

M.A.S. AMORTIGUADO

Un bloque suspendido de un muelle se pone a oscilar con una amplitud inicial de 120 mm. Después de 2.4 minutos la amplitud ha disminuido hasta 60 mm. a) ¿Cuándo será la amplitud de 30 mm? b) Determinar el valor de γ para este movimiento.

Solución: I.T.T. 99, 02, 05

a) y b): La variación con el tiempo de la amplitud de oscilación es: $A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$, el coeficiente γ será:

$$\gamma = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{A_0}{A}\right) = 4.8 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

Cuando la amplitud sea $A' = 30$ mm el tiempo transcurrido será:

$$t = \frac{1}{\gamma} \ln\left(\frac{A_0}{A'}\right) = 4.8 \text{ min.}$$

(Lógico si la amplitud disminuyó a la mitad en 2.4 minutos tardará otros 2.4 minutos en reducirse de nuevo a la mitad)

Un péndulo simple tiene un periodo de 2 s y una amplitud de 2° . Después de 10 oscilaciones completas su amplitud se ha reducido a 1.5° . Halle la constante de amortiguamiento γ .

Solución: I.T.T. 95, 00, 04

La amplitud del movimiento oscilatorio infraamortiguado disminuye exponencialmente:

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$$

donde A_0 es la amplitud inicial para $t = 0$. Despejando de la expresión anterior la constante de amortiguamiento γ cuando ha transcurrido un tiempo $t_1 = NT = 20$ s :

$$\gamma = \frac{1}{t_1} \ln\left(\frac{A_0}{A(t_1)}\right) = 1.44 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$

Una esfera de 3 kg que cuando cae libremente en el aire alcanza una velocidad límite de 25 m/s (suponer que el rozamiento es $\vec{F}_{roz.} = -b\vec{v}$) se une a un muelle de constante elástica $k = 400$ N/m y oscila con una amplitud inicial de 20 cm. a) ¿Cuánto vale la constante de

Jose Javier Sandoz R..., 13/12/04 12:37

Eliminado: Texto solución

amortiguamiento γ ?, b) ¿Cuándo será la amplitud 10 cm?, c) ¿Cuánta energía se habrá perdido hasta ese momento?

Solución: I.T.T. 00, 03

- a) Tomemos como sentido positivo de desplazamiento de la esfera verticalmente hacia abajo. Cuando alcanza la velocidad límite la fuerza de rozamiento y el peso se equilibran:

$$mg = \lambda v_{lim.} \Rightarrow \lambda = \frac{mg}{v_{lim.}} \Rightarrow \gamma = \frac{\lambda}{2m} = \frac{g}{2v_{lim.}} = 0.196 \text{ s}^{-1}$$

- b) La variación con el tiempo de la amplitud de oscilación es: $A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$ con lo que en el instante t_1 en que la amplitud vale $A_1 = 10$ cm:

$$A_1 = A(t_1) = A_0 e^{-\gamma t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{\gamma} \ln\left(\frac{A_0}{A_1}\right) = \frac{\ln(2)}{\gamma} = 3.54 \text{ s}$$

- c) La energía total de oscilador está relacionada con su amplitud de oscilación de la forma: $E = \frac{1}{2}k(\text{Amplitud})^2$. En nuestro caso tendremos:

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_1 - E_0 = \frac{1}{2}kA_1^2 - \frac{1}{2}kA_0^2 = \frac{1}{2}k(A_1^2 - A_0^2) = \\ &= \frac{1}{2}k\left(\left[\frac{A_0}{2}\right]^2 - A_0^2\right) = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}kA_0^2\right) = -6 \text{ J} \end{aligned}$$

Se pierden las tres cuartas partes de la energía inicial.

Demostrar que el cociente de las amplitudes de dos oscilaciones sucesivas en un oscilador infraamortiguado es constante.

Solución: I.T.T. 00

Texto solución

Suponga que, para un oscilador amortiguado, γ es mucho menor que ω_0 (movimiento muy subamortiguado), de modo que la amplitud permanece esencialmente constante durante una oscilación. Verifique que: a) la energía cinética del oscilador amortiguado puede escribirse de la forma $E_c = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t} \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$ y b) que la energía total es $E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t}$.

Jose Javier Sandoz Ruiz 16/1/07 10:55

Eliminado: infraamortiguado

Solución: I.T.T. 01, 04

- a) La posición en función del tiempo del oscilador es (utilizamos la función seno):

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Derivando y teniendo en cuenta que $\gamma \ll \omega_0$:

$$\begin{aligned} v(t) &= -\gamma Ae^{-\gamma t} \sin(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0 Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t + \varphi) = \\ &= Ae^{-\gamma t} [-\gamma \sin(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)] \approx \omega_0 Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

Con lo cual la energía cinética del oscilador será:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t} \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

- b) La energía total de oscilador está relacionada con su amplitud de oscilación de la forma: $E = \frac{1}{2}k(Amplitud)^2$. En nuestro caso tendremos:

$$E = \frac{1}{2}k(Ae^{-\gamma t})^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2(Ae^{-\gamma t})^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t}$$

Una partícula oscila armónicamente a lo largo del eje X junto a la posición de equilibrio $x = 0$. La frecuencia de las oscilaciones $\omega_0 = 4.00$ rad/s. En cierto momento la posición de la partícula es de 25 cm y su velocidad 100 cm/s. Hallar la posición de la partícula y su velocidad 2.40 s más tarde si a) no existe rozamiento, b) el rozamiento es tal que el amortiguamiento es crítico, c) el amortiguamiento es la mitad que en b), d) el amortiguamiento es el doble que en b).

