CINEMÁTICA: MOVIMIENTO RECTILÍNEO, OTROS DATOS.

Una partícula se mueve en la dirección positiva del eje X, de modo que su velocidad varía según la ley $v = \alpha\sqrt{x}$ donde α es una constante. Teniendo en cuenta que en el momento $t = 0$ se encuentra en $x = 0$. Determinar a) la velocidad y aceleración en función del tiempo, b) la velocidad media de la partícula en el tiempo en el cual recorre los s primeros metros.

Solución: I.T.I. 97, I.T.T. 97, 03

a) Para determinar la posición en función del tiempo operamos de la siguiente forma:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = \alpha\,dt$$

Integrando imponiendo las condiciones iniciales del movimiento en los límites de las integrales tenemos que:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^t \alpha\,dt \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{x} = \alpha t \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{4}\alpha^2 t^2$$

Se trata por lo tanto de un movimiento uniformemente acelerado donde la velocidad y la aceleración vendrán dadas por:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \boxed{\frac{1}{2}\alpha^2 t} \qquad\qquad a = \frac{dv}{dt} = \boxed{\frac{1}{2}\alpha^2}$$

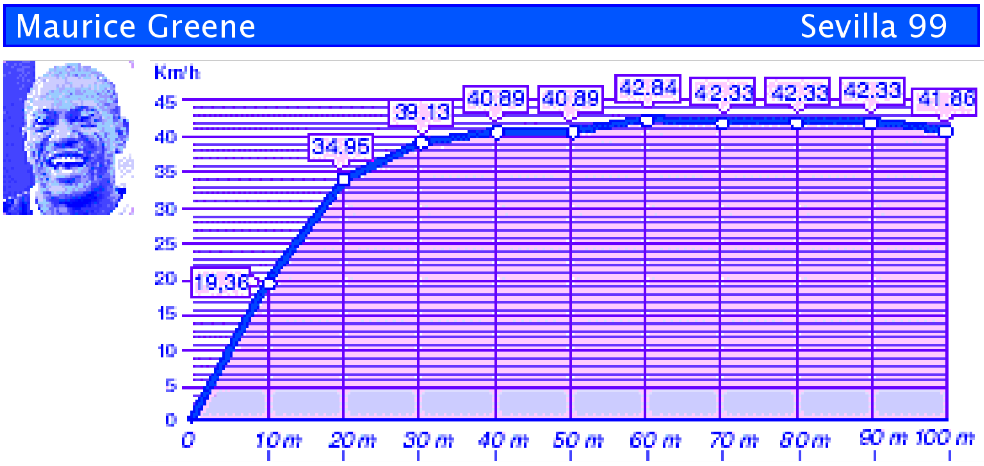
b) Como la velocidad es siempre positiva, y el móvil partió del origen, la distancia recorrida en función del tiempo es igual en todo momento a la coordenada x del movil:

$$s(t) = \int_0^t |v|\,dt = \int_0^t v\,dt = \frac{1}{4}\alpha^2 t^2 = x(t) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{\alpha}\sqrt{s}$$

La velocidad media en el intervalo en que ha recorrido la distancia s será:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - 0}{t - 0} = \frac{s(t)}{t} = \frac{s}{\frac{2}{\alpha}\sqrt{s}} = \boxed{\frac{\alpha}{2}\sqrt{s}}$$

En la siguiente gráfica se muestra la evolución de la velocidad en función de su posición en la carrera de 100 m lisos que el atleta Maurice Greene (entonces recordman de la distancia con 9.79 s) realizó en los campeonatos de atletismo de Sevilla 1999. Ayudándose de esta gráfica: a) Dibuje una gráfica aproximada de su aceleración en función de su posición, b) Calcule los tiempos parciales cada 10 m y utilice esto para dibujar gráficas de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo, c) Por último indique por cuanto no batió el récord mundial.



