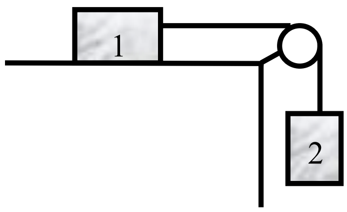
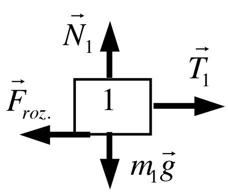
SOLIDO RIGIDO

Dadas las masa de los cuerpos m_1 y m_2 y el coeficiente de rozamiento μ entre m_1 y la superficie horizontal, así como la masa de la polea m_p, que puede considerarse como un disco homogéneo, calcular la aceleración del sistema de la figura.

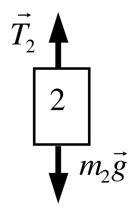


Solución: **I.T.I. 01, 04, I.T.T. 04**

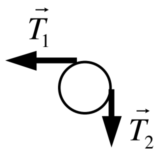
Vamos a tomar el sentido positivo del movimiento unidimensional del bloque 1 hacia la derecha. Para el bloque 2 tomamos el sentido positivo de movimiento hacia abajo. Dado que la cuerda que los une tiene longitud fija las aceleraciones de los dos cuerpos son iguales $a_1 = a_2 = a$. Para la polea tomamos el sentido positivo de giro horario. En la periferia de la polea la aceleración tangencial también será a con lo que su aceleración angular será: $\alpha = \dfrac{a}{R}$, donde R es el radio de la polea. Teniendo en cuenta que la tensión de la cuerda que tira de los cuerpos 1 y 2 es diferente para cada uno de ellos debido a que la polea posee un momento de inercia (no es una polea ideal sin masa) y dibujando el diagrama de fuerzas para los dos bloques y para la polea y aplicando la segunda ley de Newton:



$$T_1 - \mu m_1 g = m_1 a$$



$$m_2 g - T_2 = m_2 a$$



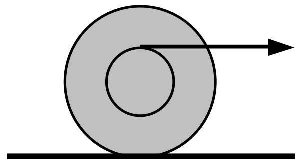
$$T_2 R - T_1 R = I\alpha = \left(\frac{1}{2} m_p R^2\right)\left(\frac{a}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \quad T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m_p a$$

Tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas. La solución es:

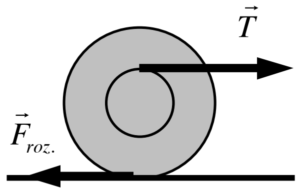
$$\boxed{T_1 = \left(\frac{m_2(1+\mu) + \frac{1}{2}\mu m_p}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_p}\right) m_1 g \qquad a = \left(\frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_p}\right) g \qquad T_2 = \left(\frac{m_1(1+\mu) + \frac{1}{2} m_p}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_p}\right) m_2 g}$$

Un cilindro homogéneo pesado tiene una masa m y un radio R. Se ve acelerado por una fuerza T que se aplica mediante una cuerda arrollada a lo largo de un tambor ligero de radio r unido al cilindro (ver figura). El coeficiente de rozamiento estático es suficiente para que el cilindro ruede sin deslizar. a) Hallar la fuerza de rozamiento. b) Hallar la aceleración del centro del cilindro. c) ¿Es posible escoger r de forma que la aceleración sea mayor que T/m? ¿Cómo? d) ¿Cuál es el sentido de la fuerza de rozamiento que aparece en el apartado c)?



Solución: I.T.I. 01, 04, I.T.T. 04

a) y b) Aplicando la segunda ley de Newton para la traslación y para la rotación.



$$\left.\begin{array}{r} T - F_{roz.} = M\,a_{C.M.} \\ T\,r + F_{roz.}R = I\alpha = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{a_{C.M.}}{R}\right) = \frac{1}{2}MRa_{C.M.} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

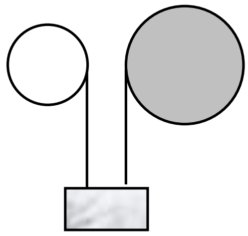
$$\boxed{F_{roz.} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2r}{R}\right)T \qquad a_{C.M.} = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{r}{R}\right)\frac{T}{M}}$$

c) Si la aceleración es mayor que T/M tenemos que.

$$\frac{2}{3}\left(1 + \frac{r}{R}\right) \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r \geq \frac{R}{2}}$$

d) Si sustituimos el resultado anterior en la expresión del módulo de la fuerza de rozamiento nos sale un valor negativo, lo cual es absurdo. Esto implica que en este último caso la fuerza de rozamiento no está orientada hacia la izquierda como se había supuesto en los cálculos iniciales, sino hacia la derecha, en el sentido del movimiento del cilindro. Es lógico, ya que si queremos que la aceleración sea mayor que T/M tenemos que tener una fuerza adicional que empuje hacia la derecha ayudando a la tensión T.

En un sistema como el de la figura constituido por un anillo de radio r_1 = 0.1 m y masa m_1= 5 kg, un cilindro homogéneo de radio r_2 = 0.15 m y masa m_2 = 13 kg y una masa m de 12 kg, soltamos ésta última desde el reposo y la dejamos descender 6 m. Despreciando el rozamiento calcular: a) la velocidad final de la masa m, b) su aceleración, c) las aceleraciones angulares del anillo y del cilindro, d) la tensión en las cuerdas.



Solución: I.T.I. 04, I.T.T. 01, 04

a) Si tomamos el sentido positivo de movimiento hacia abajo para la masa que cae y tomamos sentidos positivos de giro horario para el anillo y antihorario para el cilindro sus velocidades angulares estarán relacionadas con la velocidad de caída del cuerpo: $\omega_1 = \frac{v}{r_1}$ y $\omega_2 = \frac{v}{r_2}$. Tomando como origen de energía potencial gravitatoria cuando se encuentra m en el punto más bajo y aplicando la conservación de la energía:

$$\left.\begin{array}{c} E_{arriba} = mgh \\ E_{abajo} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 \\ I_1 = m_1 r_1^2 \qquad I_2 = \frac{1}{2}m_2 r_2^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} E_{arriba} = E_{abajo} \quad \Rightarrow \quad \ldots \\ v = \sqrt{\dfrac{2mgh}{m + m_1 + \frac{m_2}{2}}} = \boxed{7.75 \text{ m/s}} \end{array}$$

b) En un movimiento uniformemente acelerado tenemos que: $v^2 = v_0^2 + 2ah$ donde h es el recorrido realizado por el cuerpo desde la situación inicial. En nuestro caso la velocidad inicial v_0 es nula y por comparación con el resultado anterior:

$$v^2 = 2\left(\frac{mg}{m + m_1 + \frac{1}{2}m_2}\right)h \quad \Rightarrow \quad a = \frac{mg}{m + m_1 + \frac{m_2}{2}} = \boxed{5.00 \text{ m/s}^2}$$

c) Para el anillo y el cilindro tenemos:

$$\alpha_1 = \frac{a}{r_1} = \boxed{50.0 \text{ rad/s}^2} \qquad \alpha_2 = \frac{a}{r_2} = \boxed{33.4 \text{ rad/s}^2}$$

d) Aplicando la segunda ley de Newton a la rotación del anillo y del cilindro

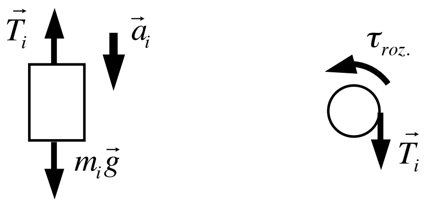
$$T_1 r_1 = I_1 \alpha_1 = \left(m_1 r_1^2\right)\left(\frac{a}{r_1}\right) = m_1 a\, r_1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = m_1 a = \boxed{25.0 \text{ N}}$$

$$T_2 r_2 = I_2 \alpha_2 = \left(\frac{1}{2} m_2 r_2^2\right)\left(\frac{a}{r_2}\right) = \frac{1}{2} m_2 a r_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{1}{2} m_2 a = \boxed{32.5 \text{ N}}$$

Con el fin de determinar el momento de inercia de una polea de 600 mm de radio, se cuelga un bloque de 12 kg de masa por medio de una cuerda inextensible y sin masa. Se observa que el bloque desciende 3 m en 4.6 s cuando parte del reposo. Para eliminar los cálculos de rozamientos en la polea se utiliza otro bloque de 24 kg de masa, que desciende los 3 m en 3.1 s. Suponiendo que el momento de rozamiento no varía calcular el momento de inercia de la polea.