Solución: I.T.T. 96, 00, 03

En cada caso habrá que aplicar las condiciones iniciales a la ecuación de movimiento. Si ponemos en marcha el cronómetro en el instante inicial y llamamos t_1 al instante en el que nos piden la posición y la velocidad de la partícula:

a) M.A.S. sin rozamiento:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ v(t) &= \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x_0 &= A \cos(\varphi) \\ v_0 &= -\omega_0 A \sin(\varphi) \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \arctg\left(-\frac{v_0}{x_0 \omega_0}\right) = -\frac{\pi}{4} \\ A &= \frac{x_0}{\cos(\varphi)} = 35.36 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x(t_1) &= A \cos(\omega_0 t_1 + \varphi) = -29 \text{ cm} \\ v(t_1) &= -\omega_0 A \sin(\omega_0 t_1 + \varphi) = -81 \text{ cm/s} \end{aligned} \right.$$

b) M.A.S. con rozamiento crítico, $\gamma = \omega_0$:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= (C_1 + C_2 t) e^{-\gamma t} \\ v(t) &= \frac{dx}{dt} = [C_2 - \gamma(C_1 + C_2 t)] e^{-\gamma t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x_0 &= C_1 \\ v_0 &= C_2 - \gamma C_1 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} C_1 &= x_0 = 25 \text{ cm} \\ C_2 &= v_0 + \gamma x_0 = 200 \text{ cm/s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x(t_1) &= (C_1 + C_2 t_1) e^{-\gamma t_1} = 3.4 \cdot 10^{-2} \text{ cm} \\ v(t_1) &= [C_2 - \gamma(C_1 + C_2 t_1)] e^{-\gamma t_1} = -0.12 \text{ cm/s} \end{aligned} \right.$$

c) M.A.S. con rozamiento subcrítico, $\gamma = \omega_0 / 2$, $\omega = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}$:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) \\ v(t) &= \frac{dx}{dt} = -\gamma x - \omega A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x_0 &= A \cos(\varphi) \\ v_0 &= -\gamma x_0 - \omega A \sin(\varphi) \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \arctg\left(-\frac{v_0 + \gamma x_0}{x_0 \omega}\right) = -\frac{\pi}{3} \\ A &= \frac{x_0}{\cos(\varphi)} = 50 \text{ cm} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t_1) = Ae^{-\gamma t_1} \cos(\omega t_1 + \varphi) = 0.23 \text{ cm} \\ v(t_1) = -\gamma x(t_1) - \omega Ae^{-\gamma t_1} \sin(\omega t_1 + \varphi) = -1.64 \text{ cm/s} \end{cases}$$

d) M.A.S. con rozamiento supercrítico, $\gamma = 2\omega_0$:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t} \\ v(t) = \frac{dx}{dt} &= -\gamma_1 C_1 e^{-\gamma_1 t} - \gamma_2 C_2 e^{-\gamma_2 t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = C_1 + C_2 \\ v_0 = -\gamma_1 C_1 - \gamma_2 C_2 \end{cases} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} C_1 &= \frac{x_0 \gamma_2 + v_0}{\gamma_2 - \gamma_1} = -9.15 \text{ cm} \\ C_2 &= \frac{x_0 \gamma_1 + v_0}{\gamma_1 - \gamma_2} = 34.15 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x(t_1) = C_1 e^{-\gamma_1 t_1} + C_2 e^{-\gamma_2 t_1} = 2.6 \text{ cm} \\ v(t_1) = -\gamma_1 C_1 e^{-\gamma_1 t_1} - \gamma_2 C_2 e^{-\gamma_2 t_1} = -2.8 \text{ cm/s} \end{cases} \end{aligned}$$

El tubo de fuego de un cañón tiene una masa de 550 kg y vuelve a su posición de fuego, después del retroceso, mediante un muelle recuperador de constante $k = 120 \text{ kN/m}$. a) Calcular el valor del coeficiente de amortiguamiento del mecanismo de retroceso que hace que el cañón se ponga de nuevo en posición de tiro en el menor tiempo posible y sin que se produzcan oscilaciones. Si ponemos a cero el cronómetro justo en el momento en el que el cañón después del disparo se ha separado una distancia máxima x_0 de su posición de tiro e intenta volver a dicha posición, b) determinar la posición $x(t)$ del cañón en cualquier instante del tiempo. c) Calcular el tiempo que emplea el tubo del cañón en recorrer medio camino hacia su posición de tiro.

Solución: I.T.T. 02, 04, 05

a) Para que el cañón vuelva a su posición de tiro sin oscilar y en el menor tiempo posible el amortiguamiento debe ser crítico:

$$\left. \begin{aligned} \text{Amort. Crítico: } \gamma &= \omega_0 \\ \gamma &= \frac{\lambda}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km} = 16.3 \cdot 10^3 \text{ Ns/m}$$

b) En un amortiguamiento crítico el movimiento obedece a la ecuación:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\gamma t} \Rightarrow v(t) = [-\gamma(C_1 + C_2 t) + C_2] e^{-\gamma t}$$

Imponiendo las condiciones iniciales del movimiento:

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = x_0 \Rightarrow C_1 = x_0 \\ v(0) = 0 \Rightarrow -\gamma C_1 + C_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0(1 + \gamma t)e^{-\gamma t}}$$

c) Lo que nos piden es calcular el instante t_1 en que $x(t_1) = \frac{1}{2}x_0$:

$$x(t_1) = \frac{1}{2}x_0 \Rightarrow (1 + \gamma t_1)e^{-\gamma t_1} = \frac{1}{2} \quad \left(\gamma = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 14.77 \text{ s}^{-1} \right)$$

Ecuación que puede resolverse por aproximaciones sucesivas y cuya solución es:

$$\boxed{t_1 = 0.1136 \text{ s}}$$

Francisco Javier Junqu..., 10/12/10 14:04

Eliminado: .