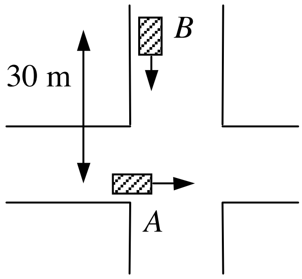
RELATIVIDAD GALILEANA:

Un automóvil *A* viaja hacia el Este a una velocidad constante de 25 km/h. Cuando pasa por el cruce representado en la figura arranca el automóvil *B* dirigiéndose hacia el Sur con una aceleración constante de 1.2 m/s^2. Calcular la posición, velocidad y aceleración de *B* relativas a *A* cinco segundos después de que *A* pase por el cruce.



Solución: **I.T.I. 93, I.T.T. 02, 05**

Si ponemos nuestro origen de coordenadas en el cruce, los ejes coordenados *X* e *Y* horizontal y vertical respectivamente y ponemos a cero el cronómetro cuando *A* pasa por el cruce, las posiciones y velocidades de los dos automóviles serán:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{r}_A(t) = \vec{v}_A\, t \\[2ex] \vec{v}_A = 6.94\ \mathrm{m/s}\ \hat{i} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} \vec{r}_B(t) = \vec{r}_{B,0} + \dfrac{1}{2}\vec{a}_B\, t^2 \quad , \quad \vec{v}_B(t) = \vec{a}_B\, t \\[2ex] \vec{r}_{B,0} = 30\ \mathrm{m}\,\hat{j} \quad , \quad \vec{a}_B = -1.2\ \mathrm{m/s^2}\ \hat{j} \end{array}\right\}$$

La posición y velocidad relativa de *B* respecto a *A* será:

$$\vec{r}_{BA}(t) = \vec{r}_B(t) - \vec{r}_A(t) = \vec{r}_{B,0} - \vec{v}_A t + \frac{1}{2}\vec{a}_B\, t^2$$

$$\vec{v}_{BA}(t) = \vec{v}_B(t) - \vec{v}_A(t) = \vec{a}_B\, t - \vec{v}_A$$

En el momento que nos piden, $t = t_a = 5$ s:

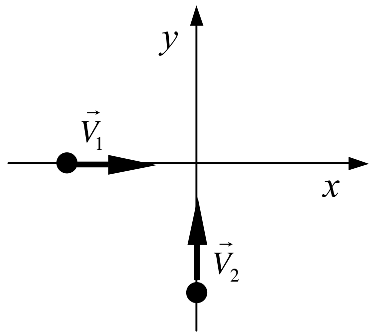
$$\vec{r}_{BA}(t_a) = \vec{r}_{B,0} - \vec{v}_A t_a + \frac{1}{2}\vec{a}_B\, t_a^2 = \boxed{\left(-34.72\,\hat{i} + 15\,\hat{j}\right)\ \mathrm{m}}$$

$$\vec{v}_{BA}(t_a) = \vec{a}_B\, t_a - \vec{v}_A = \boxed{\left(-6.94\,\hat{i} - 6\,\hat{j}\right)\ \mathrm{m/s}}$$

Las partículas 1 y 2 se mueven con velocidades constantes v_1 y v_2 por dos líneas rectas, mutuamente perpendiculares, hasta su punto de intersección O. En el momento t_0 = 0 las partículas se encontraban a las distancias l_1 y l_2 de O. ¿Al cabo de qué tiempo la distancia entre las partículas resultará ser mínima? ¿Cuál será dicha distancia?

Solución: **I.T.T. 96, 01, 04**

Teniendo en cuenta las condiciones que nos dan en el enunciado, los vectores de posición de las dos partículas serán:



$$\vec{r}_1 = (-l_1 + v_1 t)\,\hat{i} \quad , \quad \vec{r}_2 = (-l_2 + v_2 t)\,\hat{j}$$

La distancia entre las partículas será.

$$l(t) = r_{21} = |\vec{r}_{21}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(-l_1 + v_1 t)^2 + (-l_2 + v_2 t)^2}$$

La distancia será mínima cuando:

$$\left.\frac{dl}{dt}\right|_{t = t_{mín.}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad t_{mín.} = \frac{l_1 v_1 + l_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$$

$$\Rightarrow \quad l_{mín.} = l(t_{mín.}) = \ldots = \boxed{\frac{|l_1 v_2 - l_2 v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}}$$

El vector de posición de una partícula en un sistema de coordenadas O viene dado por la expresión $\vec{r}(t) = (6t^2 - 4t)\hat{i} - 3t^3\hat{j} + 3\hat{k}$. Determinar cómo es el movimiento relativo del sistema O' con respecto a O si la posición de la partícula con relación a O' se mide como $\vec{r}'(t) = (6t^2 + 3t)\hat{i} - 3t^3\hat{j} + 3\hat{k}$.

Solución: **I.T.T. 97, 99, 02, 05**

La relación entre las posiciones de la partícula medidas por O y O' es:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t) + \overrightarrow{OO'}(t)$$

La posición de O' respecto de O será:

$$\overrightarrow{OO'}(t) \equiv \vec{r}_{O'O}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}\,'(t) = -7t\hat{i}$$

La velocidad relativa será:

$$\vec{v}_{O'O} = \frac{d\vec{r}_{O'O}}{dt} = -7\,\hat{i}$$

Como vemos O' se mueve respecto de O con un movimiento rectilíneo uniforme a lo largo del eje X.

Un tren cuya longitud es de 350m empieza su recorrido por una vía recta con una aceleración constante de $3.0 \cdot 10^{-2}$ m/s^2. Pasado un tiempo de 30s después de haberse iniciado el movimiento se hace sonar el silbato de la locomotora (suceso 1) y transcurrido un tiempo de 60s desde este momento se enciende la lampara de cola del tren (suceso 2). Hallar la distancia entre los puntos en que se produjeron estos sucesos en un sistema de referencia ligado al tren, ídem para la tierra. ¿Cómo y a qué velocidad constante respecto a la tierra debe desplazarse un tercer sistema de referencia para que en él ambos sucesos tengan lugar en un mismo punto?

Solución: **I.T.T. 96, 01, 04**

Consideremos los siguientes observadores:
Observador O: Observador situado en el arcén y quieto respecto de éste.
Observador O': Observador situado dentro del tren y quieto respecto de éste.
Observador O'': Observador del tercer sistema de referencia que nos piden.

Vamos a suponer que en el instante en que arranca el tren (velocidad inicial nula) los tres observadores ponen en marcha sus cronómetros, que los orígenes de sus sistemas de referencia coinciden y que los tres orientan su eje X en la misma dirección y sentido a lo largo de las vías del tren.

La posición del origen de coordenadas de O' respecto de O será: $x_{\mathrm{O'O}}(t) = \frac{1}{2} a_{tren} t^2$. Si consideramos el origen de coordenadas en el sistema de O' en la cabeza del tren tenemos que:

$$1^{\text{er}} \text{ suceso } \left(t = t_1 = 30\,\mathrm{s}\right): \quad x'_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x'_1 + x_{\mathrm{O'O}}(t_1) = x'_1 + \frac{1}{2} a_{tren} t_1^2 = 13.5\,\mathrm{m}$$

$$2^{\text{o}} \text{ suceso } \left(t = t_2 = 90\,\mathrm{s}\right): \quad x'_2 = -350\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad x_2 = x'_2 + x_{\mathrm{O'O}}(t_2) = x'_2 + \frac{1}{2} a_{tren} t_2^2 = -228.5\,\mathrm{m}$$

La distancia entre los sucesos para O es: $d = x_1 - x_2 = \boxed{242\,\mathrm{m}}$

La distancia entre los sucesos para O' es: $d' = x'_1 - x'_2 = \boxed{350\,\mathrm{m}}$

La posición del origen de coordenadas de O'' respecto de O será: $x_{\mathrm{O''O}}(t) = v_{\mathrm{O''O}}\, t$. Donde $v_{\mathrm{O''O}}$ es la velocidad de O'' respecto de O, con lo cual para los dos sucesos tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_1'' + x_{O''O}(t_1) = x_1'' + v_{O''O}\,t_1 \\ x_2 = x_2'' + x_{O''O}(t_2) = x_2'' + v_{O''O}\,t_2 \\ x_1'' = x_2'' \end{array}\right\} \Rightarrow \quad v_{O''O} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \boxed{-4.03\,\text{m/s}}$$

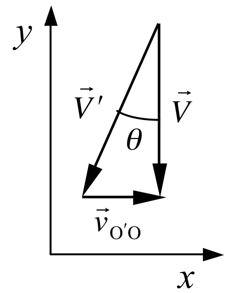
Este tercer sistema de referencia podría ser por lo tanto un segundo tren moviéndose en sentido contrario al primero $(v_{O''O} < 0)$.

Un automóvil viaja hacia el este a 50 km/h. Cuando el coche está parado, el conductor ve que las trazas de las gotas de lluvia son verticales, y cuando va a la velocidad anterior, las trazas forman un ángulo de 60° con la vertical. Calcular la velocidad de la lluvia respecto a) al automóvil en marcha, b) respecto a la tierra.

Solución: I.T.I. 92, 98, 01, 03, 04, I.T.T. 95, 00, 03

Vamos a considerar los siguientes observadores:
Observador O: Observador situado en el anden de la carretera y quieto respecto de ésta.
Observador O′: Observador situado dentro del coche.

Si orientamos el eje *X* positivo hacia el Este, la velocidad relativa de O′ respecto de O cuando el coche se encuentra en marcha se puede expresar como: $\vec{v}_{O'O} = 50\,\text{km/h}\;\hat{i}$.



La relación entre las velocidades $\vec{V}$ y $\vec{V}'$ de las gotas de lluvia vistas por los dos observadores es:

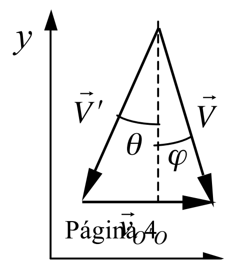
$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{v}_{O'O} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} 0 = -V'\,\text{sen}\,\theta + v_{O'O} \\ -V'\cos\theta = -V \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} V' = \boxed{57.74\,\text{km/h}} \\ V = \boxed{28.87\,\text{km/h}} \end{array}\right.$$

Un hombre que conduce a través de una tormenta a 80 Km/h, observa que las gotas de lluvia dejan trazos en las ventanas laterales haciendo un ángulo de 30° con la vertical y hacia la parte trasera, y cuando va a 100 Km/h aumenta a 45°. Calcular la velocidad de las gotas y el ángulo de caída medidos por un peatón parado en el arcén.