Solución: I.T.I. 03, I.T.T. 03

Dibujando el diagrama de fuerzas para la polea y el bloque y planteando la segunda ley de Newton en los dos casos:



$$m_i g - T_i = m_i a_i \quad \Rightarrow \quad T_i = m_i\left(g - a_i\right) \quad \Rightarrow \quad T_2 - T_1 = m_2\left(g - a_2\right) - m_1\left(g - a_1\right)$$

$$T_i R - \tau_{roz.} = I\alpha_i = I\left(\frac{a_i}{R}\right) \quad \Rightarrow \quad T_2 - T_1 = I\left(\frac{a_2 - a_1}{R^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad I\left(\frac{a_2 - a_1}{R^2}\right) = m_2\left(g - a_2\right) - m_1\left(g - a_1\right) \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\left[m_2\left(g - a_2\right) - m_1\left(g - a_1\right)\right]R^2}{a_2 - a_1}$$

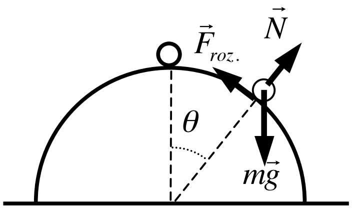
y teniendo en cuenta que según los intervalos de tiempo que nos dan y dado que el movimiento de los bloques es uniformemente acelerado:

$$s = \frac{1}{2} a_i t_i^2 \quad \Rightarrow \quad a_i = \frac{2s}{t_i^2}$$

$$\Rightarrow \quad I = \left[\frac{m_2}{m_1}\left(\frac{g}{2s} - \frac{1}{t_2^2}\right) - \left(\frac{g}{2s} - \frac{1}{t_1^2}\right)\right]\left(\frac{t_1^2 t_2^2}{t_1^2 - t_2^2}\right) m_1 R^2 = \boxed{112.0 \text{ kg m}^2}$$

Una bolita, inicialmente en reposo en el punto más alto de una gran esfera fija, comienza a rodar sin deslizamiento por la superficie de la esfera. Determinar el ángulo desde el polo de la esfera hasta el punto donde la bolita pierde el contacto con aquella.

Solución: I.T.I. 04, I.T.T. 01, 04



Primeramente vamos a aplicar el principio de conservación de la energía para calcular la velocidad de la bolita en función del ángulo a medida que se desplaza sobre la esfera. Vamos a llamar r y R al radio de la bolita y de la esfera respectivamente. A medida que la bolita rueda la velocidad de traslación de su C.M. y su velocidad de rotación están relacionadas por la condición de rodadura: $v_{C.M.} = \omega r$.

Si tomamos el origen de energías potenciales gravitatorias en el ecuador de la esfera (¡la altura que aparece en la expresión de la energía potencial gravitatoria es la del C.M.!):

$$\left.\begin{array}{c} E_{arriba} = mg(R+r) \\ \\ E_{abajo} = mg(R+r)\cos\theta + \frac{1}{2}mv_{C.M.}^2 + \frac{1}{2}I_{C.M.}\omega^2 \\ \\ I_{C.M.} = \frac{2}{5}mr^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} E_{arriba} = E_{abajo} \quad \Rightarrow \quad \ldots \\ \\ v_{C.M.}^2 = \frac{10}{7}g(R+r)(1-\cos\theta) \end{array}$$

Aplicando la segunda ley de Newton y teniendo en cuenta que el C.M. de la bolita realiza un movimiento circular de radio $R + r$ podemos calcular la fuerza normal que aparece en el contacto entre los dos cuerpos :

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{roz.} = m\vec{a}_{C.M.} \quad \Rightarrow \quad mg\cos\theta - N = ma_{\substack{C.M.\\ normal}} = m\frac{v_{C.M.}^2}{(R+r)} = \frac{10}{7}mg(1-\cos\theta)$$

La bolita se despegará de la superficie cuando $N = 0$. Si llamamos θ_{critico} al valor del ángulo en ese momento:

$$mg\cos\theta_{crítico} = \frac{10}{7}mg(1-\cos\theta_{crítico}) \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_{crítico} = \frac{10}{17} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{crítico} = 54^{\circ}}$$

Un disco A gira a una velocidad angular ω_A, otro disco B tiene un momento de inercia 3 veces menor que el A y gira con una velocidad angular dos veces mayor y en sentido contrario. Se deja caer el disco B sobre el A y en el acoplamiento se pierde 315 J en forma de calor. Calcular las energías cinéticas iniciales de ambos discos.

Solución: **I.T.I. 04, I.T.T. 01, 04**

Aplicando la conservación del momento angular en el choque podemos calcular la velocidad angular conjunta con la que giran finalmente los dos discos:

$$I_A\omega_A + I_B\omega_B = (I_A + I_B)\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{I_A\omega_A + I_B\omega_B}{I_A + I_B} = \frac{I_A\omega_A + \left(\frac{1}{3}I_A\right)(-2\omega_A)}{I_A + \left(\frac{1}{3}I_A\right)} = \frac{1}{4}\omega_A$$

La variación de energía cinética de rotación producida en el choque será:

$$\Delta E_c = \left[\frac{1}{2}(I_A + I_B)\omega^2\right] - \left[\frac{1}{2}I_A\,\omega_A^2 + \frac{1}{2}I_B\,\omega_B^2\right] =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(I_A + \frac{1}{3}I_A\right)\left(\frac{1}{4}\omega_A\right)^2\right] - \left[\frac{1}{2}I_A\,\omega_A^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}I_A\right)(-2\omega_A)^2\right] =$$

$$= -\frac{27}{24}I_A\,\omega_A^2 = -315 \text{ J} \quad \Rightarrow \quad I_A\,\omega_A^2 = 280 \text{ J}$$

Las energías iniciales de rotación de los dos discos serían por lo tanto:

$$E_{c.rot.A} = \frac{1}{2}I_A\,\omega_A^2 = \boxed{140 \text{ J}}$$

$$E_{c.rot.B} = \frac{1}{2}I_B\,\omega_B^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}I_A\right)(-2\omega_A)^2 = \frac{2}{3}I_A\,\omega_A^2 = \boxed{186.7 \text{ J}}$$

Dos niños cada uno con una masa de 25 kg están sentados en extremos opuestos de una plancha horizontal de 2.6 m de largo y una masa de 10 kg. La plancha está rotando a 5 rpm con respecto a un eje que pasa por su centro. a) ¿Cuál será la velocidad angular si cada niño se mueve 60 cm hacia el centro de la plancha sin tocar el piso? b) ¿Cuál es el cambio en la energía cinética de rotación del sistema? ¿De dónde viene dicho incremento de energía?

Solución: **I.T.I. 03, I.T.T. 03**

a) El momento angular del sistema no puede variar debido a interacciones internas con lo que:

Antes: $$L = I\,\omega = \left[2m_{niño}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}m_{barra}L^2\right]\omega$$

Después: $$L' = I'\,\omega' = \left[2m_{niño}\left(\frac{L}{2} - d\right)^2 + \frac{1}{12}m_{barra}L^2\right]\omega'$$

Igualando:

$$\Rightarrow \quad \omega' = \frac{\left[2m_{niño}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}m_{barra}L^2\right]}{\left[2m_{niño}\left(\frac{L}{2} - d\right)^2 + \frac{1}{12}m_{barra}L^2\right]}\omega = \boxed{15.0 \text{ rpm} = 1.57 \text{ rad/s}}$$

b) El cambio en la energía cinética de rotación es:

$$\Delta E = E' - E = \frac{1}{2}I'\omega'^2 - \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{I^2}{I'}\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2\left(\frac{I}{I'} - 1\right) =$$

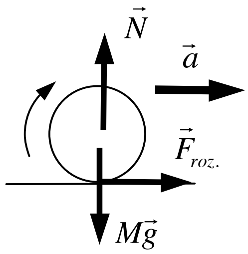
$$= \frac{\left[2m_{niño}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}m_{barra}L^2\right]}{\left[2m_{niño}\left(\frac{L}{2} - d\right)^2 + \frac{1}{12}m_{barra}L^2\right]} m_{niño}d(L-d)\omega^2 = \boxed{24.6 \text{ J}}$$

Dicho incremento de energía cinética de rotación se debe a una disminución similar en la energía potencial interna del sistema debido al trabajo muscular de los niños para acercarse al centro, permaneciendo la energía propia del sistema (energía cinética más potencial interna) constante.

