ROZ. VISCOSO:

Una lancha de masa m navega en un lago con velocidad v_0. En el instante $t = 0$ se desconecta el motor. Suponiendo que la fuerza de resistencia del agua al movimiento de la lancha es proporcional a la velocidad determinar: a) la velocidad en función del tiempo, b) la velocidad en función de la distancia recorrida, así como la distancia total recorrida hasta pararse, c) la velocidad media de la lancha en el transcurso del tiempo en el que la velocidad disminuye de v_0 a $v_0/2$.

Solución: I.T.I. 97, 00

Texto solución

Determinar en función del tiempo la velocidad de un punto material de masa m que parte del reposo y está sometido a una resistencia viscosa $\vec{F}_{roz.} = -k\vec{v}$ y a una fuerza constante $\vec{F}$.

Solución: I.T.I. 97

Texto solución

Las partículas pequeñas esféricas experimentan una fuerza de resistencia viscosa dada por la ley de Stokes, $F_{roz.} = 6\pi\eta r v$, en donde r es el radio de la partícula, v su velocidad y η la viscosidad dinámica del aire o medio fluido donde caen las esferitas. a) Estimar la velocidad límite de una partícula contaminante esférica de radio 10^{-5} m y densidad $\rho = 2$ g/cm^3. Suponer que el aire está en reposo y que $\eta = 1.8.10^{-5}$ Ns/m^2. b) Estimar el tiempo que esta partícula tarda en caer por una chimenea de 100 m de altura.

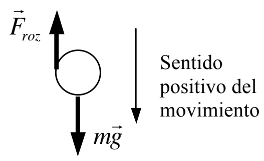
Solución: I.T.I. 92, 98, I.T.T. 96, 99, 02, 05

Vamos a tomar como sentido positivo del movimiento unidimensional de la partícula el sentido descendente, el origen de coordenadas en la parte superior de la chimenea de altura h = 100 m, y pondremos a cero el cronómetro en el instante en que la dejamos caer.

a) Dibujando el diagrama de fuerzas y aplicando la segunda ley de Newton:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{roz.} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad mg - F_{roz} = ma$$

$$\Rightarrow \quad a = \left[g - \frac{F_{roz}}{m}\right] = \left[g - \left(\frac{6\pi\,\eta\,r}{m}\right)v\right]$$



Esta aceleración será nula cuando se alcance la velocidad límite:

$$g-\left(\frac{6\pi\,\eta\, r}{m}\right)v_{lím.}=0 \quad\Rightarrow\quad v_{lím.}=\frac{mg}{6\pi\,\eta\, r}=\frac{\left(\frac{4}{3}\pi\, r^{3}\rho\right)g}{6\pi\eta\, r}=\frac{2}{9}\left(\frac{r^{2}\rho\, g}{\eta}\right)=\boxed{2.4\ \mathrm{cm/s}}$$

b) La aceleración depende de la velocidad. Separando variables:

Jose Javier Sandonís R..., 10/11/04 17:54
Con formato: Numeración y viñetas

$$\frac{dv}{dt}=\left[g-\left(\frac{6\pi\eta\, r}{m}\right)v\right]=\left(\frac{g}{v_{lím.}}\right)\left(v_{lím.}-v\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{v_{lím.}-v}=\left(\frac{g}{v_{lím.}}\right)dt=\frac{dt}{\tau}$$

Donde $\tau=\frac{v_{lím.}}{g}=2.47\mathrm{ms}$ es un tiempo relacionado con la rapidez con la que la partícula tiende a alcanzar la velocidad límite.

Integrando y teniendo en cuenta las condiciones iniciales del movimiento:

$$\int_0^v\frac{dv}{v_{lím.}-v}=\int_0^t\frac{dt}{\tau} \quad\Rightarrow\quad -\ln\left[\frac{v_{lím.}-v}{v_{lím.}}\right]=\frac{t}{\tau} \quad\Rightarrow\quad v(t)=v_{lím.}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

Para encontrar la posición en función del tiempo integrando y teniendo en cuenta las condiciones iniciales del movimiento:

$$x(t)=\int_0^t v_{lím.}\left(1-e^{-t/\tau}\right)dt=v_{lím.}t-v_{lím.}\tau\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

Podemos estimar que para tiempos grandes en comparación con τ la exponencial es prácticamente nula y en dicho caso nos queda:

$$x(t)\approx v_{lím.}t$$

Cuando llega al suelo, $t=t_{suelo}$:

$$x\left(t_{suelo}\right)=h \quad\Rightarrow\quad v_{lím.}t_{suelo}=h \quad\Rightarrow\quad t_{suelo}=\frac{h}{v_{lím.}}=\qquad\boxed{1\,\mathrm{h}\,9'}$$

Como podemos comprobar el resultado es mucho mayor que el tiempo τ, con lo que la suposición que hicimos para encontrarlo es correcta.