Solución: I.T.T. 97, 99, 02, 05

Vamos a considerar los siguientes observadores:
Observador *O*: Observador situado en el anden de la carretera y quieto respecto de ésta.
Observador *O′*: Observador situado dentro del coche.

Si orientamos el eje *X* positivo en el sentido de movimiento del coche, la velocidad relativa de *O′* respecto de *O* cuando el coche se encuentra en marcha se puede expresar como: $\vec{v}_{O'O} = v_{coche}\,\hat{i}$.



La relación entre las velocidades $\vec{V}$ y $\vec{V}'$ de las gotas de lluvia vistas por los dos observadores es:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{v}_{O'O} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V\,\text{sen}\varphi = -V'\,\text{sen}\,\theta + v_{coche} \\ V\cos\varphi = V'\cos\theta \end{cases}$$

Planteando estas ecuaciones en los dos casos propuestos en el enunciado:

$$\left.\begin{array}{c} V\,\text{sen}\varphi = -V_1'\text{sen}\theta_1 + v_{coche,1} \\ V\cos\varphi = V_1'\cos\theta_1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{c} V\,\text{sen}\,\varphi = -V_2'\text{sen}\,\theta_2 + v_{coche,2} \\ V\cos\varphi = V_2'\cos\theta_2 \end{array}\right\}$$

Tenemos un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Su solución es:

$$\boxed{\begin{array}{ll} V = 70.8\,\text{km/h} & \varphi = 48^{\circ}\,4' \\ V_1' = 54.6\,\text{km/h} & V_2' = 66.9\,\text{km/h} \end{array}}$$

El agua de un río fluye con una velocidad de 0.5 m/s. Un joven nada río arriba una distancia de un km y regresa al punto de partida. El joven nada en agua tranquila a una velocidad de 1.2 m/s. a) ¿Qué tiempo invierte en hacer el recorrido? b) Compararlo con el tiempo que tardaría hacer el mismo recorrido sobre agua tranquila.

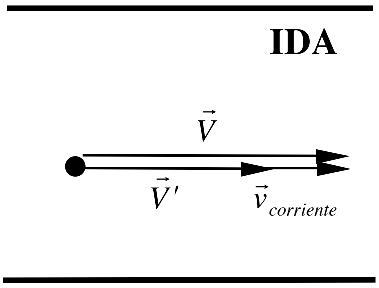
Solución: I.T.I. 92, I.T.T. 95, 00, 03

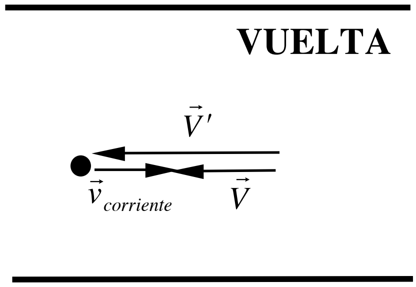
a) Vamos a considerar los siguientes observadores:
Observador O: Observador situado en la ribera del río y quieto respecto de ésta.
Observador O′: Observador situado dentro del agua dejándose arrastrar por la corriente.

La velocidad relativa de O′ respecto de O vendrá dada por la velocidad de la corriente en el río: $\vec{v}_{O'O} = \vec{v}_{corriente}$.

La relación entre las velocidades $\vec{V}$ y $\vec{V}'$ del nadador vistas por los dos observadores es:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{v}_{O'O} = \vec{V}' + \vec{v}_{corriente}$$





Y los tiempos invertidos en la ida y en la vuelta serán:

$$\Delta t_{1,ida} = \frac{d}{V_{ida}} = \frac{d}{V' + v_{corriente}} \quad , \quad \Delta t_{1,vuelta} = \frac{d}{V_{vuelta}} = \frac{d}{V' - v_{corriente}}$$

El tiempo total invertido será:

$$\Delta t_1 = \Delta t_{1,ida} + \Delta t_{1,vuelta} = \frac{2dV'}{V'^2 - v_{corriente}^2} = \boxed{33 \text{ min. } 36.8 \text{ s}}$$

b) El tiempo que tardaría si no hubiese corriente y el agua estuviera el calma sería (hacemos $v_{corriente} = 0$ en la expresión anterior):

$$\Delta t_2 = \frac{2d}{V'} = \boxed{27 \text{ min. } 46.7 \text{ s}}$$

Un pescador desea cruzar un río de 1 km de ancho el cual tiene una corriente de 5 km/h hacia el norte. El pescador está sobre el lado oeste. El bote lleva una rapidez de 4 km/h respecto al agua. a) ¿En qué dirección debe apuntar para hacer el recorrido en un tiempo mínimo? b) ¿Qué tiempo tardará en cruzar? c) ¿Qué velocidad lleva el bote respecto de un observador en la orilla?

Solución: I.T.I. 92, 97, I.T.T. 95, 00, 03

a) Vamos a considerar los siguientes observadores:
Observador O: Observador situado en la ribera del río y quieto respecto de ésta.
Observador O': Observador situado dentro del agua dejándose arrastrar por la corriente.
Vamos tomar el eje X en la dirección y sentido de la corriente y el eje Y en la dirección transversal.

La velocidad relativa de O' respecto de O vendrá dada por la velocidad de la corriente en el río: $\vec{v}_{O'O} = \vec{v}_{corriente}$.
La relación entre las velocidades $\vec{V}$ y $\vec{V}'$ del nadador vistas por los dos observadores es:

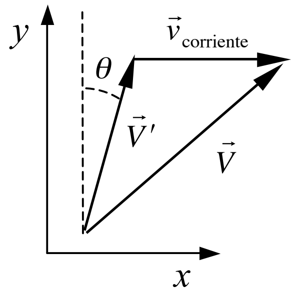
$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{v}_{O'O} = \vec{V}' + \vec{v}_{corriente}$$

Según la figura:

$$\vec{V}' = V' \operatorname{sen}\theta \,\hat{i} + V' \cos\theta \,\hat{j}$$

con lo que la velocidad vista por O será:

$$\vec{V} = \left(V' \operatorname{sen}\theta + v_{corriente}\right)\hat{i} + V' \cos\theta \,\hat{j}$$



Para que cruce de un lado a otro en un tiempo mínimo la componente *y* de la velocidad debería ser lo mayor posible. Ello se consigue cuando:

$$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{V}' \perp \vec{v}_{corriente}}$$

b) Si llamamos *d* a la anchura del río, el tiempo invertido al cruzar será:

$$\Delta t = \frac{d}{V_y} = \frac{d}{V'} = \boxed{15 \text{ min.}}$$

c) La velocidad respecto de O será:

$$\boxed{\vec{V} = v_{corriente}\,\hat{i} + V'\,\hat{j} \quad , \quad V = \sqrt{v_{corriente}^2 + V'^2} = 6.4 \text{ km/h}}$$

Dos nadadores tienen que atravesar un río desde el punto *A* en una de las orillas hasta el punto *B* situado en la orilla opuesta, enfrente del primero. Para esto, uno de ellos resolvió atravesar el río según la recta *AB*, mientras que el otro decidió mantenerse todo el tiempo perpendicularmente a la corriente, y la distancia a la cual ella le desvíe, realizarla por la orilla a pie con una velocidad igual a u. ¿Con qué valor de u ambos nadadores alcanzarán el punto B al mismo tiempo, si la velocidad de la corriente es de 2.0 km/h y la velocidad de cada nadador con respecto al agua es de 2.5 km/h?

Solución: I.T.T. 96, 00, 03

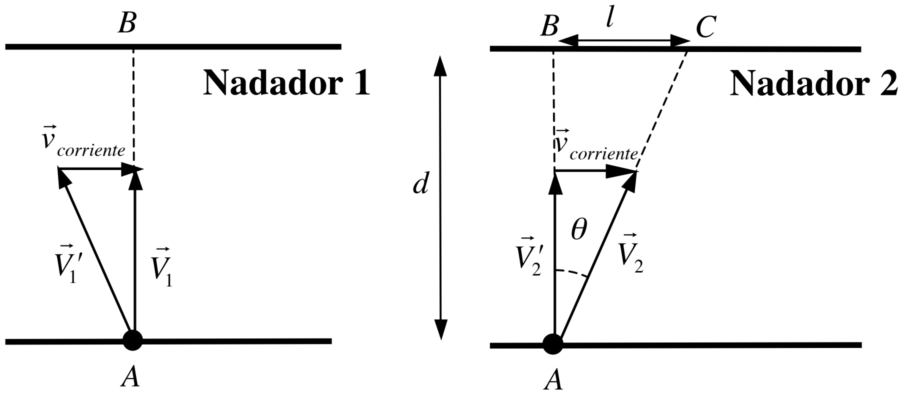
Vamos a considerar los siguientes observadores:
Observador O: Observador situado en la ribera del río y quieto respecto de ésta.
Observador O′: Observador situado dentro del agua dejándose arrastrar por la corriente.
Vamos tomar el eje *X* en la dirección y sentido de la corriente y el eje *Y* en la dirección transversal.