Suponga que a un disco sólido de radio R se le da una velocidad angular ω_0 respecto de un eje que pasa por su centro y después se baja hasta una superficie horizontal áspera (coef. de roz. μ) en donde se suelta. Demostrar: a) que la velocidad angular del disco una vez que se establece el movimiento de rodadura es $\omega_0/3$, b) que la fracción de energía cinética que se pierde desde que se libera el disco hasta que comienza a rodar sin deslizar es de 2/3, c) que el tiempo que tarda en alcanzar dicho movimiento está dado por $\dfrac{R\omega_0}{3\mu g}$, y d) que la distancia que recorre el disco durante dicho tiempo es $\dfrac{R^2\omega_0^2}{18\mu g}$.

Solución: **I.T.I. 03, I.T.T. 03**

a) y c) Dibujando el diagrama de fuerzas, aplicando la segunda ley de Newton para la traslación y la rotación y teniendo en cuenta que inicialmente está deslizando:



$$N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg$$

$$F_{roz.} = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F_{roz.}}{m} = \frac{\mu N}{m} = \mu g$$

$$-F_{roz.}R = I\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{F_{roz.}R}{I} = -\frac{\mu mgR}{\frac{1}{2}mR^2} = -2\frac{\mu g}{R}$$

Aplicando las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado para la rotación y la traslación y teniendo en cuenta las condiciones iniciales del movimiento (ponemos el cronómetro a cero cuando el disco entra en contacto con el plano horizontal) podemos calcular en función del tiempo las velocidades de traslación y rotación:

$$v(t) = v_{inicial} + at = \mu g t$$

$$\omega(t) = \omega_{inicial} + \alpha t = \omega_0 - 2\frac{\mu g}{R}t$$

Podemos calcular en que instante $t = t^*$ se alcanza la condición de rodadura:

$$\left.\begin{aligned} v(t^*) &= \mu g t^* \\ \omega(t^*) &= \omega_0 - 2\frac{\mu g}{R}t^* \end{aligned}\right\} \quad v(t^*) = \omega(t^*)R$$

$$\Rightarrow \quad \mu g t^* = \omega_0 R - 2\mu g t^* \quad \Rightarrow \quad t^* = \boxed{\frac{R\omega_0}{3\mu g}}$$

Las velocidades de traslación y rotación serán en dicho momento:

$$\boxed{v(t^*) = \frac{1}{3}\omega_0 R \qquad \omega(t^*) = \frac{1}{3}\omega_0}$$

A partir de que se ha alcanzado la condición de rodadura las dos velocidades permanecerán constantes (no habrá rozamiento con el plano horizontal), así como la energía del disco.

b) La variación de energía sufrida por el disco debida al rozamiento será:

$$\Delta E = E_{final} - E_{inicial} = \left[\frac{1}{2}m\,v(t^*)^2 + \frac{1}{2}I\,\omega(t^*)^2\right] - \left[\frac{1}{2}I\,\omega_0^2\right] =$$

$$= \left[\frac{3}{4}mR^2\,\omega(t^*)^2\right] - \left[\frac{1}{4}mR^2\omega_0^2\right] = \left[\frac{1}{3}-1\right]\left[\frac{1}{4}mR^2\omega_0^2\right] =$$

$$= -\frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}mR^2\omega_0^2\right] = \boxed{-\frac{2}{3}E_{inicial}}$$

d) La distancia recorrida por el disco durante todo el tiempo que estuvo deslizando será:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\mu g t^2 \quad \Rightarrow \quad x(t^*) = \frac{1}{2}\mu g t^{*2} = \boxed{\frac{R^2\omega_0^2}{18\mu g}}$$

y el ángulo girado por el disco desde el inicio hasta dicho momento será:

$$\theta(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \omega_0 t - \frac{\mu g}{R}t^2 \quad \Rightarrow \quad \theta(t^*) = \omega_0 t^* - \frac{\mu g}{R}t^{*2} = \frac{2R\omega_0^2}{9\mu g}$$

Se puede verificar que la energía perdida por el disco coincide con el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento (téngase en cuenta que la fuerza de rozamiento va a favor de la traslación mientras que el momento de fuerzas de rozamiento va en contra de la rotación):

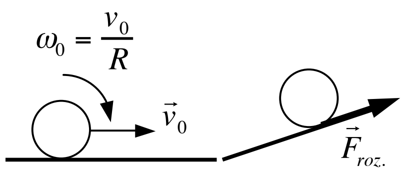
$$W_{roz.} = F_{roz.}x(t^*) - \tau_{roz.}\theta(t^*) = F_{roz.}x(t^*) - \tau_{roz.}\theta(t^*) =$$

$$= \mu mg\left(\frac{R^2\omega_0^2}{18\mu g}\right) - \mu mgR\left(\frac{2R\omega_0^2}{9\mu g}\right) = -\frac{1}{6}mR^2\omega_0^2 = \Delta E$$

Una esfera rueda sin deslizar por un plano horizontal rugoso con velocidad v_0, y empieza a subir por un plano inclinado. a) ¿Cuál es la altura que alcanzará si el plano inclinado es también rugoso y sube rodando sin deslizar? b) ¿Y si el plano fuese liso y subiese deslizando? c) En este segundo caso cuando vuelva al plano inclinado y empiece a moverse por el plano horizontal razone cómo será inicialmente el movimiento ¿se deslizará o rodará? d) ¿Cuál será la velocidad final de traslación que alcanzará la esfera?

Solución: I.T.I. 04, I.T.T. 01

a) A medida que asciende por el plano inclinado disminuye la velocidad de traslación. Si el plano es rugoso aparece una fuerza de rozamiento que suponemos suficientemente intensa como para que sea capaz de disminuir la velocidad angular de la esfera de forma que siga manteniéndose la condición de rodadura $v = \omega R$ (según la figura hemos cogido sentido positivo para la traslación hacia la derecha y sentido positivo de giro el horario). Dicha fuerza de rozamiento actúa por lo tanto introduciendo un momento de fuerzas en sentido antihorario frenando la rotación, como se indica en la figura (¡obsérvese que sin embargo actúa favoreciendo el ascenso de la esfera!). La fuerza de rozamiento en un movimiento de rodadura no realiza trabajo, por lo tanto la energía de la esfera se conserva. Cuando alcance el punto más alto la velocidad de traslación, y consecuentemente también la de rotación, se habrán anulado. Las energías cinéticas de traslación y de rotación se habrán transformado en energía potencial gravitatoria. Tomando como origen de energía potencial gravitatoria la altura del C.M. de la esfera cuando rodaba por el plano horizontal podemos escribir:



$$\frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} I \omega_0^2 = Mgh$$

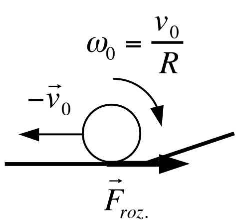
$$\Rightarrow \quad h = \frac{1}{2g}\left(v_0^2 + \frac{I}{M}\omega_0^2\right) = \frac{1}{2g}\left(v_0^2 + \left(\frac{2}{5}R^2\right)\left(\frac{v_0}{R}\right)^2\right) = \boxed{\frac{7}{10}\left(\frac{v_0^2}{g}\right)}$$

b) Si el plano fuese liso y subiese deslizando al no existir fuerza de rozamiento que ejerza un momento de fuerzas el movimiento de rotación horario se va a mantener constante. Cuando llegue al punto más alto la velocidad de traslación se anulará, siendo la velocidad de rotación la misma que tenía inicialmente. En este caso sólo la energía cinética de traslación se ha transformado en energía potencial gravitatoria, con lo que podemos escribir:

$$\frac{1}{2} M v_0^2 = Mgh' \quad \Rightarrow \quad h' = \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{v_0^2}{g}\right)}$$