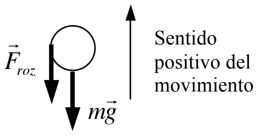
Una masa de 4 Kg es lanzada verticalmente con una velocidad inicial de 60 m/s. La masa encuentra una resistencia del aire $\vec{F}_{roz.} = -k\vec{v}$, con k = 0.03 Ns/m. Calcular el tiempo que transcurre desde el lanzamiento hasta que alcanza la máxima altura. ¿Cuál es la máxima altura?

Solución: I.T.I. 01, I.T.T. 01, 04

Vamos a tomar como sentido positivo del movimiento unidimensional del cuerpo el sentido ascendente, el origen de coordenadas en la posición de lanzamiento, y pondremos a cero el cronómetro en el instante en que es lanzado el cuerpo. Dibujando el diagrama de fuerzas y aplicando la segunda ley de Newton:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{roz.} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad -mg - F_{roz} = ma$$

$$\Rightarrow \quad a = -\left[g + \frac{F_{roz}}{m}\right] = -\left[g + \left(\frac{k}{m}\right)v\right]$$



La aceleración depende de la velocidad. Separando variables:

$$\frac{dv}{dt} = -\left[g + \left(\frac{k}{m}\right)v\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{\left[g + \left(\frac{k}{m}\right)v\right]} = -dt$$

Integrando teniendo en cuenta las condiciones iniciales del movimiento:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\left[g + \left(\frac{k}{m}\right)v\right]} = -\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{m}{k}\right)\ln\left[\frac{g + \left(\frac{k}{m}\right)v}{g + \left(\frac{k}{m}\right)v_0}\right] = -t \qquad (1)$$

Cuando el móvil alcanza su máxima altura, $t = t_{máx.alt}$, la velocidad se anula. Si en (1) hacemos $v = 0$ encontraremos el tiempo que nos piden:

$$t_{\max.alt.} = \left(\frac{m}{k}\right)\ln\left[1 + \left(\frac{k}{mg}\right)v_0\right] = \boxed{5.986 \text{ s}}$$

Para encontrar la altura en función del tiempo primeramente despejaremos la velocidad en la ecuación (1):

$$v(t) = \left(\frac{m}{k}\right)\left\{\left[g + \left(\frac{k}{m}\right)v_0\right]e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t} - g\right\}$$

Integrando y teniendo en cuenta las condiciones iniciales del movimiento:

$$y(t) = \int_0^t \left(\frac{m}{k}\right)\left\{\left[g + \left(\frac{k}{m}\right)v_0\right]e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t} - g\right\}dt = \left(\frac{m}{k}\right)^2\left[g + \left(\frac{k}{m}\right)v_0\right]\left(1 - e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t}\right) - \left(\frac{m}{k}\right)gt$$

La altura máxima será:

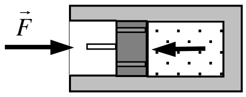
$$y_{máx.} = y\left(t_{máx.alt.}\right) = \left(\frac{m}{k}\right)^2\left[g + \left(\frac{k}{m}\right)v_0\right]\left(1 - e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t_{máx.alt.}}\right) - \left(\frac{m}{k}\right)gt_{máx.alt.} = \boxed{178.2 \text{ m}}$$

Un paracaidista cuya masa es de 80 kg salta de un avión que vuela lentamente alcanzando una velocidad límite de 50 m/s. Calcular la aceleración del paracaidista cuando su velocidad es de 30 m/s. Determinar la resistencia del aire que actúa sobre él cuando su velocidad es de 30 m/s y 50 m/s. (La fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad).