La velocidad relativa de O′ respecto de O vendrá dada por la velocidad de la corriente:

$$\vec{v}_{O'O} = \vec{v}_{corriente}$$

La relación entre las velocidades $\vec{V}_i$ y $\vec{V}_i'$ de los dos nadadores (i = 1, 2) vistas por los dos observadores es: $\vec{V}_i = \vec{V}_i' + \vec{v}_{O'O} = \vec{V}_i' + \vec{v}_{corriente}$

El diagrama de velocidades correspondiente para cada nadador será:



El tiempo invertido por el nadador 1 para cruzar el río será:

$$\Delta t_1 = \frac{d}{V_1} = \frac{d}{\sqrt{V_1'^2 - v_{corriente}^2}}$$

El tiempo invertido por el nadador 2 será:

$$\left.\begin{aligned} \Delta t_2 &= \Delta t_{A\to C} + \Delta t_{C\to B} \\ \Delta t_{A\to C} &= \frac{d/\cos\theta}{V_2} = \frac{d}{V_2'} \\ \Delta t_{C\to B} &= \frac{l}{u} = \frac{d\,\mathrm{tg}\theta}{u} = \left(\frac{d}{u}\right)\frac{v_{corriente}}{V_2'} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \Delta t_2 = \frac{d}{V_2'}\left(1 + \frac{v_{corriente}}{u}\right)$$

Si imponemos que los dos tiempos son iguales, teniendo en cuenta que $V_1' = V_2'$, tenemos que:

$$\frac{1}{\sqrt{V_1'^2 - v_{corriente}^2}} = \frac{1}{V_1'}\left(1 + \frac{v_{corriente}}{u}\right) \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad \boxed{u = \frac{v_{corriente}}{\left[1 - \left(\frac{v_{corriente}}{V_1'}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} - 1} = 3.0 \text{ km/h}}$$

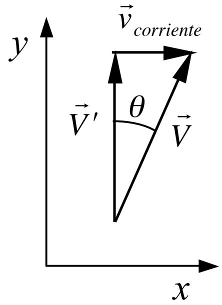
Un nadador intenta cruzar perpendicularmente un río nadando con una velocidad de 1.6 m/s respecto al agua tranquila. Sin embargo llega a la otra orilla en un punto que está 40m más lejos en 1a dirección de la corriente. Sabiendo que el río tiene una anchura de 80m. a) ¿Cuál es la velocidad de la corriente del río? b) ¿Cuál es la velocidad del nadador respecto a la orilla? c) ¿En qué dirección debería nadar para llegar al punto directamente opuesto al punto de partida?

Solución: I.T.I. 01, 04, I.T.T. 01, 04

a) Vamos a considerar los siguientes observadores:
Observador O: Observador situado en la ribera del río y quieto respecto de ésta.
Observador O$'$: Observador situado dentro del agua dejándose arrastrar por la corriente.

La velocidad relativa de O$'$ respecto de O vendrá dada por la velocidad de la corriente en el río: $\vec{v}_{O'O} = \vec{v}_{corriente}$.

La relación entre las velocidades $\vec{V}$ y $\vec{V}'$ del nadador vistas por los dos observadores es:



$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{v}_{O'O} = v_{corriente}\,\hat{i} + V'\,\hat{j}$$

El tiempo que ha tardado en atravesar el río (distancia Δy) será:

$$V_y = V' = \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta y}{V'} = 50\,\text{s}$$

En ese tiempo se ha desplazado horizontalmente una distancia Δx:

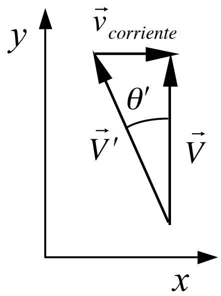
$$V_x = v_{corriente} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \boxed{0.8\,\text{m/s}}$$

b) El módulo de V será: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{v_{corriente}^2 + V'^2} = \boxed{1.789\,\text{m/s}}$

El ángulo que formará con la dirección transversal al río será:

$$\text{tg}\theta = \frac{V_x}{V_y} = \frac{v_{corriente}}{V'} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \boxed{26^\circ\,34'}$$

c) En este caso el diagrama de velocidades será el siguiente:



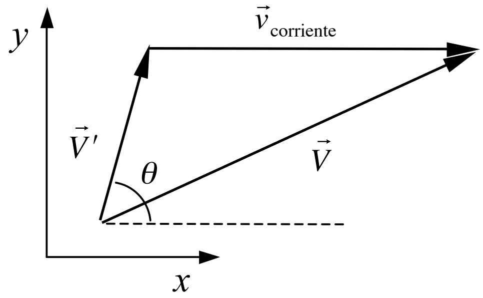
$$V_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -V'\,\text{sen}\theta' + v_{corriente} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{sen}\theta' = \frac{v_{corriente}}{V'} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta' = \boxed{30^\circ}$$

Un bote navega por un río a una velocidad que es 2.0 veces menor que la de la corriente de éste. ¿Qué ángulo respecto a la corriente debe mantener el bote para que ésta lo arrastre lo menos posible en su intento de pasar de una orilla a la otra?

Solución: **I.T.I. 02, 05, I.T.T. 96, 99, 01, 04**

Vamos a considerar los siguientes observadores:
Observador O: Observador situado en la ribera del río y quieto respecto de ésta.
Observador O′: Observador situado dentro del agua dejándose arrastrar por la corriente.
Vamos tomar el eje X en la dirección y sentido de la corriente y el eje Y en la dirección transversal.



La velocidad relativa de O′ respecto de O vendrá dada por la velocidad de la corriente:

$$\vec{v}_{\mathrm{O'O}} = \vec{v}_{corriente}$$

La relación entre las velocidades $\vec{V}$ y $\vec{V}'$ del bote vistas por los dos observadores es:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{v}_{\mathrm{O'O}} = \vec{V}' + \vec{v}_{corriente} \quad , \qquad v_{corriente} = 2V'$$

Si llamamos h a la anchura del río, el tiempo que tarda en atravesarlo será:

$$V_y = V'_y = \frac{h}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{h}{V'_y} = \frac{h}{V' \operatorname{sen}\theta}$$

En ese tiempo se ha desplazado horizontalmente una distancia s:

$$V_x = v_{corriente} + V' \cos\theta = \frac{s}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \quad s = \left(v_{corriente} + V' \cos\theta\right) \Delta t = \frac{\left(v_{corriente} + V' \cos\theta\right)}{V' \operatorname{sen}\theta} h = \frac{(2 + \cos\theta)}{\operatorname{sen}\theta} h$$

Lo que nos piden es que dicha distancia sea mínima, lo cual se producirá cuando $\theta = \theta_{mín.}$:

$$\left.\frac{ds}{d\theta}\right|_{\theta = \theta_{mín.}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad \cos\theta_{mín.} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_{mín.} = \boxed{120^{\circ}}$$

Si calculamos la derivada segunda de s cuando $\theta = \theta_{mín.} = 120^{\circ}$ nos da un valor positivo, luego se trata del mínimo que estamos buscando.

Desde una boya, que se encuentra en el medio de un ancho río, partieron los botes *A* y *B* tomando direcciones perpendiculares entre sí, el bote *A* a lo largo del río y el bote *B* a lo ancho. Habiéndose separado una misma distancia de la boya los botes emprendieron el regreso. Hallar el cociente entre los tiempos consumidos por los botes en el recorrido si la velocidad de cada uno (respecto al agua) es de 1.2 veces la velocidad de la corriente en el río.

Solución: I.T.I. 02, 05, I.T.T. 96, 99, 01, 04

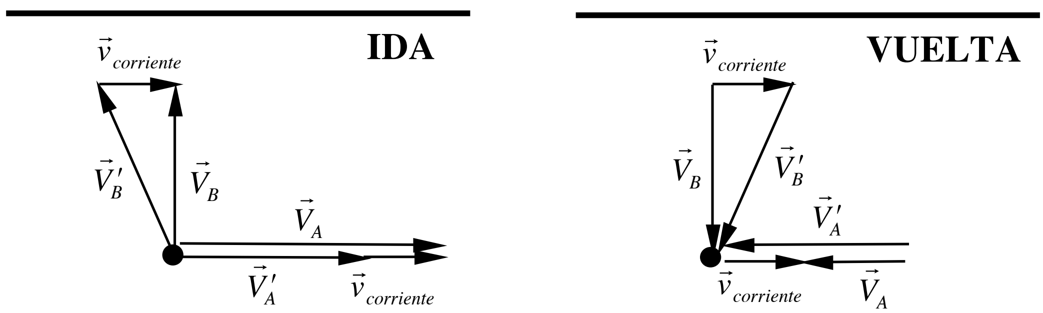
Vamos a considerar los siguientes observadores:
Observador O: Observador situado en la ribera del río y quieto respecto de ésta.
Observador O$'$: Observador situado dentro del agua dejándose arrastrar por la corriente.
Vamos tomar el eje *X* en la dirección y sentido de la corriente y el eje *Y* en la dirección transversal.

La velocidad relativa de O$'$ respecto de O vendrá dada por la velocidad de la corriente:

$$\vec{v}_{\mathrm{O'O}} = \vec{v}_{corriente}$$

La relación entre las velocidades $\vec{V}_i$ y $\vec{V}_i'$ de los dos botes ($i = A, B$) vistas por los dos observadores es: $\vec{V}_i = \vec{V}_i' + \vec{v}_{\mathrm{O'O}} = \vec{V}_i' + \vec{v}_{corriente}$

El diagrama de velocidades correspondiente para cada bote será:



Si lla~~mamos *d* a la distancia que los do~~s botes ~~se separan de la boya los diferente~~s tiempos empleados por los botes serán:

$$\Delta t_{A,\mathrm{ida}} = \frac{d}{V_{A,\mathrm{ida}}} = \frac{d}{V_A' + v_{corriente}} \qquad \Delta t_{B,\mathrm{ida}} = \frac{d}{V_{B,\mathrm{ida}}} = \frac{d}{\sqrt{V_B'^2 - v_{corriente}^2}}$$

$$\Delta t_{A,\mathrm{vuelta}} = \frac{d}{V_{A,\mathrm{vuelta}}} = \frac{d}{V_A' - v_{corriente}} \qquad \Delta t_{B,\mathrm{vuelta}} = \frac{d}{V_{B,\mathrm{vuelta}}} = \frac{d}{\sqrt{V_B'^2 - v_{corriente}^2}}$$

$$\Delta t_A = \Delta t_{A,\mathrm{ida}} + \Delta t_{A,\mathrm{vuelta}} = \frac{2\,d\,V_A'}{V_A'^2 - v_{corriente}^2} \qquad \Delta t_B = \Delta t_{B,\mathrm{ida}} + \Delta t_{B,\mathrm{vuelta}} = \frac{2d}{\sqrt{V_B'^2 - v_{corriente}^2}}$$

Como las velocidades de los dos botes A y B respecto del agua son iguales, $V'_A = V'_B = 1.2 v_{corriente}$, el cociente entre los tiempos será:

$$\frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} = \ldots = \boxed{1.809}$$

Un río tiene 1 Km de ancho. La velocidad de la corriente es de 2 Km/h. Determinar el tiempo que le llevaría a un hombre para llevar y traer, remando, un bote a través del río de una orilla a la otra. Comparar este tiempo con el que es necesario para descender 1 Km en la dirección de la corriente y remontar nuevamente. La velocidad del bote respecto al agua es de 4 Km/h . Si la diferencia de tiempos entre la ida y la vuelta fuese de 10 minutos determinar la velocidad de la corriente.