La altura alcanzada en este caso es inferior a la alcanzada en el apartado a) (lógico ya que en aquél caso la fuerza de rozamiento ayudaba al ascenso de la esfera).

c) En este segundo caso cuando vuelva al plano horizontal se invertirá el proceso y la energía potencial gravitatoria se transformará en energía cinética de traslación. La esfera alcanzará por lo tanto la misma velocidad que la que tenía cuando empezó a subir por el plano pero ahora moviéndose hacia la izquierda. El punto de contacto de la esfera con el plano horizontal está deslizando hacia la izquierda, con lo que aparecerá una fuerza de rozamiento hacia la derecha que contribuirá a frenar el movimiento de traslación hacia la izquierda y a disminuir el



movimiento de rotación horario intentando acompasar de este modo la velocidad de traslación y la de rotación hacia la condición de rodadura.

d) Aplicando la segunda ley de Newton para la traslación y la rotación podemos calcular las respectivas aceleraciones (recordemos que nuestro sentido positivo de traslación ha sido escogido hacia la derecha y el de rotación ha sido escogido horario):

$$F_{roz.} = Ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F_{roz.}}{M} = \frac{\mu M g}{M} = \mu g$$

$$-F_{roz.}R = I_{C.M.}\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{F_{roz.}R}{I_{C.M.}} = -\frac{\mu M g R}{\frac{2}{5}MR^2} = -\frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}$$

Aplicando las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado para la rotación y la traslación y teniendo en cuenta las condiciones iniciales del movimiento (ponemos el cronómetro a cero cuando ha acabado de descender del plano inclinado) podemos calcular en función del tiempo las velocidades de traslación y rotación:

$$v(t) = v_{inicial} + at = -v_0 + \mu g t$$

$$\omega(t) = \omega_{inicial} + \alpha t = \omega_0 - \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}t$$

Podemos calcular en que instante $t = t^*$ se alcanza de nuevo la condición de rodadura:

$$\left.\begin{aligned} v(t^*) &= -v_0 + \mu g t^* \\ \omega(t^*) &= \omega_0 - \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}t^* \end{aligned}\right\} \quad v(t^*) = \omega(t^*)R$$

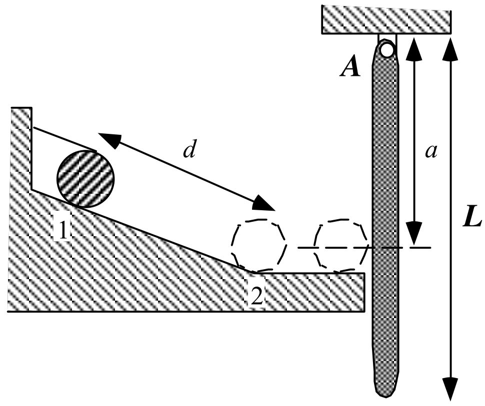
$$\Rightarrow \quad -v_0 + \mu g t^* = \underbrace{\omega_0 R}_{v_0} - \frac{5}{2}\mu g t^* \quad \Rightarrow \quad t^* = \frac{4}{7}\frac{v_0}{\mu g}$$

Las velocidades de traslación y rotación serán en dicho momento:

$$\boxed{v(t^*) = -\frac{3}{7}v_0 \qquad \omega(t^*) = -\frac{3}{7}\omega_0 = -\frac{3}{7}\frac{v_0}{R}}$$

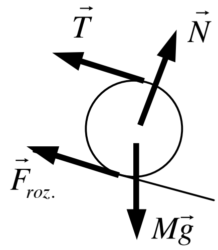
A partir de que se ha alcanzado la condición de rodadura las dos velocidades permanecerán constantes (no habrá rozamiento con el plano horizontal).

En el dibujo de la figura tenemos un cilindro inhomogéneo de radio R, masa M y momento de inercia $I_{CM} = KMR^2$. Dicho cilindro está sujeto por un cable y se encuentra situado sobre un plano inclinado un ángulo φ. a) Determinar el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático para que el cilindro no deslice. b) Suponiendo que el cable se rompa ¿cuál será la velocidad que alcance el cilindro en el punto 2? ¿y su aceleración? c) ¿Cuál debe de ser el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático para que el cilindro no deslice en su recorrido de 1 a 2? d) Si el cilindro choca con la barra de la figura (de masa m) con la misma velocidad con la que llegó al punto 2 de forma que su velocidad se anula, determinar la velocidad del C.M. de la barra después del choque. e) ¿Cuál es la reacción en el punto A sobre la barra justo después del choque?



Solución: **I.T.I. 04, I.T.T. 01**

a) Como el cilindro se encuentra en equilibrio la fuerza total y el momento de fuerzas total que actúan sobre él deben anularse para no producir ningún tipo de aceleración. Aplicando las leyes de Newton:



$$\left.\begin{array}{c} N - Mg\cos\varphi = 0 \\ \\ Mg\,\mathrm{sen}\varphi - T - F_{roz.} = 0 \\ \\ F_{roz.}R - TR = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} N = Mg\cos\varphi \\ \\ F_{roz.} = T = \dfrac{1}{2}Mg\,\mathrm{sen}\varphi \end{array}$$

La fuerza de rozamiento es estática y no puede sobrepasar su valor máximo:

$$F_{roz.} \leq F_{roz.máx.} = \mu_e N = \mu_e Mg\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}Mg\,\mathrm{sen}\,\varphi \leq \mu_e Mg\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_e \geq \frac{1}{2}\mathrm{tg}\varphi}$$

b) Suponemos que en la bajada por el plano inclinado el rozamiento es lo suficientemente importante como para que no deslice y se produzca el movimiento de rodadura. En este caso la fuerza de rozamiento que aparece es estática y no realiza trabajo con lo que podemos aplicar la conservación de la energía. Tomando como origen de energía potencial gravitatoria la altura del C.M. del cilindro cuando se encuentra en 2:

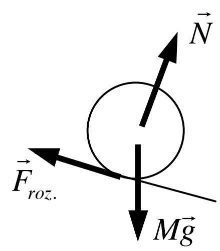
$$\left.\begin{aligned} E_1 &= Mgd\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ E_2 &= \frac{1}{2}Mv_{C.M.}^2 + \frac{1}{2}I_{C.M.}\omega^2 \\ I_{C.M.} &= KMR^2\,, \quad \omega = \frac{v_{C.M.}}{R} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & E_1 = E_2 \quad \Rightarrow \quad \ldots \\ & v_{C.M.} = \boxed{\sqrt{\left(\frac{2}{1+K}\right)gd\,\mathrm{sen}\,\varphi}} \end{aligned}$$

Comparando el resultado obtenido con lo que nos dicen las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado:

$$v_{C.M.}^2 = v_{C.M.,inicial}^2 + 2ad \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v_{C.M.}^2}{2d} = \boxed{\frac{g\,\mathrm{sen}\varphi}{1+K}}$$

c) En el apartado anterior hemos supuesto que la fuerza de rozamiento era lo suficientemente intensa para que no hubiese deslizamiento sino rodadura. Dibujando el diagrama de fuerzas sobre el cilindro y aplicando la segunda ley de Newton a la traslación y a la rotación podemos calcular su valor:

$$\left.\begin{aligned} N - Mg\cos\varphi &= 0 \\ Mg\,\mathrm{sen}\,\varphi - F_{roz.} &= Ma_{C.M.} \\ F_{roz.}R = I\alpha &= \left(KMR^2\right)\left(\frac{a_{C.M.}}{R}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} N &= Mg\cos\varphi \\ a_{C.M.} &= \frac{g\,\mathrm{sen}\,\varphi}{1+K} \\ F_{roz.} &= \left(\frac{K}{1+K}\right)Mg\,\mathrm{sen}\varphi \end{aligned}$$