Solución: **I.T.I. 99, 02, 05, I.T.T. 99, 02, 05**

Construyamos la siguiente tabla de valores:

x	$V(\text{km}/\text{h})$	$V(\text{m}/\text{s})$	$V^2(\text{m}^2/\text{s}^2)$	$a(\text{m}/\text{s}^2)$	$\Delta t(\text{s})$
0	0	0	0		
10	19.36	5.378	28.92	1.446	3.719
20	34.95	9.708	94.25	3.267	1.325
30	39.13	10.869	118.14	1.195	0.972
40	40.89	11.358	129.01	0.543	0.901
50	40.89	11.358	129.01	0	0.880
60	42.84	11.900	141.61	0.630	0.860
70	42.33	11.758	138.26	–0.168	0.845
80	42.33	11.758	138.26	0	0.850
90	42.33	11.758	138.26	0	0.850
100	41.86	11.628	135.21	–0.153	0.855

Para calcular las aceleraciones hemos hecho la suposición de que en cada tramo la aceleración es constante y tenemos un movimiento uniformemente acelerado:

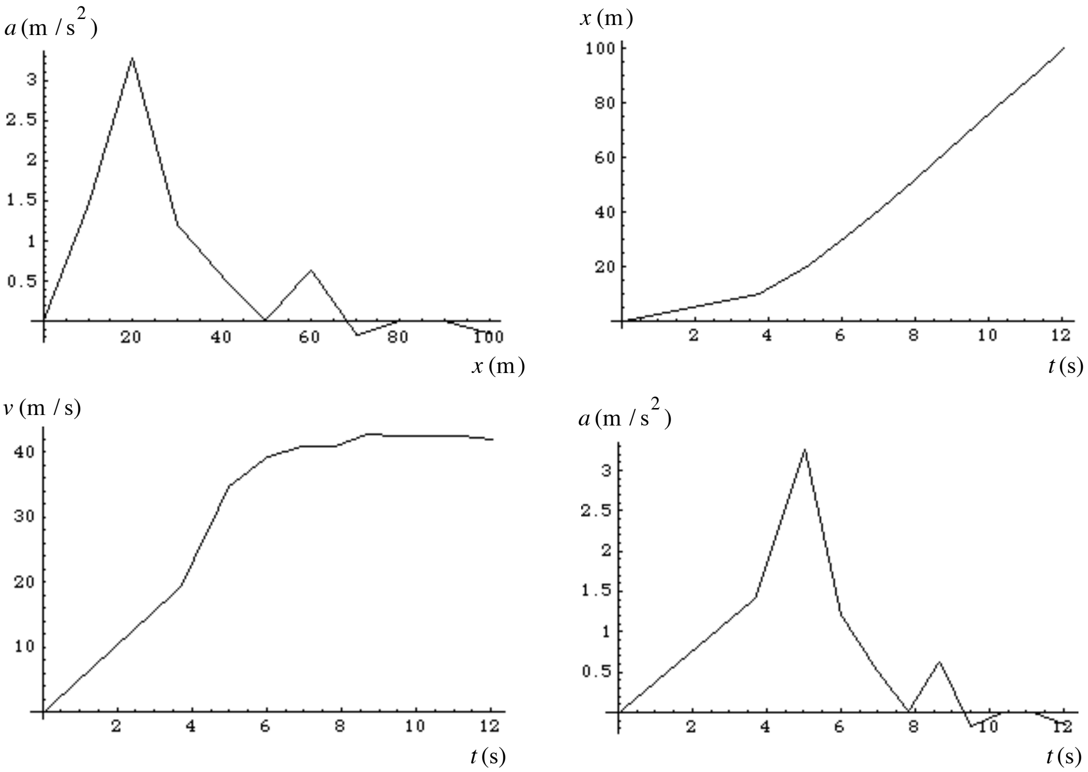
$$v_{n+1}^2 = v_n^2 + 2a\left(x_{n+1} - x_n\right)$$

Para calcular los tiempos utilizamos que en el movimiento uniformemente acelerado:

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} \qquad \text{(salvo si la aceleración es nula, en ese caso utilizamos } \Delta t = \frac{\Delta x}{v}\text{)}$$

Si sumamos todos los intervalos de tiempo de la tabla anterior nos sale un tiempo total de 12.06 s, bastante mayor que el tiempo real invertido por el corredor durante la carrera que fue de 9.80 s (se quedo a una centésima del récord mundial en aquel momento que él mismo ostentaba). Esto nos indica que la aproximación de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado utilizada para la construcción de la tabla anterior no es del todo correcta, sobre todo en los primeros instantes de la carrera (¡no es creíble un tiempo de casi cuatro segundos para recorrer los primeros diez metros!).