Solución: I.T.T. 97, 02, 05

Vamos a considerar los siguientes observadores:
Observador O: Observador situado en la ribera del río y quieto respecto de ésta.
Observador O': Observador situado dentro del agua dejándose arrastrar por la corriente.
Vamos tomar el eje X en la dirección y sentido de la corriente y el eje Y en la dirección transversal.

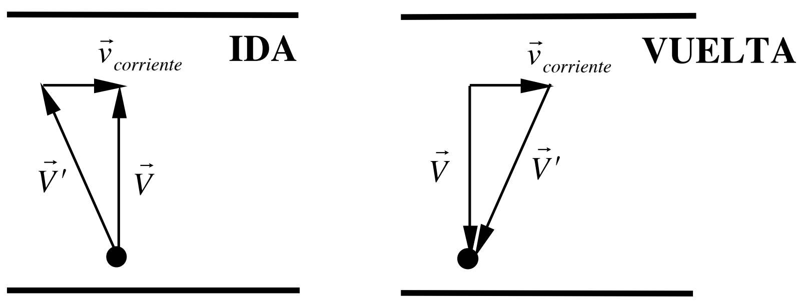
La velocidad relativa de O' respecto de O vendrá dada por la velocidad de la corriente:

$$\vec{v}_{O'O} = \vec{v}_{corriente}$$

La relación entre las velocidades $\vec{V}$ y $\vec{V}'$ del bote vistas por los dos observadores es:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{v}_{O'O} = \vec{V}' + \vec{v}_{corriente}$$

Si el bote va de una orilla a la otra por el camino más corto el diagrama de velocidades es el que se muestra en la figura:



En ambos casos tenemos que: $V^2 = V'^2 - v^2_{corriente}$

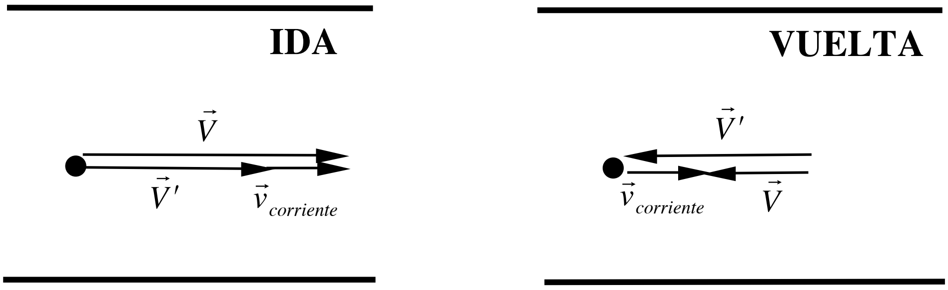
Y los tiempos invertidos en la ida y en la vuelta serán (llamando d a la anchura del río):

$$\Delta t_{1,ida} = \Delta t_{1,vuelta} = \frac{d}{V} = \frac{d}{\sqrt{V'^2 - v_{corriente}^2}}$$

El tiempo total invertido será:

$$\Delta t_1 = \Delta t_{1,ida} + \Delta t_{1,vuelta} = \frac{2d}{\sqrt{V'^2 - v_{corriente}^2}} = \boxed{0.577 \text{ h} = 34.6 \text{ min.}}$$

Si el bote desciende a lo largo del río una distancia d = 1 km (exactamente igual a la anchura del río) y luego vuelve, el diagrama de velocidades es el que se muestra en la figura:



Y los tiempos invertidos en la ida y en la vuelta serán:

$$\Delta t_{2,ida} = \frac{d}{V_{ida}} = \frac{d}{V' + v_{corriente}} \quad , \quad \Delta t_{2,vuelta} = \frac{d}{V_{vuelta}} = \frac{d}{V' - v_{corriente}}$$

El tiempo total invertido será:

$$\Delta t_2 = \Delta t_{2,ida} + \Delta t_{2,vuelta} = \frac{2dV'}{V'^2 - v_{corriente}^2} = \boxed{\frac{2}{3} \text{ h} = 40 \text{ min.}}$$

Si ahora los datos que nos dan es la diferencia de tiempos y nos piden calcular el valor de la velocidad de la corriente, utilizando los resultados anteriores:

$$\Delta t_2 - \Delta t_1 = T = 10 \text{ min.} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2dV'}{V'^2 - v_{corriente}^2} - \frac{2d}{\sqrt{V'^2 - v_{corriente}^2}}$$

Despejando y resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$\left(\frac{v_{corriente}}{V'}\right)^2 = 1 - 2a + 2a^2\left(\sqrt{1 + \frac{2}{a}} - 1\right) \quad , \quad a = \frac{d}{V'T}$$

Con los valores que nos dan: $\boxed{v_{corriente} = 0.679 \text{ m/s} = 2.45 \text{ km/h}}$

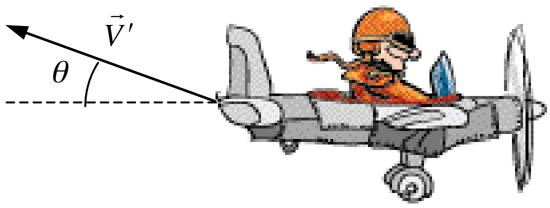
Y los tiempos invertidos serían en este caso:

$$\Delta t_1 = 37.9 \text{ min.} \quad , \quad \Delta t_2 = 47.9 \text{ min.}$$

En un sistema de coordenadas fijo en la tierra observamos una bala disparada desde la cola de un aeroplano con una velocidad de 300 m/s respecto a este, el cual se desplaza a 250 m/s. a) Describir el movimiento de la bala respecto al sistema de coordenadas de la tierra. b) Determinar el ángulo bajo el cual se debe apuntar de modo que la componente horizontal del movimiento de la bala respecto de la tierra sea nula.

Solución: I.T.I. 93, I.T.T. 97, 02, 05

Vamos a considerar los siguientes observadores:
Observador O: Observador situado en tierra y quieto respecto de ésta.
Observador O': Observador situado dentro del avión y quieto respecto de éste.



La velocidad relativa de O' respecto de O vendrá dada por la velocidad del avión, si tomamos el eje X en la dirección y sentido del movimiento del avión y el eje Y vertical hacia arriba tendremos:

c) $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{v}_{avión} = \left(v_{avión} - V'\cos\theta\right)\hat{i} + V'\,\text{sen}\theta\,\hat{j}$

d) Si imponemos que $V_x = 0$:

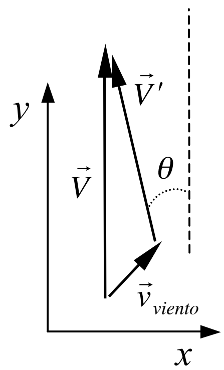
$$v_{avión} - V'\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{v_{avión}}{V'}\right) = \boxed{33.6^{\circ}}$$

Un avión vuela a la velocidad de 250 km/h respecto al aire en reposo. Un viento sopla a 80 km/h en dirección 45º al este del Norte. ¿En qué dirección debe volar el avión para que su rumbo sea Norte? ¿Cuál es en este caso la velocidad del avión respecto al suelo?

Solución: I.T.I. 96, 00, I.T.T. 02, 05

Vamos a considerar los siguientes observadores:
Observador O: Observador situado en tierra y quieto respecto de ésta.
Observador O': Observador moviéndose conjuntamente con el viento.

La velocidad relativa de O' respecto de O vendrá dada por la velocidad del viento, si tomamos el eje X hacia el Este y el eje Y hacia el Norte tendremos:

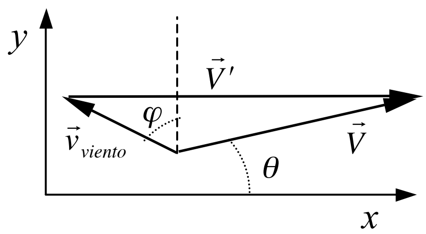


$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{v}_{viento} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V' \operatorname{sen}\theta = v_{viento} \operatorname{sen}45^\circ \quad \Rightarrow \quad \theta = \boxed{13.1^\circ} \\ V = V' \cos\theta + v_{viento} \cos 45^\circ = \boxed{300 \text{ km/h}} \end{cases}$$

Los instrumentos de un avión indican que respecto al aire se mueve hacia al este a una velocidad de 560 km/h. Al mismo tiempo un radar en tierra indica al avión que se esta moviendo a 520 km/h en una dirección que forma 8° con el este hacia el norte. Determinar la velocidad del viento relativa a la tierra.

Solución: **I.T.I. 93, I.T.T. 97, 02, 05**

Vamos a considerar los siguientes observadores:
Observador O: Observador situado en tierra y quieto respecto de ésta.
Observador O': Observador moviéndose conjuntamente con el viento.



La velocidad relativa de O' respecto de O vendrá dada por la velocidad del viento, si tomamos el eje X hacia el Este y el eje Y hacia el Norte tendremos:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{v}_{viento} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} V \cos\theta = V' - v_{viento} \operatorname{sen}\varphi \\ V \operatorname{sen}\theta = v_{viento} \cos\varphi \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \boxed{\varphi = 31.9^\circ} \\ \boxed{v_{viento} = 85.25 \text{ km/h}} \end{array}$$

Un barco en el ecuador navega hacia el Este con una velocidad de 30 km/h. Desde el Sudeste hacia el ecuador sopla un viento con una velocidad de 15 km/h formando un ángulo de 60° con el ecuador. Hallar la velocidad del viento respecto al barco y el ángulo entre el ecuador y la dirección del viento en el sistema de referencia ligado al barco.