(el cálculo anterior confirma el resultado sobre la aceleración obtenido en el apartado b))

La fuerza de rozamiento es es $\boxed{\left(\frac{K}{1+K}\right)\mathrm{tg}\,\varphi}$ le sobrepasar su valor máximo:

$$F_{roz.} \le F_{roz.máx.} = \mu_e N = \mu_e Mg\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{K}{1+K}\right)Mg\,\mathrm{sen}\varphi \le \mu_e Mg\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \mu_e \ge \mu_{e,mínimo} =$$

d) Si consideramos el conjunto cilindro-barra no podemos considerar que el momento lineal vaya a conservarse en el choque ya que durante éste el enganche A en el extremo superior ejerce una fuerza intensa para evitar que la parte superior de la barra se despegue del techo. En otras palabras, el choque se produce al mismo tiempo entre tres cuerpos, el cilindro, la barra y el armazón (¡toda la tierra!) al que está enganchada la barra. Si quisiéramos aplicar la conservación del momento lineal tendríamos que tener en cuenta estos tres cuerpos en nuestras ecuaciones.
En cambio si que podemos aplicar la conservación del momento angular si lo calculamos respecto del punto A ya que la fuerza del armazón sobre la barra en el enganche A no produce ningún momento de fuerzas respecto de dicho punto.

Tomando el origen de coordenadas en el punto A y el eje Z hacia fuera del plano de la figura podemos escribir entre justo antes y justo después del choque:

Antes: $\vec{L}^A = \vec{L}^A_{cilindro.} = \vec{L}^{C.M.}_{cilindro.} + \vec{r}_{C.M.,cilindro} \times \vec{P}_{cilindro}$

$$L^A_z = L^A_{cilindro,z} = -I_{C.M.cilindro}\omega_{cilindro} + Mv_{C.M.,cilindro}a$$

Después: $\vec{L}^A = \vec{L}^A_{barra}$

$$L^A_z = L^A_{barra,z} = I_{z,barra.}\omega_{barra} = \left(\frac{1}{3}mL^2\right)\omega_{barra}$$

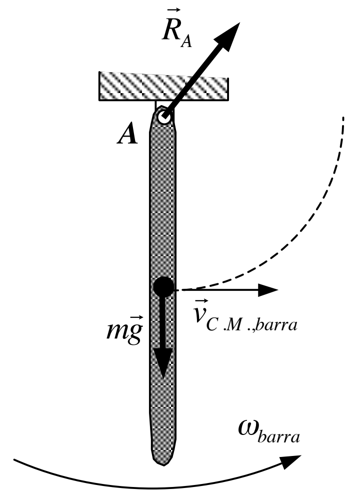
Igualando los momentos angulares:

$$\ldots \quad \Rightarrow \quad \omega_{barra} = 3\left(\frac{M}{m}\right)\left(\frac{a-KR}{L^2}\right)\sqrt{\frac{2gd\operatorname{sen}\varphi}{1+K}}$$

La barra va a comenzar a rotar alrededor del eje Z y la velocidad de su C.M será:

$$v_{C.M.,barra} = \omega_{barra}\left(\frac{L}{2}\right) = \boxed{\frac{3}{2}\left(\frac{M}{m}\right)\left(\frac{a-KR}{L}\right)\sqrt{\frac{2gd\operatorname{sen}\varphi}{1+K}}}$$

e) Teniendo en cuenta que el C.M. de la barra va a realizar un movimiento circular que no va a ser uniforme su aceleración presentará en general dos componentes, una tangencial y una normal. En la situación que se muestra en la figura justamente después del choque si aplicamos la segunda ley de Newton para variables de rotación tenemos que:



$$\sum_i \vec{\tau}_i^A = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad a_t = 0$$

Al ser inicialmente nulo el momento de fuerzas respecto del punto A no habrá en ese instante aceleración angular y consecuentemente la componente tangencial de la aceleración del C.M. de la barra también será nula. En cuanto a la componente normal tenemos que:

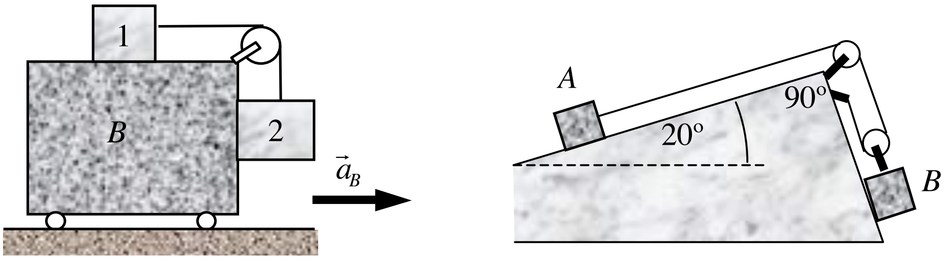
$$a_n = \frac{v^2_{C.M.,barra}}{L/2}$$

Aplicando la segunda ley de Newton para variables de traslación:

$$\vec{R}_A + m\vec{g} = m\vec{a}_{C.M.,barra} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} R_{A,x} = ma_t = 0 \\ R_{A,y} - mg = ma_n = \left(\dfrac{2m}{L}\right) v^2_{C.M.,barra} \\ \Rightarrow \quad R_{A,y} = mg + \left(\dfrac{2m}{L}\right) v^2_{C.M.,barra} = \boxed{mg\left[1 + 9\left(\dfrac{M}{m}\right)^2 \left(\dfrac{a-KR}{L}\right)^2 \left(\dfrac{d}{L}\right)\left(\dfrac{\text{sen}\varphi}{1+K}\right)\right]} \end{cases}$$

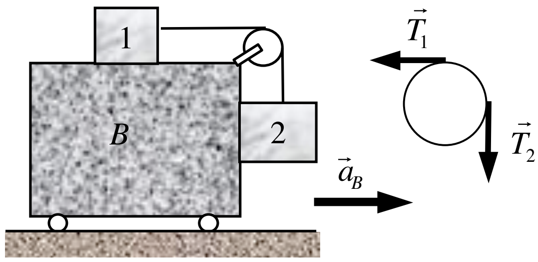
Plantear de nuevo las ecuaciones que resolvían los siguientes problemas de dinámica (ver figura) teniendo en cuenta poleas con masa.



Solución: I.T.I. 03, I.T.T. 03

Al poseer masa las poleas las tensiones a ambos lados de la cuerda que pasa por dichas poleas ya no serán por lo general la misma.

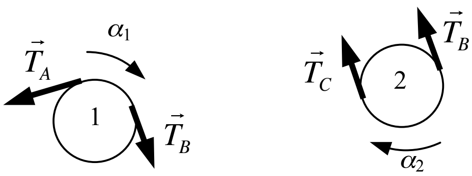
En el caso del carro acelerado, como los bloques se encuentran en reposo respecto del carro, la polea no posee aceleración angular. Aplicando la segunda ley de Newton a la rotación de la polea:



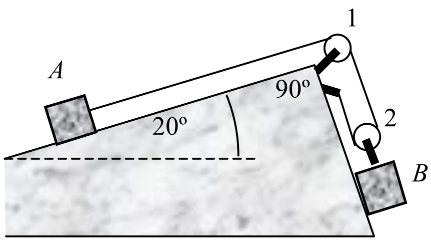
$$T_2 R_{polea} - T_1 R_{polea} = I_{polea}\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2 = T$$

Vemos que en este caso el hecho de que la polea tenga masa no cambia nada de los resultados obtenidos cuando la polea era ideal sin masa.

En el caso del plano inclinado los bloques están acelerados respecto de dicho plano con lo que las poleas tendrán aceleración angular. En vez de una única tensión tendremos en este caso tres tensiones y dos aceleraciones angulares, necesitamos por lo tanto cuatro ecuaciones más para completar el sistema de ecuaciones. Aplicando la segunda ley de Newton a la rotación de cada polea:



$$T_B R_1 - T_A R_1 = I_1 \alpha_1 \qquad T_C R_2 - T_B R_2 = I_2 \alpha_2$$



Las dos ecuaciones que nos faltan las sacamos de la relaciones entre las aceleraciones angulares de las poleas y las aceleraciones de traslación de los bloques. Dichas relaciones son en realidad relaciones entre las aceleraciones angulares de cada polea y la aceleración tangencial en la cuerda que las rodea. En nuestro caso:

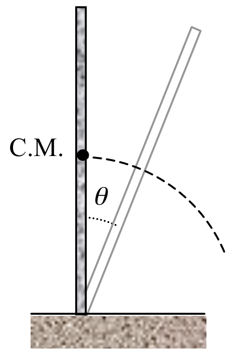
$$a_A = \alpha_1 R_1 \quad , \quad a_B = \alpha_2 R_2$$

Estas ecuaciones junto con: $\qquad T_A - \mu_{din.} m_A g \cos\theta - m_A g \,\mathrm{sen}\,\theta = m_A a_A$

$$a_B = \frac{a_A}{2} \qquad m_B g \cos\theta - T_B - T_C - \mu_{din.} m_B g \operatorname{sen}\theta = m_B a_B$$

completan nuestro sistema de siete ecuaciones con siete incógnitas: a_A, a_B, T_A, T_B, T_C, α_1 y α_2.

La barra de la figura se separa muy ligeramente de la posición vertical de forma que empieza a caer. Calcular en función del ángulo de inclinación θ: a) su velocidad angular, b) su aceleración angular, c) la aceleración de su centro de masas, d) la fuerza de rozamiento y la reacción en el punto de apoyo. Si el punto de contacto de la barra con el suelo comienza a deslizar cuando el ángulo de inclinación es de 30º calcular e) el coeficiente de rozamiento estático con el suelo.

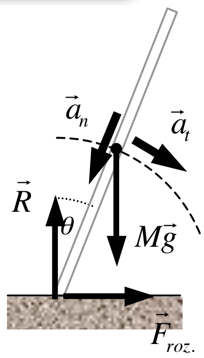


Solución: I.T.I. 03, I.T.T. 03

a) Aplicando la conservación de la energía desde que estaba prácticamente vertical hasta que forma un ángulo θ, y teniendo en cuenta el momento de inercia de la barra respecto a su extremo tenemos que:

$$\left.\begin{array}{c} Mg\dfrac{L}{2} = Mg\dfrac{L}{2}\cos\theta + \dfrac{1}{2}I\omega^2 \\ I = \dfrac{1}{3}ML^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\omega(\theta) = \sqrt{3\left(\dfrac{g}{L}\right)(1-\cos\theta)}}$$

b) Dibujando el diagrama de fuerzas sobre la barra y teniendo en cuenta que su centro de masas está realizando un movimiento circular de radio $r_{giro} = \dfrac{L}{2}$ y que por lo tanto su aceleración tendrá una parte tangencial y otra normal, al aplicar la segunda ley de Newton para el movimiento angular tenemos que:



$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad Mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta = \left(\frac{1}{3}ML^2\right)\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha(\theta) = \frac{3}{2}\left(\frac{g}{L}\right)\operatorname{sen}\theta}$$

c) Con lo cual las aceleraciones normal y tangencial de su centro de masas serán:

$$\boxed{a_n = \omega^2 r_{giro} = \omega^2\left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)g(1-\cos\theta) \qquad a_t = \alpha\, r_{giro} = \alpha\left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)g\operatorname{sen}\theta}$$

d) Planteando la segunda ley de Newton para las fuerzas del diagrama anterior:

$$\sum_i \vec{F}_i = M\vec{a} = M(\vec{a}_t + \vec{a}_n) \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} F_{roz.} = M(a_t\cos\theta - a_n\operatorname{sen}\theta) \\ R - Mg = M(-a_t\operatorname{sen}\theta - a_n\cos\theta) \end{array}\right.$$

Sistema cuya solución es:

$$\boxed{F_{roz.} = \frac{3}{2}Mg\,\text{sen}\,\theta\left(\frac{3}{2}\cos\theta - 1\right) \qquad R = Mg\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\cos\theta\left(\frac{3}{2}\cos\theta - 1\right)\right]}$$

e) Si la barra comienza a deslizar cuando $\theta = \theta_d = 30^{\circ}$, entonces en dicho instante la fuerza de rozamiento, que era estática, habrá alcanzado su máximo valor permitido:

$$F_{roz.}(\theta_d) = \mu_e R(\theta_d) \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}Mg\,\text{sen}\,\theta_d\left(\frac{3}{2}\cos\theta_d - 1\right) = \mu_e Mg\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\cos\theta_d\left(\frac{3}{2}\cos\theta_d - 1\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \mu_e = \frac{6\,\text{sen}\,\theta_d\left(\frac{3}{2}\cos\theta_d - 1\right)}{1 + 6\cos\theta_d\left(\frac{3}{2}\cos\theta_d - 1\right)} = \boxed{0.35}$$

Calcular el periodo de las pequeñas oscilaciones para una bolita de radio *r* oscilando en la parte inferior de una cavidad esférica de radio *R*.

Solución: I.T.I. 03, I.T.T. 03

Llamemos θ_0 a la pequeña desviación angular inicial desde la que se suelta la bolita. Tomando para simplificar como nivel nulo de energía potencial la situación de mínima altura de la bolita y aplicando la conservación de la energía entre dicha situación y la situación inicial:

$$\left.\begin{array}{r} E_{inicial} = mgR(1 - \cos\theta_0) \approx mgR\left(\frac{1}{2}\theta_0^2\right) \\ E_{abajo} = \frac{1}{2}mv_{abajo.}^2 + \frac{1}{2}I_{C.M.}\left(\frac{v_{abajo}}{r}\right)^2 \\ I_{C.M.} = \frac{2}{5}mr^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} E_{inicial} = E_{abajo} \quad \Rightarrow \quad \ldots \\ v_{abajo} = \left(\frac{5}{7}gR\right)^{1/2}\theta_0 \end{array}$$

Donde hemos utilizado las aproximaciones:

$$\left.\begin{array}{r} \text{sen}\,\theta \underset{\theta \ll 1}{\longrightarrow} \theta \\ (1+\delta)^n \underset{\delta \ll 1}{\longrightarrow} 1 + n\delta \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \left(1 - \text{sen}^2\theta\right)^{1/2} \approx \left(1 - \theta^2\right)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$$

La bolita realiza un movimiento oscilatorio de amplitud angular θ_0. La velocidad angular de dicho movimiento es máxima cuando la bolita pasa por el punto de equilibrio, es decir por su punto más bajo, con lo que teniendo en cuenta que el centro de masas de la bolita realiza un movimiento circular de radio $(R-r)$:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{máxima} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{abajo} = \frac{v_{abajo}}{(R-r)} = \left(\frac{5}{7}gR\right)^{1/2}\frac{\theta_0}{(R-r)}$$

Y recordando que en un movimiento armónico simple la máxima velocidad está relacionada con la amplitud a través de la frecuencia angular ω del movimiento:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{máxima} = \omega\theta_0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{(R-r)}\left(\frac{5}{7}gR\right)^{1/2}$$

con lo que el periodo de las pequeñas oscilaciones vendrá dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \boxed{2\pi(R-r)\left(\frac{5}{7}gR\right)^{-1/2}}$$

Un aro, un cilindro homogéneo y una esfera homogénea todos de masa m y radio r ruedan sin deslizar por un plano inclinado un ángulo φ. Determinar: a) cuál de estos cuerpos bajará más rápidamente y cuales serán las aceleraciones respectivas. b) el valor mínimo del coeficiente de rozamiento compatible con el movimiento de rodadura.

Solución: I.T.I. 03, I.T.T. 03

a) Si no hay deslizamiento la fuerza de rozamiento que aparece es estática y no realiza trabajo con lo que podemos aplicar la conservación de la energía. Tomando como origen de energía potencial gravitatoria la altura del C.M. del cuerpo cuando ha descendido una distancia d por el plano inclinado:

$$\left.\begin{array}{c} E_{arriba} = Mgd\,\text{sen}\varphi \\ E_{abajo} = \frac{1}{2}Mv_{C.M.}^2 + \frac{1}{2}I_{C.M.}\omega^2 \\ I_{C.M.} = KMR^2 \;, \quad \omega = \frac{v_{C.M.}}{R} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} E_{arriba} = E_{abajo} \quad \Rightarrow \quad \ldots \\ v_{C.M.}^2 = \left(\frac{2}{1+K}\right)gd\,\text{sen}\varphi \end{array}$$

Teniendo en cuenta que en un movimiento uniformemente acelerado: $v_{final}^2 = v_{inicial}^2 + 2ad$, comparando con el resultado anterior tenemos que la aceleración de bajada del cuerpo es:

$$a = \frac{g\,\text{sen}\varphi}{1+K}$$

Aquél cuerpo cuyo momento de inercia tenga un coeficiente K menor será el que descienda con mayor aceleración, en nuestro caso es la esfera:

Para el aro: $K = 1 \quad \Rightarrow \quad a_{aro} = \boxed{\frac{1}{2} g \,\text{sen}\varphi}$

Para el cilindro: $K = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a_{cilindro} = \boxed{\frac{2}{3} g \,\text{sen}\varphi}$

Para la esfera: $K = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad a_{esfera} = \boxed{\frac{5}{7} g \,\text{sen}\varphi}$

b) La fuerza de rozamiento es la responsable de la aceleración angular de estos cuerpos, con lo que:

$$F_{roz.} R = I\alpha = KMR^2\alpha \quad \Rightarrow \quad F_{roz.} = KMR\alpha = KMa = \left(\frac{K}{1+K}\right) Mg \,\text{sen}\varphi$$

Como esta fuerza de rozamiento es estática tendrá un valor máximo:

$$F_{roz.} \leq F_{roz.máx.} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{K}{1+K}\right) Mg \,\text{sen}\varphi \leq \mu_{est.} N = \mu_{est.} M \cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \mu_{est.} \geq \left(\frac{K}{1+K}\right) g \,\text{tg}\,\varphi$$

Con lo que:

Para el aro: $K = 1 \quad \Rightarrow \quad \mu_{est.mínimo} = \boxed{\frac{1}{2} g \,\text{tg}\varphi}$

Para el cilindro: $K = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mu_{est.mínimo} = \boxed{\frac{1}{3} g \,\text{sen}\varphi}$

Para la esfera: $K = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad \mu_{est.mínimo} = \boxed{\frac{2}{7} g \,\text{sen}\varphi}$

Los cuerpos del problema anterior deben realizar un rizo vertical de radio R. ¿Desde que altura mínima h deben dejarse caer para que consigan realizarlo?

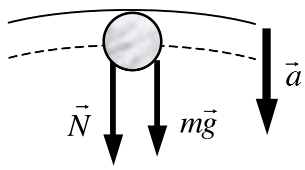
Solución: I.T.I. 03, I.T.T. 03

Vamos a aplicar la conservación de la energía entre la situación inicial a altura h y la situación en la parte más alta del rizo, donde tomamos el origen de energía potencial gravitatoria (a altura $(2R-r)$ sobre el suelo).

$$\left.\begin{aligned} & E_{inicial} = Mg\left[h-(2R-r)\right] \\ & E_{final} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{C.M.}\omega^2 \\ & I_{C.M.} = KMR^2\,, \quad \omega = \frac{v}{R} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} & E_{inicial} = E_{final} \quad \Rightarrow \quad \ldots \\ & h = \left(\frac{1+K}{2g}\right)v^2 + (2R-r) \end{aligned}$$

En la cima del rizo si dibujamos el diagrama de fuerzas y planteamos la segunda ley de Newton, teniendo en cuenta que el centro de masas del cuerpo realiza un movimiento circular de radio $R-r$:

$$\left.\begin{aligned} & mg + N = ma = m\frac{v^2}{R-r} \\ & N \geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad v \geq \sqrt{g(R-r)}$$



Con lo que:

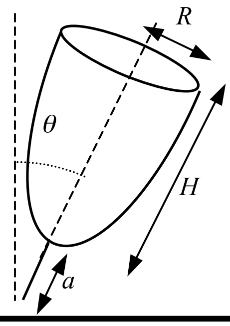
$$h_{mínima} = \left(\frac{1+K}{2g}\right)v^2_{mínima} + (2R-r) = \left(\frac{1+K}{2}\right)(R-r) + (2R-r)$$

Para el aro: $K=1 \quad \Rightarrow \quad h_{mínima} = \boxed{(3R-2r)}$

Para el cilindro: $K=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad h_{mínima} = \boxed{\frac{1}{4}(11R-7r)}$

Para la esfera: $K=\frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad h_{mínima} = \boxed{\frac{1}{10}(27R-17r)}$

Un trompo con forma de paraboloide de masa M, altura H y radio R está girando alrededor de su eje de simetría con una velocidad angular ω. Dicho eje de simetría forma un ángulo θ con la vertical. Calcular: a) el momento angular del trompo respecto del punto de apoyo debido solamente al movimiento de rotación alrededor de su eje de simetría, b) la velocidad angular Ω de precesión del eje de simetría alrededor del eje vertical.



Solución: **I.T.I. 03, I.T.T. 03**

a) Si llamamos Z al eje de rotación del paraboloide, colocamos el origen de coordenadas en el vértice y dividimos el paraboloide en rodajas de espesor dz la cantidad de masa contenida en una de las rodajas será:

$$dm = \rho\pi r^2 dz = \rho\pi\left(\frac{R^2}{H}z\right)dz$$

La ecuación del paraboloide nos da la relación entre la coordenada z y el radio r de las rodajas que hemos utilizado en el cálculo anterior:

$$\left.\begin{array}{l} z = kr^2 \\ \\ H = kR^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{H}{R^2} \quad \Rightarrow \quad r = \left(\frac{R^2}{H}z\right)^{1/2}$$

El momento de inercia respecto del eje Z será la suma de los momentos de inercia de todas las rodajas:

$$I_z = \int dI_z = \int \frac{1}{2}dm\,r^2 = \int_0^H \frac{1}{2}\rho\pi\left(\frac{R^4}{H^2}\right)z^2 dz = \frac{1}{6}\rho\pi R^4 H$$

Para escribir el resultado en función de la masa del paraboloide:

$$M = \int dm = \int_0^H \rho\pi\left(\frac{R^2}{H}z\right)dz = \frac{1}{2}\rho\pi R^2 H \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{2M}{\pi R^2 H}$$

Sustituyendo en la expresión del momento de inercia: $I_z = \frac{1}{3}MR^2$

El momento angular debido al movimiento de rotación alrededor de su eje de simetría será:

$$L = I_z\omega = \boxed{\frac{1}{3}MR^2\omega}$$

b) La frecuencia angular del movimiento de precesión viene dada por: $\Omega = \dfrac{Mgb}{L}$, donde b es la distancia del centro de masas del giróscopo al punto de apoyo, en nuestro caso $b = z_{C.M.} + a$.

El volumen de cada una de las rodajas es:

$$dV = \pi r^2 dz = \pi\left(\frac{R^2}{H}z\right)dz$$

El volumen total del paraboloide es:

$$V = \int dV = \int_0^H \pi\left(\frac{R^2}{H}z\right)dz = \frac{1}{2}\pi R^2 H$$

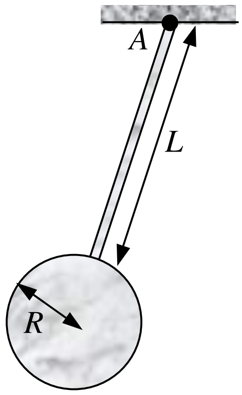
La coordenada z del C.M. será:

$$\int z\,dV = \int_0^a \frac{1}{2}\pi\left(\frac{R^2}{H}\right)z^2 dz = \frac{1}{6}\pi R^2 H^2$$

$$\Rightarrow \quad z_{C.M.} = \frac{\int z\,dV}{\int dV} = \boxed{\frac{2}{3}H}$$

Con lo que la frecuencia de precesión será: $\Omega = \dfrac{Mg\left(\frac{2}{3}H + a\right)}{L} = \boxed{\dfrac{g(2H + 3a)}{R^2\omega}}$

Tenemos un péndulo formado por un disco homogéneo de radio R y masa M y una barra también homogénea de longitud L y masa m unidos entre sí. Calcular: a) la posición del C.M. de dicho péndulo, b) su momento de inercia respecto del eje de rotación que pasa por el enganche A, c) el periodo de las pequeñas oscilaciones alrededor de la vertical. d) Si se suelta desde un ángulo θ_0 con la vertical, calcular la fuerza que el enganche A realiza sobre dicho péndulo cuando pase por la vertical.