Solución: I.T.I. 96

Texto solución

Se aplica una fuerza constante $\vec{F}$ a un émbolo y su eje de masa total m para hacerle mover en un cilindro lleno de aceite. Conforme el émbolo se mueve el aceite forzado a salir por orificios en el émbolo ejerce sobre éste una fuerza $\vec{F}_{aceite} = -k\vec{v}$. Exprésese la distancia x recorrida por el émbolo en función del tiempo t, suponiendo que en $t = 0$, $x_0 = 0$ y $v_0 = 0$



Solución: I.T.I. 03

Vamos a tomar como sentido positivo del movimiento unidimensional del émbolo el sentido hacia la derecha.

Dibujando el diagrama de fuerzas y aplicando la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} + \vec{F}_{aceite} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad F - kv = ma$$

$$\Rightarrow \quad a = \left(\frac{F}{m}\right) - \left(\frac{k}{m}\right)v = -\left(\frac{k}{m}\right)\left[v - \left(\frac{F}{k}\right)\right]$$

La aceleración depende de la velocidad. Separando variables:

$$\frac{dv}{dt} = -\left(\frac{k}{m}\right)\left[v - \left(\frac{F}{k}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v - \left(\frac{F}{k}\right)} = -\left(\frac{k}{m}\right)dt$$

Integrando teniendo en cuenta las condiciones iniciales del movimiento:

$$\int_0^v \frac{dv}{v - \left(\frac{F}{k}\right)} = \int_0^t -\left(\frac{k}{m}\right)dt \quad \Rightarrow \quad \ln\left[\frac{v - \left(\frac{F}{k}\right)}{-\left(\frac{F}{k}\right)}\right] = -\left(\frac{k}{m}\right)t$$

Para encontrar la altura en función del tiempo primeramente despejaremos la velocidad en la ecuación anterior:

$$v(t)=\left(\frac{F}{k}\right)\left[1-e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t}\right]$$

Integrando y teniendo en cuenta las condiciones iniciales del movimiento:

$$x(t)=\int_0^t\left(\frac{F}{k}\right)\left[1-e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t}\right]dt=\boxed{\left(\frac{F}{k}\right)\left[t+\left(\frac{m}{k}\right)e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t}-\left(\frac{m}{k}\right)\right]}$$

La resistencia que encuentra un paracaidista que cae con una velocidad v puede expresarse en el S.I. por $F=-k\,r^2v^2$ con k = 0.3 y siendo r el radio del paracaídas. Determinar r de modo que el paracaídas cuya masa, incluido el paracaidista, es m = 100 kg llegue al suelo con la misma velocidad con la que llegaría cayendo en el vacío desde h = 1 m de altura. ¿En qué instante tendría una velocidad de 4 m/s^2?

Nota: $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(a^2-x^2\right)}=\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$, $\displaystyle\text{tgh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

Solución: **I.T.I. 97, 03, I.T.T. 03**

Vamos a tomar como sentido positivo del movimiento unidimensional del paracaidista el sentido descendente y vamos a poner a cero el cronómetro en el momento en el que se inicia el movimiento.

Jose Javier Sandonís R..., 12/11/04 11:46
Eliminado: de

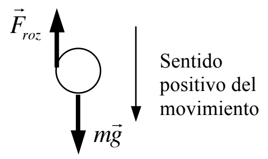
Jose Javier Sandonís R..., 12/11/04 11:45
Eliminado: la partícul

Jose Javier Sandonís R..., 12/11/04 11:45
Eliminado: a

Dibujando el diagrama de fuerzas y aplicando la segunda ley de Newton:

$$m\vec{g}+\vec{F}_{roz.}=m\vec{a}\quad\Rightarrow\quad mg-k\,r^2v^2=ma$$

$$\Rightarrow\quad\boxed{a=\left[g-\left(\frac{k\,r^2}{m}\right)v^2\right]}$$



Esta aceleración será nula cuando se alcance la velocidad límite:

$$g-\left(\frac{k\,r^2}{m}\right)v_{lím.}^2=0\quad\Rightarrow\quad v_{lím.}=\sqrt{\frac{mg}{k\,r^2}}$$

Nos dicen que esta velocidad límite debe ser igual a la que se alcanza cuando se cae desde una altura h. Teniendo en cuenta que para un movimiento uniformemente acelerado con aceleración g y partiendo del reposo:

$$v_{final}^2=2gh\quad\Rightarrow\quad v_{lím.}^2=2gh\quad\Rightarrow\quad\frac{mg}{k\,r^2}=2gh\quad\Rightarrow\quad r=\boxed{\sqrt{\frac{m}{2kh}}=12.91\text{ m}}$$