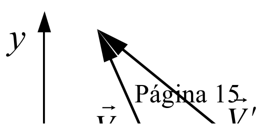
Solución: **I.T.T. 96, 99, 01, 04**

Vamos a considerar los siguientes observadores:
Observador O: Observador situado en la costa y quieto respecto de ésta.
Observador O′: Observador situado dentro del barco y quieto respecto de éste.
La velocidad relativa de O′ respecto de O vendrá dada por la velocidad del barco, si tomamos el eje X hacia el Este y el eje Y hacia el Norte tendremos:

$$\vec{v}_{O'O} = \vec{v}_{barco} = 30 \text{ km/h}\, \hat{i}$$

La relación entre las velocidades $\vec{V}$ y $\vec{V}'$ del viento vistas por los dos observadores es:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{v}_{O'O} = \vec{V}' + \vec{v}_{barco} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}' = \vec{V} - \vec{v}_{barco}$$



$$V' = \sqrt{\vec{V}' \cdot \vec{V}'} = \sqrt{\left(\vec{V} - \vec{v}_{barco}\right) \cdot \left(\vec{V} - \vec{v}_{barco}\right)} =$$

$$= \sqrt{V^2 + 2Vv_{barco}\cos\theta + v_{barco}^2} = \boxed{39.67\,\mathrm{km/h}}$$

Para el cálculo de φ:

$$V'_y = V_y \quad \Rightarrow \quad V' \,\mathrm{sen}\varphi = V \,\mathrm{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad \varphi = \boxed{19°6'}$$

Un tren pasa por una estación a 30 m/s. Una bola rueda sobre el piso del tren con una velocidad de 15 m/s dirigida: a) en el sentido del movimiento del tren, b) en sentido contrario, c) en dirección perpendicular al movimiento del tren. Encontrar en cada caso la velocidad de la bola respecto a la estación.

Solución: **I.T.I. 95, 00, I.T.T. 02, 05**

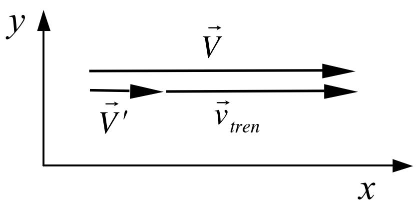
Consideremos los siguientes observadores:
Observador O: Observador situado en el arcén y quieto respecto de éste.
Observador O': Observador situado dentro del tren y quieto respecto de éste.

La velocidad relativa de O' respecto de O vendrá dada por la velocidad del tren. La ecuación que relaciona las velocidades de la bola medidas por O y O' será:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{v}_{tren}$$

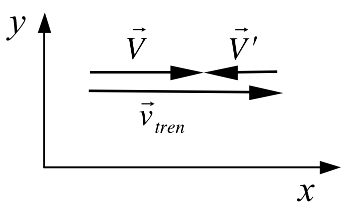
Para cada caso tendremos los siguientes diagramas

a)



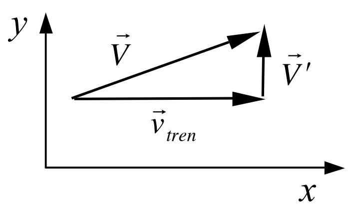
$$V = V' + v_{tren} = \boxed{45\,\mathrm{m/s}}$$

b)



$$V = V' - v_{tren} = \boxed{15\,\mathrm{m/s}}$$

c)



$$V = \sqrt{V'^2 + v_{tren}^2} = \boxed{33.5\,\mathrm{m/s}}$$

Una persona en un ascensor ve un tornillo que cae del techo. La altura del ascensor es de 3 m. a) Si el ascensor se nueve hacia arriba con una aceleración constante de 4.0 m/s^2 dirigida hacia arriba ¿cuánto tiempo tardará el tornillo en chocar contra el suelo?

Solución: I.T.T. 00, 03

Vamos a considerar los siguientes observadores:
Observador O: Observador situado fuera del ascensor y quieto respecto del edificio.
Observador O': Observador situado dentro del ascensor.
Vamos tomar el eje Y en la dirección vertical y sentido hacia abajo.

La aceleración relativa de O' respecto de O vendrá dada por la aceleración del ascensor:

$$\vec{a}_{\text{O}'\text{O}} = \vec{a}_{ascensor}$$

La relación entre las aceleraciones de la gravedad $\vec{g}$ y $\vec{g}'$ con las que cae el tornillo vistas por los dos observadores es:

$$\vec{g} = \vec{g}' + \vec{a}_{O'O} = \vec{g}' + \vec{a}_{ascensor}$$

Es decir, para el observador O', el tornillo cae con una aceleración de la gravedad:

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_{ascensor} = \left(9.8 \text{ m/s}^2\,\hat{j}\right) - \left(-4.0 \text{ m/s}^2\,\hat{j}\right) = 13.8 \text{ m/s}^2\,\hat{j}$$

La altura h del ascensor será recorrida por el tornillo en un tiempo Δt:

$$h = \frac{1}{2} g' (\Delta t)^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g'}} = \boxed{0.66 \text{ s}}$$

La cabina de un ascensor de 2.7 m de altura comienza a elevarse con una aceleración constante de 1.2 m/s^2. A los 2.0 s después del inicio de la ascensión del techo de la cabina se desprende un perno. Hallar: a) el tiempo de la caída libre del perno. b) el desplazamiento y el recorrido del perno durante la caída libre en un sistema de referencia ligado al foso del ascensor.

Solución: I.T.T. 96, 01, 04

d) Vamos a considerar los siguientes observadores:
Observador O: Observador situado en el foso del ascensor.
Observador O': Observador situado dentro del ascensor.

Vamos a orientar el eje X horizontal y el eje Y vertical, y vamos a poner en marcha el cronómetro cuando el ascensor inicie su movimiento de ascensión.

La aceleración relativa de O' respecto de O será la aceleración que nos dan en el enunciado: $\vec{a}_{O'O} = 1.2\,\mathrm{m/s^2}\,\hat{j}$. La relación entre las aceleraciones medidas por los dos observadores será:

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_{O'O}$$

En particular para la aceleración de la gravedad en caída libre medida por los dos observadores tendremos:

$$\vec{g} = \vec{g}\,' + \vec{a}_{O'O} \quad \Rightarrow \quad \vec{g}\,' = \vec{g} - \vec{a}_{O'O} = -11\,\mathrm{m/s^2}\,\hat{j}$$

Para el observador O', cuando él ve caer algo dentro del ascensor lo ve caer con una aceleración de 11 m/s^2, mayor que la aceleración de la gravedad usual.

El movimiento es unidimensional a lo largo del eje Y, todas las posiciones velocidades y aceleraciones en las siguientes expresiones harán por lo tanto referencia a componentes y. Llamemos h a la altura del ascensor.

Durante la caída libre las ecuaciones del movimiento para el perno en el sistema de referencia de O' serán:

$$t_0 = t_{desprend.} = 2.0\,\mathrm{s}\ ,\quad y'_0 = h = 2.7\,\mathrm{m}\ ,\quad v'_0 = 0\ ,\quad a' = -g' = -11\,\mathrm{m/s^2}$$

$$\Rightarrow \quad y'(t) = h - \frac{1}{2}g'\left(t - t_{desprend.}\right)^2$$

En el instante $t = t_{choque}$ el perno impacta contra el suelo del ascensor:

$$y'\left(t_{choque}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad h - \frac{1}{2}g'\left(t_{choque} - t_{desprend.}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad t_{choque} = 2.7\,\mathrm{s}$$

El tiempo durante el cual el perno ha estado en caída libre será:

$$\Delta t = t_{choque} - t_{desprend.} = \boxed{0.7\,\mathrm{s}}$$

e) Las ecuaciones del movimiento para el perno en el sistema de referencia de O' para $t \le t_{desprend.} = 2\,\mathrm{s}$ serán:

$$t_0 = 0\ ,\quad y_0 = h = 2.7\,\mathrm{m}\ ,\quad v_0 = 0\ ,\quad a = a_{ascensor} = 1.2\,\mathrm{m/s^2}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = h + \frac{1}{2}a_{ascensor}t^2 \quad , \quad v(t) = a_{ascensor}t$$

La altura h' y la velocidad u' del perno en el momento de desprenderse del techo, $t = t_{desprend.}$, serán:

$$h' = y\left(t_{desprend.}\right) = h + \frac{1}{2}a_{ascensor}t^2_{desprend.} = 5.1\,\text{m}$$

$$u' = v\left(t_{desprend.}\right) = a_{ascensor}t_{desprend.} = 2.4\,\text{m/s} \qquad \text{(está subiendo)}$$

Después de soltarse, $t \geq t_{desprend.} = 2\,\text{s}$, las ecuaciones del movimiento para el perno en el sistema de referencia de O' serán:

$$t_0 = t_{desprend.} = 2.0\,\text{s}\ , \quad y_0 = h' = 5.1\,\text{m}\ , \quad v_0 = u' = 2.4\,\text{m/s}\ , \quad a = -g = -9.8\,\text{m/s}^2$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = h' + u'\left(t - t_{desprend.}\right) - \frac{1}{2}g\left(t - t_{desprend.}\right)^2 \quad , \quad v(t) = u' - g\left(t - t_{desprend.}\right)$$

En el instante en que el perno choca contra el suelo del ascensor, $t = t_{choque}$, la altura h'' y la velocidad u'' del perno serán:

$$h'' = y\left(t_{choque}\right) = h' + u'\left(t_{choque} - t_{desprend.}\right) - \frac{1}{2}g\left(t_{choque} - t_{desprend.}\right)^2 = 4.4\,\text{m}$$

$$u'' = v\left(t_{choque}\right) = u' - g\left(t_{choque} - t_{desprend.}\right) = -4.5\,\text{m/s} \qquad \text{(está bajando)}$$

El desplazamiento realizado por el perno será:

$$\Delta y = y\left(t_{choque}\right) - y\left(t_{desprend.}\right) = h'' - h' = \boxed{-0.7\,\text{m}}$$

Para calcular el recorrido realizado por el perno, es decir la distancia que recorre, desde el punto de vista del observador O vamos a calcular la altura máxima h''' que alcanza en el instante $t = t_{máx.altura}$:

$$v\left(t_{máx.altura}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad u' - g\left(t_{máx.altura} - t_{desprend.}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{máx.altura} = 2.2\,\text{s}$$

$$h''' = y\left(t_{máx.\,altura}\right) = h' + u'\left(t_{máx.altura} - t_{desprend.}\right) - \frac{1}{2}g\left(t_{máx.\,altura} - t_{desprend.}\right)^2 = 5.4\,\text{m}$$

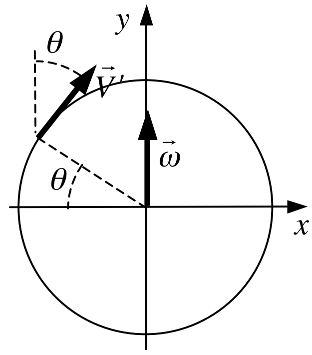
La distancia recorrida será la que recorre al subir más la que recorre al bajar:

$$d = \left(h''' - h'\right) + \left(h''' - h''\right) = \boxed{1.3\,\text{m}}$$

Un trineo a reacción se prueba sobre una vía recta que se ha construido a lo largo de un meridiano. Sabiendo que la vía está situada a 40° norte calcular la aceleración de Coriolis del trineo cuando su velocidad es de 900 km/h.

Solución: **I.T.I. 92, I.T.T. 95, 00, 03**

Dada la figura, donde se muestran los diferentes vectores, la aceleración de Coriolis será:



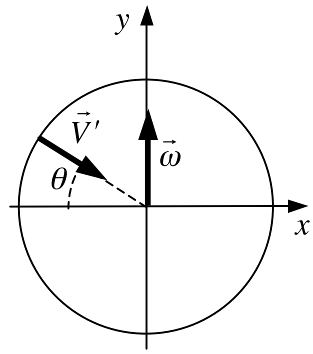
$$\vec{a}_{Coriolis} = -2\vec{\omega} \times \vec{V}' = 2\omega V' \operatorname{sen}\theta\, \hat{k} =$$

$$= \boxed{2.344 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m/s^2}\ \hat{k}}$$

La caja de un ascensor de una mina desciende con una velocidad constante de 12 m/s. Calcular el módulo, dirección y sentido de la aceleración de Coriolis de la caja si el ascensor está situado: a) en el ecuador, b) a 40° de latitud norte, c) a 40° de latitud sur.

Solución: **I.T.I. 92, 93, 98, I.T.T. 95, 00, 03**

En la figura se refleja la orientación de los diferentes vectores. Los tres casos que nos piden analizar corresponden a los valores de $\theta = 40^\circ$, $\theta = 0^\circ$ y $\theta = -40^\circ$ respectivamente.



$$\vec{a}_{Coriolis} = -2\vec{\omega} \times \vec{V}' = 2\omega V' \cos\theta\, \hat{k} =$$

$$= \begin{cases} \boxed{1.34 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}\ \hat{k} \qquad \theta = 40^\circ} \\ \boxed{1.75 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}\ \hat{k} \qquad \theta = 0^\circ} \\ \boxed{1.34 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}\ \hat{k} \qquad \theta = -40^\circ} \end{cases}$$

Un río fluye hacia i) el Norte, ii) el Sur, iii) el Este a 9 km/h en la latitud 40º Norte. a) Hallar la aceleración de Coriolis en los tres casos. b) ¿En qué lado presionará el agua produciendo mayor erosión?. c) Repetir el problema cuando el río se encuentra en la latitud 40º Sur.

Solución: **I.T.T. 99, 01, 04**

Vamos a orientar el eje *X* positivo hacia el Este, el eje *Y* positivo hacia el Norte y el eje *Z* positivo perpendicular a la superficie y hacia arriba. La velocidad angular de rotación de la tierra es: $\omega = 7.292 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{rad/s}$. El vector velocidad angular puede escribirse en función de la latitud λ como $\vec{\omega} = \omega \cos\lambda\, \hat{j} + \omega \,\mathrm{sen}\lambda\, \hat{k}$, donde la latitud λ se considera positiva si es Norte y negativa si es Sur. La aceleración de Coriolis viene dada por la expresión: $\vec{a}_{Coriolis} = -2\vec{\omega} \times \vec{V}$.

a) En el hemisferio Norte tendremos:

i) $\vec{V} = V\hat{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{Coriolis} = 2.344 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m/s^2}\ \hat{i}$

ii) $\vec{V} = -V\hat{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{Coriolis} = -2.344 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m/s^2}\ \hat{i}$

iii) $\vec{V} = V\hat{i} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{Coriolis} = 2\omega V \cos\lambda\, \hat{k} - 2\omega V \mathrm{sen}\lambda\, \hat{j} =$

$$= \left(2.793 \cdot 10^{-4}\ \hat{k} - 2.344 \cdot 10^{-4}\ \hat{j}\right) \mathrm{m/s^2}$$

$$a_{Coriolis} = 3.646 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m/s^2}$$

b) En el hemisferio Norte la aceleración de Coriolis hace que el agua presione más en la ribera derecha.

c) En el hemisferio Sur tendremos:

i) $\vec{V} = V\hat{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{Coriolis} = -2.344 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m/s^2}\ \hat{i}$

ii) $\vec{V} = -V\hat{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{Coriolis} = 2.344 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m/s^2}\ \hat{i}$

iii) $\vec{V} = V\hat{i} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{Coriolis} = 2\omega V \cos\lambda\, \hat{k} - 2\omega V \mathrm{sen}\lambda\, \hat{j} =$

$$= \left(2.793 \cdot 10^{-4}\ \hat{k} + 2.344 \cdot 10^{-4}\ \hat{j}\right) \mathrm{m/s^2}$$

$$a_{Coriolis} = 3.646 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m/s^2}$$

En el hemisferio Sur la aceleración de Coriolis hace que el agua presione más en la ribera izquierda.

Un pequeño cuerpo en el ecuador cae libremente a la superficie de la tierra desde una altura de 500 m. despreciando la resistencia del aire determinar a qué distancia y hacia qué lado de la vertical se desviará dicho cuerpo.

Solución: I.T.T. 96, 04

Si orientamos el eje X hacia el Este, el eje Y hacia el Norte y el eje Z perpendicular al suelo y hacia arriba, y ponemos el origen de coordenadas en el suelo justo debajo del objeto que cae:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\omega} = \omega\,\hat{j} \\ \\ \vec{V} \approx -g\,t\,\hat{k} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{Coriolis} = -2\vec{\omega} \times \vec{V} = 2\omega\, g\, t\, \hat{i}$$

con lo que la componente x de la aceleración del cuerpo durante la caída será:

$$a_x = 2\omega\, g\, t$$

Integrando sucesivamente y teniendo en cuenta que $V_{0,x} = 0,\, x_0 = 0$:

$$x(t) = \frac{1}{3}\omega\, g\, t^3$$

Teniendo en cuenta que cuando el cuerpo llega al suelo si resolvemos las ecuaciones del movimiento vertical tenemos que:

¡Error!Marcador no definido.

tenemos que en ese momento la desviación respecto de la vertical valdrá:

$$x\left(t_{suelo}\right) = \frac{1}{3}\omega\, g\, t_{suelo}^3 = \frac{1}{3}\omega\, g\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} = \boxed{0.245 \text{ m}}$$

Para un cuerpo que cae libremente desde una altura h calcular aproximadamente cual es la desviación respecto de la vertical debido a la aceleración de Coriolis: a) si la caída se realiza en un punto de la superficie terrestre de latitud λ norte, b) si la caída se realiza en un punto de la superficie terrestre de latitud λ sur.

Solución: I.T.T. 02, 05

Si orientamos el eje X hacia el Este, el eje Y hacia el Norte y el eje Z perpendicular al suelo y hacia arriba, y ponemos el origen de coordenadas en el suelo justo debajo del objeto que cae:

a) Si nos encontramos en el hemisferio Norte:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{\omega} = \omega\cos\lambda\,\hat{j} + \omega\,\mathrm{sen}\,\lambda\,\hat{k} \\ \vec{V} = -g\,t\,\hat{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \vec{a}_{Coriolis} = -2\vec{\omega}\times\vec{V} = 2\omega\cos\lambda\, g\, t\,\hat{i}$$

con lo que la componente x de la aceleración del cuerpo durante la caída será:

$$a_x = 2\omega\cos\lambda\, g\, t$$

Integrando sucesivamente y teniendo en cuenta que $V_{0,x} = 0,\, x_0 = 0$:

$$x(t) = \frac{1}{3}\omega\cos\lambda\, g\, t^3$$

Teniendo en cuenta que cuando el cuerpo llega al suelo si resolvemos las ecuaciones del movimiento vertical tenemos que:

$$t_{suelo} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

tenemos que en ese momento la desviación respecto de la vertical valdrá:

$$x(t_{suelo}) = \frac{1}{3}\omega\cos\lambda\, g\, t_{suelo}^3 = \boxed{\frac{1}{3}\omega\cos\lambda\, g\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}}$$

b) Si nos encontramos en el hemisferio Sur:

$$\left.\begin{aligned} \vec{\omega} &= \omega\cos\lambda\,\hat{j} - \omega\,\mathrm{sen}\,\lambda\,\hat{k} \\ \vec{V} &= -g\,t\,\hat{k} \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \vec{a}_{Coriolis} = -2\vec{\omega}\times\vec{V} = 2\omega\cos\lambda\, g\, t\,\hat{i}$$

con lo que la componente x de la aceleración del cuerpo durante la caída será:

$$a_x(t) = 2\omega\cos\lambda\, g\, t$$

Integrando sucesivamente y teniendo en cuenta que $V_{0,x} = 0, x_0 = 0$:

$$x(t) = \frac{1}{3}\omega\cos\lambda\, g\, t^3$$

Teniendo en cuenta que cuando el cuerpo llega al suelo si resolvemos las ecuaciones del movimiento vertical tenemos que:

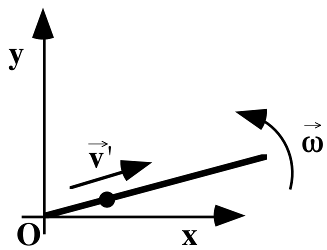
$$t_{suelo} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

tenemos que en ese momento la desviación respecto de la vertical valdrá:

$$x(t_{suelo}) = \frac{1}{3}\omega\cos\lambda\, g\, t_{suelo}^3 = \boxed{\frac{1}{3}\omega\cos\lambda\, g\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}}$$

Por lo que se puede comprobar el resultado no depende del hemisferio donde se realice la caída.