Las gráficas aproximadas que nos piden serán (utilizando los valores de la tabla):



Un movimiento viene definido por $a = -k\,v$ (k = cte.), siendo coincidentes los orígenes de espacio y tiempo y estando animada la partícula en ese instante por una velocidad v_0. Expresar velocidad en función del tiempo, el espacio en función del tiempo y la velocidad en función del espacio. Representar gráficamente estas dependencias.

Solución: I.T.I. 98, 99, 02, 03, 05, I.T.T. 99, 02, 05

La aceleración es la derivada de la velocidad, luego:

$$\frac{dv}{dt} = -k\,v$$

Separando variables, velocidad a un lado y tiempo al otro:

$$\frac{dv}{v} = -k\,dt$$

Integrando, y teniendo en cuenta las condiciones iniciales del movimiento:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\int_0^t k\,dt \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -k\,t \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(t) = v_0\,e^{-k\,t}} \qquad (1)$$

Para hallar la posición en función del tiempo, como la velocidad es la derivada de la posición tenemos que:

$$\frac{dx}{dt} = v_0\,e^{-kt}$$

Separando variables, posición a un lado y tiempo al otro:

$$dx = v_0\,e^{-kt}\,dt$$

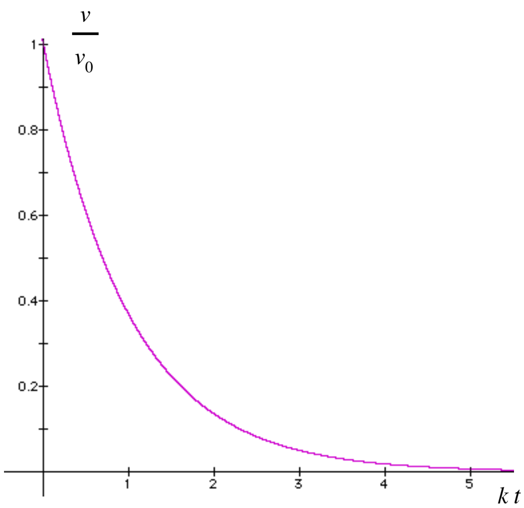
Integrando, y teniendo en cuenta las condiciones iniciales del movimiento:

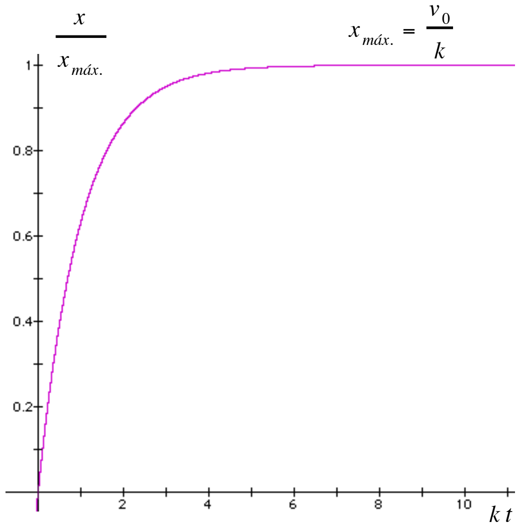
$$\int_0^x dx = \int_0^t v_0\,e^{-kt}\,dt \quad \Rightarrow \quad x(t) = -\frac{v_0}{k}e^{-k\,t}\Big]_0^t = \boxed{\frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-k\,t}\right)} \qquad (2)$$

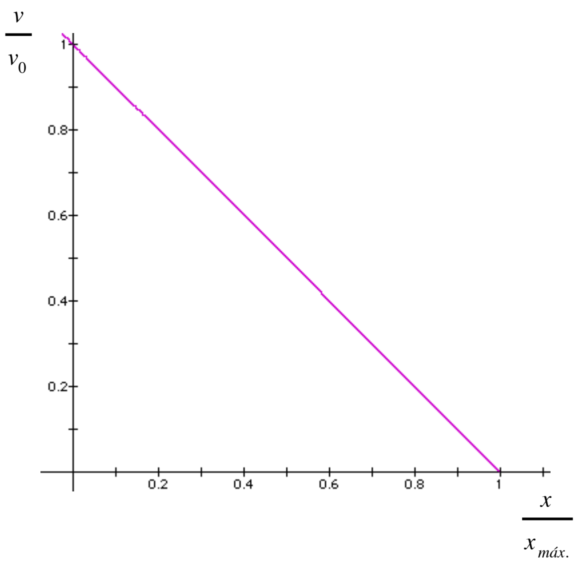
Despejando t en (2) y sustituyéndolo en (1):