La aceleración depende de la velocidad. Separando variables:

$$\frac{dv}{dt}=\left[g-\left(\frac{kr^2}{m}\right)v^2\right]=\left(\frac{kr^2}{m}\right)\left[\left(\frac{mg}{kr^2}\right)-v^2\right]=\left(\frac{g}{v_{lím.}^2}\right)\left[v_{lím.}^2-v^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{\left[v_{lím.}^2-v^2\right]}=\left(\frac{g}{v_{lím.}^2}\right)dt$$

Integrando teniendo en cuenta las condiciones iniciales del movimiento:

$$\int_0^v \frac{dv}{\left[v_{lím.}^2-v^2\right]}=\int_0^t \left(\frac{g}{v_{lím.}^2}\right)dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2v_{lím.}}\ln\left(\frac{v_{lím.}+v}{v_{lím.}-v}\right)=\left(\frac{g}{v_{lím.}^2}\right)t$$

$$\Rightarrow \quad t=\frac{v_{lím.}}{2g}\ln\left(\frac{v_{lím.}+v}{v_{lím.}-v}\right) \qquad (1)$$

Sustituyendo el valor de la velocidad, $v_1 = 4$ m/s, que nos dan en el enunciado podemos calcular el valor t_1 del tiempo en ese instante:

$$t_1=\frac{v_{lím.}}{2g}\ln\left(\frac{v_{lím.}+v_1}{v_{lím.}-v_1}\right)=\boxed{0.674 \text{ s}}$$

Despejando la velocidad en la ecuación (1) podemos calcular la velocidad en cualquier instante del tiempo:

$$v(t)=v_{lím.}\,\text{tgh}\left(\frac{g}{v_{lím.}}t\right)$$

Una partícula de masa m parte del reposo y cae bajo la acción de la gravedad, a través de un medio viscoso que opone una resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad. a) Hallar las ecuaciones del movimiento. b) Sin resolverlas, calcular la velocidad límite con que caerá la partícula al cabo de cierto tiempo.

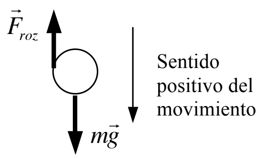
Solución: **I.T.I. 02, 05**

Vamos a tomar como sentido positivo del movimiento unidimensional de la partícula el sentido descendente.

a) Dibujando el diagrama de fuerzas y aplicando la segunda ley de Newton:

$$m\vec{g}+\vec{F}_{roz.}=m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad mg-kv^2=ma$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a=\left[g-\left(\frac{k}{m}\right)v^2\right]}$$



b) Esta aceleración será nula cuando se alcance la velocidad límite:

$$g - \left(\frac{k}{m}\right) v_{lím.}^2 = 0 \quad \Rightarrow \qquad \boxed{v_{lím.} = \sqrt{\frac{mg}{k}}}$$

Si la fuerza resistiva sobre un cuerpo al moverse en el seno de un fluido es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad hallar la velocidad límite. Si parte del reposo, determinar el tiempo transcurrido hasta que su velocidad sea la mitad de la velocidad límite. Expresar la velocidad en función del tiempo. Nota: $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(a^2 - x^2\right)} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$

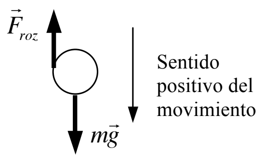
Solución: **I.T.I. 00, 04, I.T.T. 00**

Vamos a tomar como sentido positivo del movimiento unidimensional de la partícula el sentido descendente y vamos a poner a cero el cronómetro en el momento en el que se inicia el movimiento.

Dibujando el diagrama de fuerzas y aplicando la segunda ley de Newton:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{roz.} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad mg - k\,v^2 = ma$$

$$\Rightarrow \quad a = \left[g - \left(\frac{k}{m}\right)v^2\right]$$



Esta aceleración será nula cuando se alcance la velocidad límite:

$$g - \left(\frac{k}{m}\right)v_{lím.}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{lím.} = \sqrt{\frac{mg}{k}}}$$

La aceleración depende de la velocidad. Separando variables:

$$\frac{dv}{dt} = \left[g - \left(\frac{k}{m}\right)v^2\right] = \left(\frac{k}{m}\right)\left[\left(\frac{mg}{k}\right) - v^2\right] = \left(\frac{g}{v_{lím.}^2}\right)\left[v_{lím.}^2 - v^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{\left[v_{lím.}^2 - v^2\right]} = \left(\frac{g}{v_{lím.}^2}\right)dt$$