Una barra se mueve en un plano horizontal con ω = $2t$ rad/s. Un punto sobre la barra se mueve respecto a ésta con v' = 4 m/s. Calcular la velocidad y aceleración absoluta del punto. En el instante t = 0 la barra se encuentra sobre el eje OX y el punto a 1 m de O. Particularizar para el instante t = 1 s.



Solución: I.T.I. 92, 97, 98, I.T.T. 95, 04

Llamemos θ al ángulo que forma la barra con el eje X. Inicialmente dicho ángulo es nulo, en un tiempo t cualquiera:

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega(t)\,dt = \int_0^t 2t\,dt = t^2$$

Llamemos O a un observador cuyos ejes son los que se representan en la figura, y llamemos O' a un observador montado en la barra con su eje X' a lo largo de la barra, su eje Y' perpendicular a X' y en el plano de la figura, y su eje Z' perpendicular a la figura y hacia fuera del papel (coincide con el eje Z).

La relación entre los vectores unitarios del sistema de referencia de O' y los de O viene dada por:

$$\begin{aligned}
\hat{i}' &= \cos(\theta)\,\hat{i} + \operatorname{sen}(\theta)\,\hat{j} = \cos(t^2)\,\hat{i} + \operatorname{sen}(t^2)\,\hat{j} \\
\hat{j}' &= -\operatorname{sen}(\theta)\,\hat{i} + \cos(\theta)\,\hat{j} = -\operatorname{sen}(t^2)\,\hat{i} + \cos(t^2)\,\hat{j} \\
\hat{k}' &= \hat{k}
\end{aligned}$$

Desde el punto de vista de O' el vector de posición del punto en función del tiempo será $\left(\vec{r}_0 = \hat{i}',\ \vec{v}' = 4\hat{i}'\right)$:

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}'\,dt = \hat{i}' + 4t\,\hat{i}' = (4t+1)\,\hat{i}'$$

Recordando que para los dos observadores $\vec{r}(t) = \vec{r}'(t)$ (los dos coinciden en el vector de posición del punto) podemos calcular la velocidad y la aceleración del punto respecto de O:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r} = 4\hat{i}' + \left[2t\,\hat{k}'\right] \times \left[(4t+1)\,\hat{i}'\right] = 4\hat{i}' + 2t(4t+1)\,\hat{j}' = \\
&= 4\left[\cos(t^2)\,\hat{i} + \operatorname{sen}(t^2)\,\hat{j}\right] + 2t(4t+1)\left[-\operatorname{sen}(t^2)\,\hat{i} + \cos(t^2)\,\hat{j}\right] = \\
&= \left[4\cos(t^2) - 2t(4t+1)\operatorname{sen}(t^2)\right]\hat{i} + \left[4\operatorname{sen}(t^2) + 2t(4t+1)\cos(t^2)\right]\hat{j}
\end{aligned}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\alpha} \times \vec{r} =$$

$$= 0 + 2\left[2t\,\hat{k}'\right] \times \left[4\hat{i}'\right] + \left[2t\,\hat{k}'\right] \times \left\{\left[2t\,\hat{k}'\right] \times \left[(4t+1)\hat{i}'\right]\right\} + \left[2\hat{k}'\right] \times \left[(4t+1)\hat{i}'\right] =$$

$$= 16t\,\hat{j}' + \left[2t\,\hat{k}'\right] \times \left[2t(4t+1)\hat{j}'\right] + 2(4t+1)\hat{j}' =$$

$$= -4t^2(4t+1)\hat{i}' + 2(12t+1)\hat{j}' =$$

$$= -4t^2(4t+1)\left[\cos(t^2)\hat{i} + \text{sen}(t^2)\hat{j}\right] + 2(12t+1)\left[-\text{sen}(t^2)\hat{i} + \cos(t^2)\hat{j}\right] =$$

$$= \left[-4t^2(4t+1)\cos(t^2) - 2(12t+1)\text{sen}(t^2)\right]\hat{i} +$$

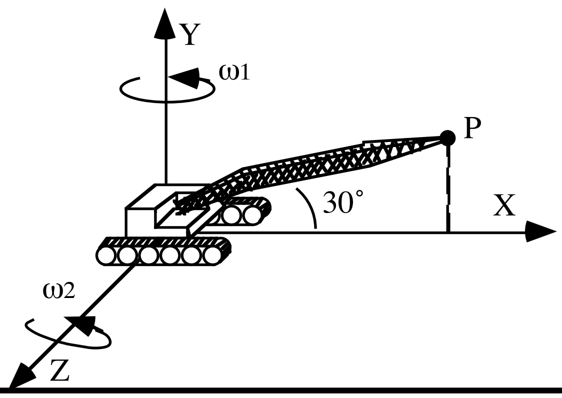
$$+\left[-4t^2(4t+1)\text{sen}(t^2) + 2(12t+1)\cos(t^2)\right]\hat{j}$$

donde $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ es la aceleración angular de la barra. (El resultado de la aceleración se puede obtener de una forma más sencilla simplemente derivando la expresión de la velocidad: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$)

Particularizando para t = 1 s:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{v}(1) = -6.25\,\hat{i} + 8.77\,\hat{j} \\ \vec{a}(1) = -32.7\,\hat{i} - 2.78\,\hat{j} \end{array}}$$

La grúa que se indica en la figura gira con una velocidad angular constante ω_1 = 0.30 rad/s. Simultáneamente la pluma o brazo se eleva con una velocidad angular ω_2 = 0.5 rad/s respecto de la cabina. Sabiendo que la longitud de la pluma es $l = \overline{OP}$ = 12 m, calcular: a) la velocidad de su extremo P, b) la aceleración de dicho extremo.



Solución: I.T.I. 92, I.T.T. 97, 00, 03

Vamos a considerar los siguientes observadores:
Observador O: Observador situado fuera de la grúa y quieto respecto del suelo.
Observador O′: Observador situado dentro de la grúa.

a) La velocidad angular con la que el observador O′ y su sistema de referencia giran respecto al sistema de referencia de O es $\vec{\omega}_1$ con lo que la relación entre las velocidades de P vistas por los dos será:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}$$

Por otro lado O′ ve al punto P realizar un movimiento circular uniforme con velocidad angular $\vec{\omega}_2$, con lo que la velocidad $\vec{V}'$ que ve será:

$$\vec{V}' = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}$$

Sustituyendo en la expresión anterior y teniendo en cuenta que $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \hat{j}$, $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \hat{k}$, $\vec{r} = l(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$ y $\theta = 30°$ obtenemos que la velocidad que ve O es:

$$\vec{V} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r} = -\omega_2 l \operatorname{sen}\theta \hat{i} + \omega_2 l \cos\theta \hat{j} - \omega_1 l \cos\theta \hat{k} =$$

$$= \boxed{-3.00\hat{i} + 5.20\hat{j} - 3.12\hat{k}}$$

b) La relación entre las aceleraciones de P vistas por los dos será:

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega}_1 \times \vec{V}' + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r})$$

Como hemos dicho O′ ve al punto P realizar un movimiento circular uniforme con velocidad angular $\vec{\omega}_2$, con lo que la velocidad $\vec{V}'$ y aceleración $\vec{a}'$ que ve serán:

$$\vec{V}' = \vec{\omega}_2 \times \vec{r} \quad , \quad \vec{a}' = \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r})$$

Sustituyendo en la expresión anterior tenemos que:

$$\vec{a} = (2\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}) + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}) =$$

$$= -(\omega_1^2 + \omega_2^2) l \cos\theta \hat{i} - \omega_2^2 l \operatorname{sen}\theta \hat{j} + 2\omega_1\omega_2 l \operatorname{sen}\theta \hat{k} =$$

$$= \boxed{-3.53\hat{i} - 1.50\hat{j} + 1.80\hat{k}}$$

Un sistema de coordenadas $O': X', Y', Z'$, gira respecto a un sistema de coordenadas fijo en el espacio (ambos con el mismo origen) con una velocidad angular $\vec{\omega} = 2\hat{i}'$. El vector de posición de una partícula en el instante t respecto al sistema O' viene dado por $\vec{r}' = (t^2 + 1)\hat{i}' - 6t\,\hat{j}' + 4t^3\,\hat{k}'$. a) Hallar la velocidad de la partícula para t = 1 s respecto al sistema fijo. b) Hallar la aceleración.

Solución: I.T.T. 99, 02, 05

Con los datos que nos dan:

$$\left.\begin{aligned}\vec{V}' &= \frac{d\vec{r}'}{dt} = 2t\,\hat{i}' - 6\,\hat{j}' + 12t^2\,\hat{k}' \\ \vec{\omega}\times\vec{r}' &= -8t^3\,\hat{j}' - 12t\,\hat{k}'\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned}\vec{V}(t) &= \vec{V}' + \vec{\omega}\times\vec{r}' = \\ &= 2t\,\hat{i}' - \left(6+8t^3\right)\hat{j}' + 12t(t-1)\hat{k}'\end{aligned}$$

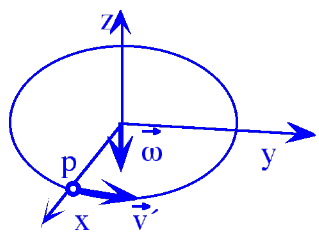
$$\left.\begin{aligned}\vec{a}' &= \frac{d\vec{V}'}{dt} = 2\,\hat{i}' + 24t\,\hat{k}' \\ 2\vec{\omega}\times\vec{V}' &= -48t^2\,\hat{j}' - 24\,\hat{k}' \\ \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right) &= 24t\,\hat{j}' - 16t^3\,\hat{k}'\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned}\vec{a}(t) &= \vec{a}' + 2\vec{\omega}\times\vec{V}' + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right) = \\ &= 2\,\hat{i}' + 24t(1-2t)\hat{j}' - 8\left(2t^3 - 3t + 3\right)\hat{k}'\end{aligned}$$

En $t = t_a = 1$ s tenemos para la velocidad y la aceleración vistas por O:

$$\boxed{\vec{V}(t_a) = 2\,\hat{i}' - 14\,\hat{j}' \quad , \quad \vec{a}(t_a) = 2\,\hat{i}' - 24\,\hat{j}' - 16\,\hat{k}'}$$

Obsérvese que la solución de lo que mide O está expresada en función de los vectores unitarios $\hat{i}'$, $\hat{j}'$ y $\hat{k}'$ del sistema de referencia de O'. O puede expresar sus medidas utilizando los ejes y vectores unitarios que quiera. Si quisiera expresar sus medidas según los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ de su sistema de referencia debería realizar un cambio de base de coordenadas.