Solución: **I.T.I. 03, I.T.T. 03**

a) Podemos dividir el péndulo en dos piezas sencillas: una barra rectilínea y un disco con sus centros de masa a $L/2$ y a $(L+R)$ respectivamente del enganche en A. El centro de masas del péndulo se encontrará por tanto a una distancia de dicho enganche dada por:

$$\Rightarrow \quad l_{C.M.} = \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 + m_2} = \boxed{\frac{m\left(\frac{L}{2}\right) + M(L+R)}{m + M}}$$

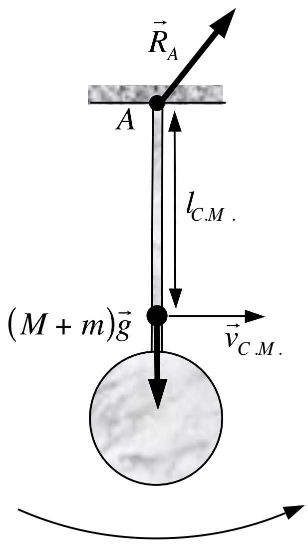
b) El momento de inercia respecto de un eje que pase por A será la suma de los momentos de inercia de la barra y del disco, y para este último utilizamos el teorema de Steiner:

$$I_A = I_{barra,A} + I_{disco,A} = I_{barra,A} + I_{\substack{disco,\\ centro}} + M(L+R)^2 = \boxed{\frac{1}{3}mL^2 + \frac{1}{2}MR^2 + M(L+R)^2}$$

c) El periodo de oscilación para pequeñas amplitudes viene dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{M_{total}\, g\, l_{C.M.}}{I_A}}} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{I_A}{(M+m)g\, l_{C.M.}}}}$$

d) Teniendo en cuenta que el C.M. del péndulo va a realizar un movimiento circular que no va a ser uniforme su aceleración presentará en general dos componentes, una tangencial y una normal. En la situación que se muestra en la figura, justamente en la situación vertical, si aplicamos la segunda ley de Newton para variables de rotación tenemos que:



$$\sum_i \vec{\tau}_{i,A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad a_t = 0$$

Al ser inicialmente nulo el momento de fuerzas respecto del punto A no habrá en ese instante aceleración angular y consecuentemente la componente tangencial de la aceleración del C.M. del péndulo también será nula. En cuanto a la componente normal tenemos que:

$$a_n = \frac{v_{C.M}^2}{l_{C.M.}}$$

Aplicando la conservación de la energía entre la situación inicial y la mostrada en la figura, y tomando el nivel nulo de energía potencial gravitatoria en esta última situación:

$$\left.\begin{array}{l} E_{inicial} = (M+m)gl_{C.M.}(1-\cos\theta_0) \\ E_{abajo} = \dfrac{1}{2}I_A\left(\dfrac{v_{C.M.}}{l_{C.M.}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{I_A}{l_{C.M.}}\right)a_n \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} E_{inicial} = E_{abajo} \quad \Rightarrow \quad \ldots \\ a_n = \dfrac{2(M+m)gl_{C.M.}^2(1-\cos\theta_0)}{I_A} \end{array}$$

Aplicando la segunda ley de Newton para variables de traslación:

$$\vec{R}_A + (M+m)\vec{g} = (M+m)\vec{a}_{C.M.} \quad \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} R_{A,x} = (M+m)a_t = \boxed{0} \\ R_{A,y} - (M+m)g = (M+m)a_n \\ \quad \Rightarrow \quad R_{A,y} = (M+m)(g+a_n) = \boxed{\left[1 + \dfrac{2(M+m)l_{C.M.}^2(1-\cos\theta_0)}{I_A}\right](M+m)g} \end{array}\right.$$

La reacción en A no tiene por lo tanto componente horizontal justamente en dicho momento.

Una bala de masa m_{bala} y velocidad v golpea la varilla del péndulo del problema anterior (cuando éste se encontraba vertical) a una distancia a de A, ($a < L$), y se incrusta en ella. a) Encontrar el momento angular del sistema respecto a A inmediatamente antes y después de que la bala dé contra la varilla. b) Determinar el momento lineal inmediatamente antes y después de la colisión. c) ¿Bajo que condiciones se conservarán el momento lineal y el angular?

Solución: I.T.I. 03, I.T.T. 03

a) Podemos aplicar la <u>conservación del momento angular</u> entre justamente antes y después del choque si lo calculamos respecto del punto A ya que las únicas fuerzas externas que actúan sobre nuestro sistema (bala más péndulo) son la reacción en A y las fuerzas de gravedad que no producen ningún momento de fuerzas respecto de dicho punto al pasar sus líneas de acción por él en el momento del choque. Tomando el origen de coordenadas en el punto A y el eje Z hacia fuera del plano de la figura podemos escribir entre justo antes y justo después del choque:

Antes: $L_A = L_{bala,A} = m_{bala} v\, a$

Después: $L'_A = L_{sistema,A} = I_{sistema,A}\,\omega = \left(I_{pendulo,A} + m_{bala}a^2\right)\omega$

Igualando obtenemos la velocidad angular justo después del choque:

$$\omega = \frac{m_{bala} v\, a}{I_{pendulo,A} + m_{bala}a^2}$$

b) En lo que respecta al momento lineal del sistema

Antes: $P = p_{bala} = \boxed{m_{bala} v}$

Después: $P' = P_{sistema} = M_{sistema}V_{C.M.} = \left(M_{péndulo} + m_{bala}\right)\omega\, l_{C.M.} =$

$$= \left(M_{péndulo}l_{péndulo} + m_{bala}\,a\right)\omega =$$

$$= \boxed{\left(M_{péndulo}l_{péndulo} + m_{bala}a\right)\left(\frac{m_{bala} v\, a}{I_{pendulo,A} + m_{bala}a^2}\right)}$$

donde $l_{péndulo}$ es la distancia del centro de masas del péndulo al punto *A*.

c) No podemos considerar que el momento lineal vaya a conservarse en el choque ya que durante éste el enganche *A* en el extremo superior del péndulo ejerce una fuerza intensa para evitar que la parte superior de la varilla se despegue del techo (esta fuerza intensa comunica un impulso apreciable a nuestro sistema durante el breve tiempo que dura el impacto, impulso que se traduce en una variación del momento lineal). En otras palabras, el choque se produce al mismo tiempo entre tres cuerpos, la bala, el péndulo y el armazón (¡toda la tierra!) al que está enganchado el péndulo. Si quisiéramos aplicar la conservación del momento lineal tendríamos que tener en cuenta estos tres cuerpos en nuestras ecuaciones.
El momento lineal se conservará en el caso en que $P = P'$:

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{M_{péndulo}l_{péndulo}a + m_{bala}a^2}{I_{pendulo,A} + m_{bala}a^2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad M_{péndulo}l_{péndulo}a = I_{pendulo,A}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{I_{pendulo,A}}{M_{péndulo}l_{péndulo}} = \boxed{\frac{\frac{1}{3}mL^2 + \frac{1}{2}MR^2 + M\left(L+R\right)^2}{m\left(\frac{L}{2}\right) + M\left(L+R\right)}}$$

Sólo si la bala impacta a esta distancia se conservará el momento lineal (no se produce un aumento brusco de la reacción en *A*, y no se comunica impulso al sistema)