissajous (con un punto están representadas las diez primeras posiciones).