Una partícula se mueve a lo largo del borde de un disco circular de radio R con velocidad constante en módulo v' (respecto al disco). En ese mismo instante el disco está girando alrededor de un eje perpendicular a él por su centro, con velocidad angular $\vec{\omega}$ y aceleración angular $\vec{\alpha}$ (respecto de un sistema de referencia anclado al suelo), de forma que los sentidos de ambos se oponen al movimiento de P sobre el disco (ver figura). Hallar la velocidad y aceleración de P respecto del sistema de referencia anclado al suelo en dicho instante.



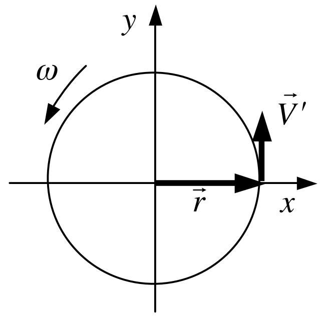
Solución: **I.T.T. 99, 02, 05**

Con los datos que nos dan, y según la figura:

$$\left.\begin{aligned}\vec{r} &= R\,\hat{i} \\ \vec{V}' &= V'\,\hat{j} \\ \vec{\omega} &= -\omega\,\hat{k} \\ \vec{\alpha} &= -\alpha\,\hat{k}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}\vec{V} &= \vec{V}' + \vec{\omega}\times \boxed{\left(V' - \omega R\right)\hat{j}} \\ \vec{a} &= \vec{a}' + 2\vec{\omega}\times\vec{V}' + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) + \vec{\alpha}\times\vec{r} = \\ &\boxed{\left(-\frac{V'^2}{R} + 2\omega V' - \omega^2 R\right)\hat{i} - \alpha R\,\hat{j}}\end{aligned}\right.$$

Un disco se mueve girando alrededor de su centro con una velocidad angular de 2 rad/s, y una mosca comienza a andar sobre el borde del disco con velocidad de 2m/s. Calcular la velocidad y aceleración absolutas de la mosca sabiendo que el radio del disco es 1m y la mosca parte con posición inicial del eje *OX*. El sentido de movimiento de la mosca es el mismo que el del disco y contrario a las agujas del reloj

Solución: I.T.T. 97, 03



Vamos a considerar los siguientes observadores:
Observador O: Observador situado fuera del disco y quieto respecto del suelo.
Observador O': Observador situado dentro del disco.

La velocidad de la mosca vista por O será:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r} = \boxed{4\mathrm{m/s}\,\hat{j}}$$

La aceleración de la mosca vista por O será:

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{V}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

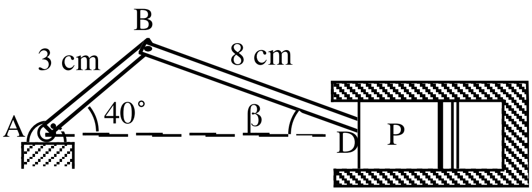
Teniendo en cuenta que la mosca realiza un movimiento circular uniforme visto por O', la aceleración que ve éste será:

$$\vec{a}' = \frac{V'^2}{r}\left(-\hat{i}\right) = -4\mathrm{m/s^2}\,\hat{i}$$

Sustituyendo todos los valores en la expresión de $\vec{a}$ tenemos que:

$$\boxed{\vec{a} = -16\ \mathrm{m/s^2}\,\hat{i}}$$

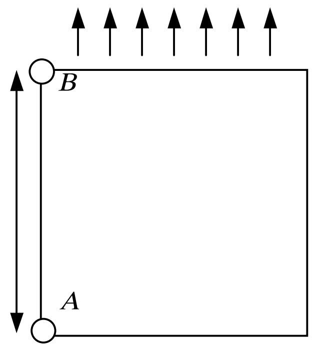
En el sistema motor de la figura la manivela *AB* tiene una velocidad angular constante de 2000 rpm en el sentido de las agujas del reloj. Calcular para la posición indicada de la manivela: a) la velocidad y la aceleración angular de la biela *BD*, b) velocidad y aceleración del pistón *P*



Solución: I.T.I. 92

Texto solución

Una compañía de cadetes, formada en cuadro de 20 m de lado (ver figura), avanza con paso regular. La mascota de la compañía, un pequeño fox-terrier, parte del extremo izquierdo de la última fila (soldado A en la figura), echa un trotecillo en línea recta hacia el extremo izquierdo de la fila de la cabeza (soldado B), y regresa del mismo modo hasta el extremo izquierdo de la última fila. En el momento de alcanzar al soldado A los cadetes han recorrido exactamente 20 m. Suponiendo que el perro corra con velocidad constante y que no pierda tiempo en los giros ¿cuántos metros ha recorrido? Repita el cálculo si en lugar de moverse hacia delante y hacia atrás la mascota corre con velocidad constante alrededor del cuadro manteniéndose tan próximo a los cadetes como le es posible. Se supone, como en el cálculo anterior, que cuando el perro regresa al soldado A la formación ha avanzado 20 m.



Nota: La ecuación $X^4 - 4X^3 - 2X^2 + 4X + 5 = 0$ tiene solución para $X = 4.18113$.

Solución: I.T.T. 05

Si llamamos L a la longitud del cuadrado que forma la compañía de cadetes y tenemos en cuenta que el tiempo invertido en el movimiento por los cadetes será el mismo que invierte el perro, la distancia que habrá recorrido éste será:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta t = \dfrac{L}{v_{cadetes}} \\[2ex] \Delta t = \dfrac{d}{v_{perro}} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad d = \left(\frac{v_{perro}}{v_{cadetes}}\right) L = X\, L$$

donde hemos llamado X al cociente entre las velocidades del perro y de los cadetes (no es necesario conocer en detalle el valor de las velocidades para determinar la distancia recorrida por el perro, basta con conocer su cociente).

Vamos a considerar los siguientes observadores:

Observador O: Observador en reposo respecto del suelo.

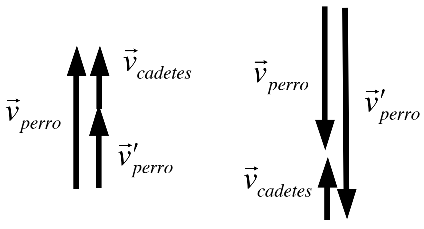
Observador O': Observador moviéndose conjuntamente con los cadetes.

La relación entre las velocidades $\vec{v}_{perro}$ y $\vec{v}'_{perro}$ vistas por los dos observadores es:

$$\vec{v}_{perro} = \vec{v}'_{perro} + \vec{v}_{O'O} = \vec{v}'_{perro} + \vec{v}_{cadetes}$$

El perro va de A a B: $\Delta t_{A\to B} = \dfrac{L}{v'_{perro}} = \dfrac{L}{v_{perro} - v_{cadetes}}$

El perro va de B a A: $\Delta t_{B\to A} = \dfrac{L}{v'_{perro}} = \dfrac{L}{v_{perro} + v_{cadetes}}$



$A \to B$ $\qquad$ $B \to A$

Calculando el tiempo total obtenemos finalmente la distancia d recorrida por el perro:

$$\Delta t = \Delta t_{A\to B} + \Delta t_{B\to A} = \frac{L}{v_{perro} - v_{cadetes}} + \frac{L}{v_{perro} + v_{cadetes}} =$$

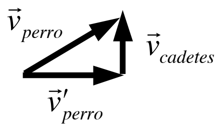
$$= \left(\frac{2v_{perro}}{v_{perro}^2 - v_{cadetes}^2} \right) L = \left(\frac{2X}{X^2 - 1} \right) \left(\frac{L}{v_{cadetes}} \right) = \left(\frac{2X}{X^2 - 1} \right) \Delta t$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{2X}{X^2 - 1} \right) = 1 \quad \Rightarrow \quad X = 1 + \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad d = \left(1 + \sqrt{2}\right) L = 48.3 \text{ m}$$

Para el segundo caso, denominando A, B, C y D a los cadetes en las esquinas de la formación:

El perro va de A a B: $\Delta t_{A\to B} = \dfrac{L}{v'_{perro}} = \dfrac{L}{v_{perro} - v_{cadetes}}$

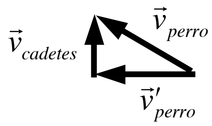
El perro va de B a C: $\Delta t_{B\to C} = \dfrac{L}{v'_{perro}} = \dfrac{L}{\sqrt{v_{perro}^2 - v_{cadetes}^2}}$



$B \rightarrow C$

El perro va de C a D: $\Delta t_{C\to D} = \dfrac{L}{v'_{perro}} = \dfrac{L}{v_{perro} + v_{cadetes}}$

El perro va de D a A: $\Delta t_{D\to A} = \dfrac{L}{v'_{perro}} = \dfrac{L}{\sqrt{v_{perro}^2 - v_{cadetes}^2}}$



$D \rightarrow A$

Calculando el tiempo total obtenemos finalmente la distancia d recorrida por el perro:

$$\Delta t = \Delta t_{A\to B} + \Delta t_{B\to C} + \Delta t_{C\to D} + \Delta t_{D\to A} = \frac{L}{v_{perro} - v_{cadetes}} + \frac{L}{v_{perro} + v_{cadetes}} + \frac{2L}{\sqrt{v_{perro}^2 - v_{cadetes}^2}} =$$

$$= \left(\frac{2v_{perro}}{v_{perro}^2 - v_{cadetes}^2} + \frac{2}{\sqrt{v_{perro}^2 - v_{cadetes}^2}} \right) L = \left(\frac{2X}{X^2 - 1} + \frac{2}{\sqrt{X^2 - 1}} \right) \left(\frac{L}{v_{cadetes}} \right) =$$

$$= \left(\frac{2X}{X^2 - 1} + \frac{2}{\sqrt{X^2 - 1}} \right) \Delta t \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2X}{X^2 - 1} + \frac{2}{\sqrt{X^2 - 1}} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad X^4 - 4X^3 - 2X^2 + 4X + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 4.18113 L = 83.6 \text{ m}$$