Integrando teniendo en cuenta las condiciones iniciales del movimiento:

$$\int_0^v \frac{dv}{\left[v_{lím.}^2 - v^2\right]} = \int_0^t \left(\frac{g}{v_{lím.}^2}\right)dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2v_{lím.}}\ln\left(\frac{v_{lím.} + v}{v_{lím.} - v}\right) = \left(\frac{g}{v_{lím.}^2}\right)t$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{v_{lím.}}{2g}\ln\left(\frac{v_{lím.} + v}{v_{lím.} - v}\right) \qquad (1)$$

Cuando la velocidad sea la mitad de la velocidad límite el tiempo t_1 transcurrido será:

$$t_1 = \frac{v_{lím.}}{2g} \ln\left(\frac{v_{lím.} + v_{lím.}/2}{v_{lím.} - v_{lím.}/2}\right) = \boxed{\frac{v_{lím.}}{2g} \ln(3)}$$

Despejando la velocidad en la ecuación (1) podemos calcular la velocidad en cualquier instante del tiempo:

$$\boxed{v(t) = v_{lím.} \operatorname{tgh}\left(\frac{g}{v_{lím.}} t\right)}$$

Jose Javier Sandonís R..., 12/11/04 11:51
Eliminado:

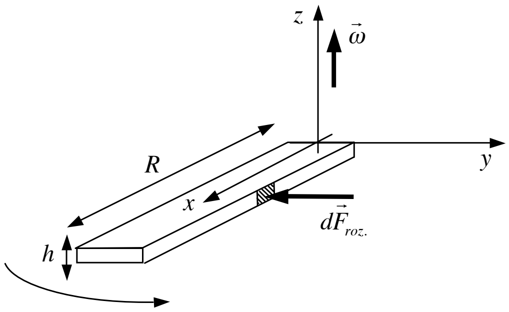
Admitiremos que un cuerpo que se mueve en el seno de un fluido experimenta una resistencia al avance que es proporcional al cuadrado de la velocidad v y a la superficie frontal S según la ley: $F_{roz.} = kSv^2$. Las aspas de 4 m de radio de un helicóptero giran a una velocidad de 10 r.p.s. y tienen un perfil de 1.25 cm de grosor. Calcular para cada una de las aspas la fuerza total de rozamiento y el momento de las fuerzas de rozamiento respecto al punto de giro del eje del rotor. Tomar $k = 10^4$ dinas s²/m⁴.

Solución: I.T.I. 96, 98, 04, I.T.T. 96, 99, 02, 05

En primer lugar traduciremos a unidades del sistema internacional el valor de la constante de proporcionalidad k y el de la velocidad angular ω:

$k = 10^4$ dinas $s^2/m^4 = 0.1$ N s^2/m^4 $\qquad \omega = 10$ r.p.s. $= 20\pi$ rad/s

Consideremos la superficie que enfrenta al aire una de las aspas del helicóptero durante su movimiento. Dividamos esa superficie en elementos infinitesimalmente pequeños dS, calculemos la fuerza y el momento de fuerza que actúa sobre cada uno de dichos elementos y finalmente sumemos para todos ellos:



$$d\vec{F}_{roz.} = k\,v^2 dS\left(-\hat{j}\right) = -k\left(\omega\,x\right)^2\left(h\,dx\right)\hat{j}$$

$$\vec{F}_{roz.} = \int d\vec{F}_{roz.} = \int_0^R -k\,\omega^2 h\,x^2 dx\,\hat{j} = -\frac{1}{3}k\,\omega^2 h\,R^3\,\hat{j} = \boxed{-105.3\text{ N}\,\hat{j}}$$

$$d\vec{\tau}_{roz.} = \vec{r}\times d\vec{F}_{roz.} = -x\,dF_{roz.}\,\hat{k} = -k\,\omega^2 h\,x^3 dx\,\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_{roz.} = \int d\vec{\tau}_{roz.} = \int_0^R -k\omega^2 h\,x^3 dx\,\hat{k} = -\frac{1}{4}k\omega^2 h\,R^4\,\hat{k} = \boxed{-315.8\text{ N m}\,\hat{k}}$$

Francisco Javier Junquer..., 4/11/10 15:10
Eliminado: