SIST. DE PARTÍCULAS: MASA REDUCIDA

Demostrar que en un sistema de dos partículas los momentos lineales referidos al c.m. son: $\vec{p}_1' = \mu\vec{v}_{12}$, $\vec{p}_2' = -\mu\vec{v}_{12}$ y que $\vec{L}_{c.m.} = \vec{r}_{12} \times \mu\vec{v}_{12}$ siendo μ la masa reducida del sistema.

Solución: **I.T.T. 03**

La posición y la velocidad del centro de masas del sistema vendrán dadas por:

$$\vec{r}_{C.M.} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad , \quad \vec{v}_{C.M.} = \frac{d\vec{r}_{C.M.}}{dt} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

La posición y velocidad de cada partícula referida al centro de masas serán:

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{r}_{C.M.} = \vec{r}_1 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \left(\frac{\mu}{m_1}\right)\vec{r}_{12} \qquad \vec{v}_1' = \frac{d\vec{r}_1'}{dt} = \left(\frac{\mu}{m_1}\right)\vec{v}_{12}$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{r}_{C.M.} = \vec{r}_2 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\left(\frac{\mu}{m_2}\right)\vec{r}_{12} \qquad \vec{v}_2' = \frac{d\vec{r}_2'}{dt} = -\left(\frac{\mu}{m_2}\right)\vec{v}_{12}$$

Los momentos lineales de las partículas respecto al centro de masas serán:

$$\boxed{\vec{p}_1' = m_1\vec{v}_1' = \mu\vec{v}_{12} \quad , \quad \vec{p}_2' = m_2\vec{v}_2' = -\mu\vec{v}_{12}}$$

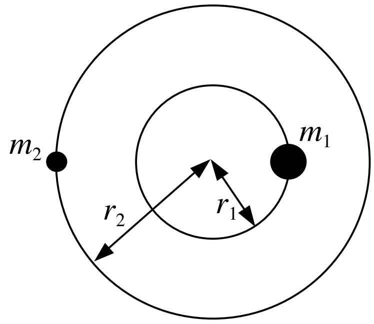
El momento angular respecto al centro de masas será:

$$\vec{L}_{C.M.} = \vec{r}_1' \times (m_1\vec{v}_1') + \vec{r}_2' \times (m_2\vec{v}_2') = \left(\frac{\mu}{m_1}\right)\vec{r}_{12} \times \mu\vec{v}_{12} + \left(\frac{\mu}{m_2}\right)\vec{r}_{12} \times \mu\vec{v}_{12} = \boxed{\vec{r}_{12} \times \mu\vec{v}_{12}}$$

Un astrónomo observa un sistema estelar doble formado por dos estrellas que realizan, alrededor de un punto común, un movimiento circular de periodo T y de radios r_1 y r_2 respectivamente. Determinar la masa de las dos estrellas.

Solución: I.T.I. 02, 04, I.T.T. 96, 02, 04

El punto común alrededor del cual giran las dos estrellas es el C.M. del sistema. Situando el origen de coordenadas en dicho punto:



$$\vec{r}_{C.M.} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1 r_1 - m_2 r_2}{m_1 + m_2} = 0 \qquad (1)$$

La aceleración relativa de la estrella 2 respecto de la 1 la podemos calcular aplicando la siguiente ley de Newton para el movimiento relativo: $\vec{F}_{1\to 2} = \mu\vec{a}_{21}$, donde μ es la masa reducida del sistema. Teniendo en cuenta que la fuerza que se ejerce entre las estrellas es gravitatoria y que vista desde 1 la estrella 2 realiza un movimiento circular uniforme de radio $r_{21} = r_1 + r_2$ y periodo T, con lo que la aceleración relativa será una aceleración normal, $a_{21} = \frac{v_{21}^2}{r_{21}}$, tenemos que:

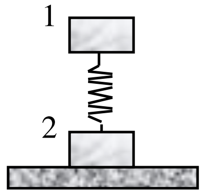
$$G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} = \mu a_{21} \quad \Rightarrow \quad G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)\frac{v_{21}^2}{r_{21}} = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)\frac{\left(2\pi r_{21}/T\right)^2}{r_{21}}$$

$$\Rightarrow \quad m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 r_{21}^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2\left(r_1 + r_2\right)^3}{GT^2} \qquad (2)$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas obtenemos que:

$$\boxed{m_1 = \frac{4\pi^2\left(r_1 + r_2\right)^2 r_2}{GT^2} \quad , \quad m_2 = \frac{4\pi^2\left(r_1 + r_2\right)^2 r_1}{GT^2}}$$

Dos cuerpos 1 y 2 de masas 1.0 kg y 4.1 kg respectivamente se unen entre sí por un resorte de longitud natural l_0 = 20 cm, como se indica en la figura. Cuando se pone a oscilar, el cuerpo 1 realiza oscilaciones armónicas verticales de frecuencia angular ω = 25 rad/s. Si partiendo de la situación de equilibrio empujamos el cuerpo 2 hacia abajo 10 cm y soltamos, despreciando la masa del resorte determinar: a) la frecuencia angular de las oscilaciones que se producen en el sistema. En el momento en que el cuerpo 2 alcanza la máxima altura calcular: b) la altura del cuerpo 2, c) la altura del cuerpo 1, d) la energía interna del sistema, e) la energía total del sistema.



Solución: I.T.I. 02, I.T.T. 99, 02

Tomemos el origen de alturas $y = 0$ en el suelo. Cuando el sistema está en reposo la fuerza elástica que aparece en el muelle tiene que equilibrar el peso del cuerpo 1 con lo que en dicha situación de equilibrio la nueva longitud del muelle será:

$$m_1 g = k\Delta l = m_1\omega^2\Delta l \quad \Rightarrow \quad l_{equil.} = l_0 - \Delta l = l_0 - \frac{g}{\omega^2} = 18.432 \text{ cm}$$

Cuando empujamos el cuerpo 1 hacia abajo 10 cm, dicho cuerpo va a iniciar un M.A.S. de amplitud A = 10 cm, alrededor de la posición de equilibrio:

$$y_1(t) - l_{equil.} = A\cos(\omega t + \varphi) \quad , \quad v_{1,y}(t) = \frac{dy_1}{dt} = -\omega A \,\text{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$a_{1,y}(t) = \frac{dv_1}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 A\left(y_1(t) - l_{equil.}\right)$$

(el valor de la fase inicial φ dependerá del instante que hemos escogido para poner a cero nuestro cronómetro)

En dicho movimiento va a tener una aceleración vertical que según la segunda ley de Newton será:

$$\vec{F}_{elást.\to 1} + m_1\vec{g} = m_1\vec{a}_1 \quad \Rightarrow \quad F_{elást.\to 1,y} - m_1 g = m_1 a_{1,y} = -m_1\omega^2\left(y_1 - l_{equil.}\right)$$

$$\Rightarrow \quad F_{elást.\to 1,y} = m_1 g - m_1\omega^2\left(y_1 - l_{equil.}\right) = m_1 g - m_1\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

Teniendo en cuenta que las fuerzas elásticas que ejerce el muelle sobre cada cuerpo son iguales y de sentido contrario, la segunda ley de Newton aplicada al cuerpo 2 nos informará de la magnitud de la normal que el suelo ejerce sobre 2 (que es igual a la magnitud de la fuerza que 2 ejerce sobre el suelo):

$$\vec{N}_{suelo\to 2} + \vec{F}_{elást.\to 2} + m_2\vec{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{suelo\to 2} + F_{elást.\to 2,y} - m_2 g = 0$$

$$\Rightarrow \quad N_{suelo\to 2} - F_{elást.\to 1,y} - m_2 g = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{suelo\to 2} + m_1\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) - m_1 g - m_2 g = 0$$

$$\Rightarrow \quad N_{suelo\to 2} = (m_1 + m_2)g - m_1\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

Según la expresión anterior el valor mínimo de la normal sería:

$$N_{suelo\to 2,mínima} = (m_1 + m_2)g - m_1\omega^2 A = -12.52\ \text{N} < 0 \quad \text{¡ABSURDO!}$$

La normal no puede tomar valores negativos. El resultado anterior nos indica que en cierto momento, mientras el cuerpo 1 está ascendiendo, la normal se anulará, el cuerpo 2 perderá el contacto con el suelo y nuestro sistema saltará conjuntamente hacia arriba, al mismo tiempo que oscilará alargando y contrayendo el muelle alrededor de su longitud natural l_0.

a) Cuando el sistema con los dos cuerpos y el muelle se encuentre en el aire la distancia relativa entre los dos objetos variará de forma periódica alrededor de la longitud natural l_0 del muelle. La frecuencia ω' de oscilación la podremos calcular resolviendo la segunda ley de Newton para el movimiento relativo y utilizando la masa reducida μ del sistema:

$$\vec{F}_{12} = \mu\vec{a}_{12} \quad \Rightarrow \quad F_{12,y} = \mu a_{12,y} \quad \Rightarrow \quad -k(y_{12} - l_0) = \mu a_{12,y}$$

$$\Rightarrow \quad a_{12,y} = -\left(\frac{k}{\mu}\right)(y_{12} - l_0) \quad \Rightarrow \quad \text{M.A.S.: } y_{12}(t) - l_0 = A'\cos(\omega' t + \varphi')$$

$$\text{donde: } \omega' = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} = \sqrt{\frac{k}{m_1}}\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_2}} = \omega\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_2}} = \boxed{27.9\ \text{rad/s}}$$

b) Pongamos a cero nuestro cronómetro, $t = 0$, cuando nuestro sistema con los dos cuerpos perdió el contacto con el suelo. En ese momento la normal del suelo sobre el cuerpo 2 se había hecho nula:

$$(m_1 + m_2)g - m_1\omega^2 A\cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1\omega^2 A}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = -0.644\ \text{rad} = -36.9^\circ$$

(hay que escoger el valor negativo ya que en ese momento el cuerpo 1 está ascendiendo: $v_{1,y}(0) = -\omega A\,\text{sen}\,\varphi > 0$)

En ese instante la posición y velocidad de los dos cuerpos serán:

$$y_1(0) = A\cos\varphi + l_{equil.} = \frac{(m_1+m_2)g}{m_1\omega^2} + \left(l_0 - \frac{g}{\omega^2}\right) = 26.4\ \text{cm}$$

$$v_{1,y}(0) = -\omega A \operatorname{sen}\varphi = \omega A\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \omega\sqrt{A^2 - \left[\frac{(m_1+m_2)g}{m_1\omega^2}\right]^2} = 150\ \text{cm/s}$$

$$y_2(0) = 0 \quad , \quad v_{2,y}(0) = 0$$

Para el movimiento del C.M. tenemos que inicialmente:

$$y_{c.m.}(0) = \frac{m_1 y_1(0) + m_2 y_2(0)}{m_1 + m_2} = \frac{g}{\omega^2} + \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\left(l_0 - \frac{g}{\omega^2}\right) = 5.18\ \text{cm}$$

$$v_{c.m.,y}(0) = \frac{m_1 v_{1,y}(0) + m_2 v_{2,y}(0)}{m_1 + m_2} = \omega\sqrt{\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 A^2 - \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2} = 29.4\ \text{cm/s}$$

La segunda ley de Newton para el movimiento de traslación del C.M. del sistema nos dice que va a realizar un movimiento vertical con una aceleración igual a la aceleración de la gravedad:

$$\vec{F}_{ext.} = M_{total}\,\vec{a}_{c.m.} \quad \Rightarrow \quad M_{total}\,\vec{g} = M_{total}\,\vec{a}_{c.m.} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{c.m.} = \vec{g}$$

La posición del C.M. del sistema en cualquier instante del tiempo vendrá dada por:

$$y_{c.m.}(t) = y_{c.m.}(0) + v_{c.m.,y}(0)\,t - \frac{1}{2}g t^2$$

Para el movimiento relativo entre los dos cuerpos tenemos que inicialmente:

$$y_{12}(0) = y_1(0) - y_2(0) = \frac{(m_1+m_2)g}{m_1\omega^2} + \left(l_0 - \frac{g}{\omega^2}\right) = 26.4\ \text{cm}$$

$$v_{12,y}(0) = v_{1,y}(0) - v_{2,y}(0) = \omega\sqrt{A^2 - \left[\frac{(m_1+m_2)g}{m_1\omega^2}\right]^2} = 150\ \text{cm/s}$$

Y sabemos que dicho movimiento relativo es un M.A.S. alrededor de la longitud natural l_0 del muelle:

$$y_{12}(t) - l_0 = A'\cos(\omega' t + \varphi')$$

Donde $\omega' = 27.9\ \text{rad/s}$ y A' y φ' son constantes que hay que determinar a partir de las condiciones iniciales del movimiento:

$$\left.\begin{array}{l} y_{12}(0) - l_0 = A'\cos\varphi' \\ \\ v_{12,y}(0) = -\omega' A' \operatorname{sen}\varphi' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg}\varphi' = -\dfrac{v_{12,y}(0)}{\omega'\left(y_{12}(0) - l_0\right)} \quad \Rightarrow \quad \varphi' = -0.697 \text{ rad} = -39.9^{\circ} \\ \\ A' = \dfrac{y_{12}(0) - l_0}{\cos\varphi'} = 8.39 \text{ cm} \end{array}\right.$$

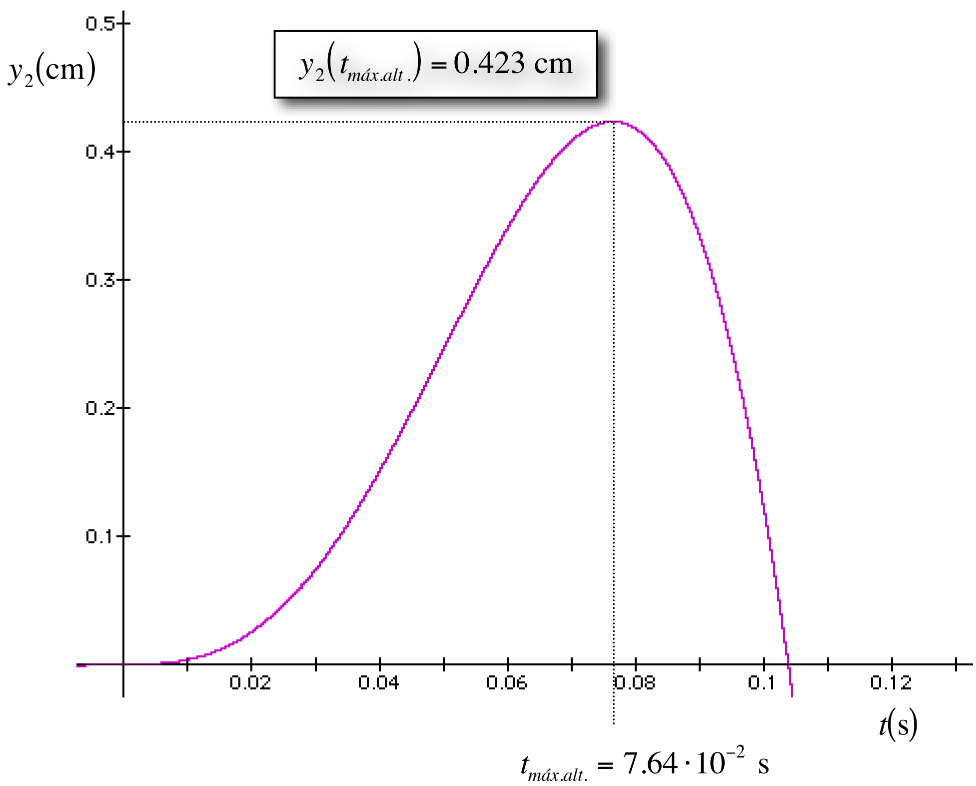
Una vez conocido en función del tiempo el movimiento del C.M. y el movimiento relativo entre los dos cuerpos podemos conocer la posición en cualquier momento de cada uno de los cuerpos:

$$\left.\begin{array}{l} y_{c.m.}(t) = \dfrac{m_1 y_1(t) + m_2 y_2(t)}{m_1 + m_2} \\ \\ y_{12}(t) = y_1(t) - y_2(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1(t) = y_{c.m.}(t) + \left(\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\right) y_{12}(t) \\ \\ y_2(t) = y_{c.m.}(t) - \left(\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\right) y_{12}(t) \end{array}\right.$$

En concreto para el cuerpo 2 tenemos que:

$$y_2(t) = y_{c.m.}(0) + v_{c.m.,y}(0)\, t - \frac{1}{2} g t^2 - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)\left[A'\cos(\omega' t + \varphi') + l_0\right]$$

Representándolo gráficamente vemos que la altura máxima del cuerpo 2 se alcanza para $t_{máx.alt.} = 3.07$ s, y que en ese momento su altura es:



c) En ese instante la posición del cuerpo 1 será:

$$y_2(t_{máx.alt.}) = y_{c.m.}(0) + v_{c.m.,y}(0)\,t_{máx.alt.} - \frac{1}{2} g t^2_{máx.alt.} +$$

$$+\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)\left[A' \cos\left(\omega' t_{máx.alt.} + \varphi'\right) + l_0\right] = \boxed{21.6 \text{ cm}}$$

d) y e) Como a lo largo de todo el problema las únicas fuerzas que realizan trabajo (las fuerzas elásticas y de gravedad) son conservativas la energía total del sistema permanecerá constante. En la situación inicial, cuando al muelle, que ya estaba inicialmente comprimido por el peso del cuerpo 1 lo comprimimos una distancia adicional de 10 cm y soltamos el sistema, su energía era (tomamos el origen de energías potenciales gravitatorias a ras del suelo):

$$E = E_{pot.grav.,1} + E_{pot.grav.,2} + E_{pot.elást.} =$$

$$= m_1 g y_1 + m_1 g y_2 + \frac{1}{2} k \left(l_0 - y_{12}\right)^2 = \boxed{5.00 \text{ J}}$$

Por otro lado la energía total del sistema se relaciona con la energía propia U y con la energía interna $U^{int.}$ de la siguiente forma:

$$E = U + E_{pot.ext.} = \left[U^{\text{int}} + \frac{1}{2} M v^2_{c.m.}\right] + \left[M g y_{c.m.}\right]$$

$$\Rightarrow \quad U^{\text{int}} = E - \frac{1}{2} M v^2_{c.m.} - M g y_{c.m.}$$

Según la expresión anterior al variar la posición y la velocidad del C.M. la energía interna del sistema parecería variar a lo largo del tiempo, en realidad las fuerzas externas de gravedad al actuar sobre el C.M. su trabajo, menos variación de la energía potencial gravitatoria: $-\Delta\left(M g y_{c.m.}\right)$ es igual a la variación de la energía cinética de traslación del sistema: $\Delta\left(\frac{1}{2} M v^2_{c.m.}\right)$ con lo que $\Delta\left(\frac{1}{2} M v^2_{c.m.} + M g y_{c.m.}\right) = 0$, sustituyendo para la expresión de la energía interna de este sistema:

$$\Delta U^{\text{int}} = \Delta E - \Delta\left(\frac{1}{2} M v^2_{c.m.} + M g y_{c.m.}\right) = 0$$

Podemos calcular la energía interna del sistema en cualquier momento, en concreto con los datos que tenemos para $t = 0$:

$$U^{\text{int}} = E - \frac{1}{2} M v^2_{c.m.}(0) - M g y_{c.m.}(0) = \boxed{2.20 \text{ J}}$$