$$e^{-kt} = \left(1 - \frac{k\,x}{v_0}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(x) = v_0\left(1 - \frac{k\,x}{v_0}\right)}$$

Las representaciones gráficas serán:


$\frac{v}{v_0}$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
1
2
3
4
5
$k\,t$


$\frac{x}{x_{máx.}}$
$x_{máx.} = \frac{v_0}{k}$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
2
4
6
8
10
$k\,t$


$\frac{v}{v_0}$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1
$\frac{x}{x_{máx.}}$

Un cuerpo se encuentra en movimiento rectilíneo con una aceleración dada por $a = 32 - 4v$. En $t_0 = 0$ sabemos que: $x_0 = 0$ y $v_0 = 4\text{ms}^{-1}$. Halle: a) v como función de t, b) x como función de t, c) x como función de v. Represéntelas.

Solución: **I.T.I. 96, 00, 01, 04, I.T.T. 96, 00, 01, 04**

a) La aceleración es la derivada de la velocidad, luego:

$$\frac{dv}{dt} = 32 - 4v$$

Separando variables, velocidad a un lado y tiempo al otro:

$$\frac{dv}{32 - 4v} = dt$$

Integrando, y teniendo en cuenta las condiciones iniciales del movimiento:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{32 - 4v} = \int_{t_0}^{t} dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}\ln\left(\frac{32 - 4v_0}{32 - 4v}\right) = (t - t_0) \quad \Rightarrow \quad v(t) = 8 - (8 - v_0)e^{-4(t - t_0)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v(t) = 8 - 4e^{-4t}} \quad (1)$$

b) La velocidad es la derivada de la posición, luego:

$$\frac{dx}{dt} = 8 - 4e^{-4t}$$

Separando variables, posición a un lado y tiempo al otro:

$$dx = \left(8 - 4e^{-4t}\right)dt$$

Integrando, y teniendo en cuenta las condiciones iniciales del movimiento:

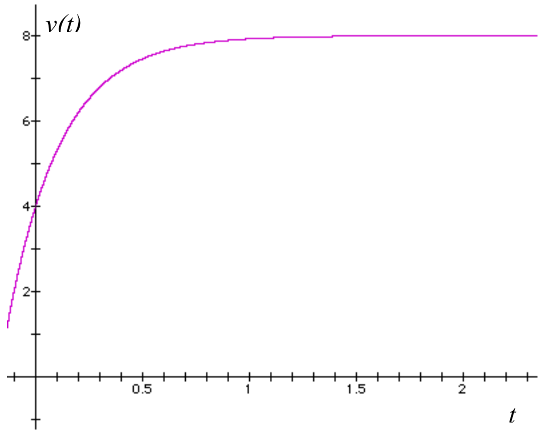
$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} \left(8 - 4e^{-4t}\right)dt \quad \Rightarrow \quad x - x_0 = 8(t - t_0) + e^{-4t} - e^{-4t_0} \quad \Rightarrow$$

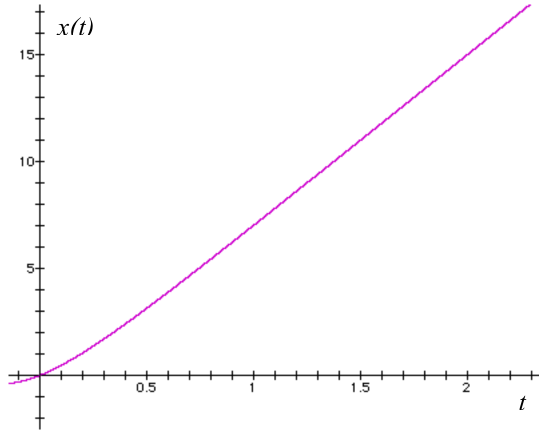
$$\Rightarrow \quad x(t) = x_0 + 8(t - t_0) + e^{-4t} - e^{-4t_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = 8t + e^{-4t} - 1} \quad (2)$$

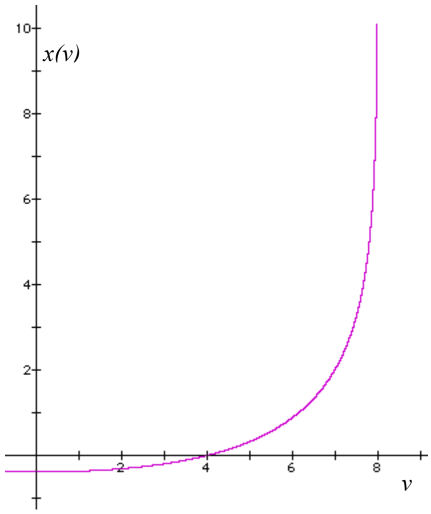
c) Despejando t en (1) y sustituyéndolo en (2):

$$t = -\frac{1}{4}\ln\left(2 - \frac{v}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(v) = -2\ln\left(2 - \frac{v}{4}\right) + 1 - \frac{v}{4}}$$

Las representaciones gráficas serán:







(Las unidades utilizadas en el problema son las del S.I.)

La aceleración de una móvil que se mueve en línea recta viene dada por $a = -k v^2$, donde k es una constante positiva. Suponiendo que cuando $t = 0$, su velocidad y posición son v_0 y x_0 respectivamente, encontrar la velocidad y posición en función del tiempo, y la velocidad en función de la posición.

Solución: **I.T.I. 95**

Texto solución

La aceleración de una partícula se define por la relación $a = -k v^2$, con $k = 0.0125\,\mathrm{m}^{-1}$. Si se le comunica a la partícula una velocidad inicial v_0 hallar la distancia recorrida: a) hasta que su velocidad sea $v = v_0/2$, b) antes de pararse, c) ¿qué tiempo tarda en alcanzar $v_0/2$?

Solución: **I.T.I. 99, 02, 05, I.T.T. 99, 02, 05**

La aceleración es la derivada de la velocidad, luego:

$$\frac{dv}{dt} = -k v^2$$

Separando variables, velocidad a un lado y tiempo al otro:

$$\frac{dv}{v^2} = -k\, dt$$

Integrando, y teniendo en cuenta las condiciones iniciales del movimiento:

$$\int_{v_0}^{v} -\frac{dv}{v^2} = \int_0^t k\, dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = k t \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 k t}$$

Para hallar la posición en función del tiempo, como la velocidad es la derivada de la posición tenemos que:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1 + v_0 k t}$$

Separando variables, posición a un lado y tiempo al otro:

$$dx = \frac{v_0}{1 + v_0 k t}\, dt$$

Integrando, y teniendo en cuenta las condiciones iniciales del movimiento:

$$\int_0^x dx = \int_0^t \frac{v_0}{1 + v_0 k t}\, dt \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{k} \ln(1 + v_0 k t)\Big]_0^t = \frac{1}{k} \ln(1 + v_0 k t)$$

a) Si llamamos *t** al momento en que su velocidad se ha reducido a la mitad:

$$v(t^*) = \frac{v_0}{1 + v_0\, k\, t^*} = \frac{v_0}{2} \quad \Rightarrow \quad v_0\, k\, t^* = 1$$

$$\Rightarrow \quad x(t^*) = \frac{1}{k}\ln(2) = \boxed{55.45 \text{ m}}$$

b) Dada la dependencia de la velocidad con el tiempo: $v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0\, k\, t}$, la velocidad sólo se anulará para un tiempo infinito, $v(\infty) = 0$. Sustituyendo en la expresión de la posición con el tiempo: $x(t) = \frac{1}{k}\ln(1 + v_0\, k\, t)$, nos da una distancia recorrida infinita, $x(\infty) = \infty$.

c) Del apartado a) obtenemos que: $v_0\, k\, t^* = 1 \quad \Rightarrow \quad t^* = \frac{1}{v_0\, k} = \boxed{\frac{80 \text{ m}}{v_0}}$