# TRABAJO Y ENERGIA:
# CURVAS DE ENERGÍA POTENCIAL:

---

Si junto con la fuerza de Van der Waals atractiva, que varía proporcionalmente a $r^{-7}$, dos atómos idénticos de masa $M$ experimentan una fuerza repulsiva proporcional a $r^{-m}$ con $m > 7$. a) Demostrar que la energía potencial tiene la forma: $U(r) = -\frac{A}{r^6} + \frac{B}{r^n}$ con $n > 6$ y representarla. b) Calcular la separación de equilibrio $r_0$ en esta molécula en función de las constantes $A$ y $B$. c) La energía de disociación $D$ de la molécula debe ser igual a $-U(r_0)$, ¿cuál debe ser su valor en función de $A$, $n$ y $r_0$?

---

**Solución: I.T.I. 97, I.T.T. 97**

Texto solución

---

Una partícula se mueve en una región donde la energía potencial está dada por $U(x) = 3x^2 - x^3$ ($x$ en m y $U$ en J). a) Dibuje una gráfica de la energía potencial. b) ¿Cual es el valor máximo de la energía mecánica total de la partícula de forma que el movimiento oscilatotio sea posible?, c) ¿para qué valores de $x$ está la fuerza que actua sobre la partícula orientada en el sentido positivo de las $x$?

---

**Solución: I.T.I. 97, I.T.T. 97**

Texto solución

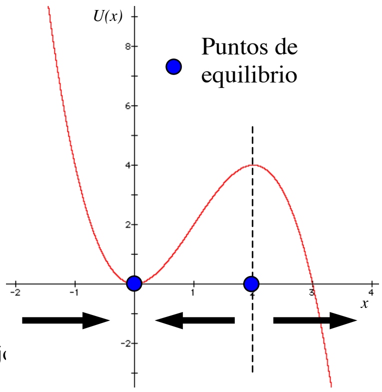
---

Una partícula está sujeta a una fuerza asociada con la energía potencial $U(x) = 3x^2 - x^3$. a) Trazar una gráfica de $U$ frente a $x$. b) Determinar el sentido de la fuerza en cada intervalo apropiado de la variable $x$. c) Analizar el movimiento de la partícula según los diferentes valores de su energía total. d) Encontrar las posiciones de equilibrio.

---

**Solución: I.T.I. 95, 99, 01, I.T.T. 95, 99, 01, 04**

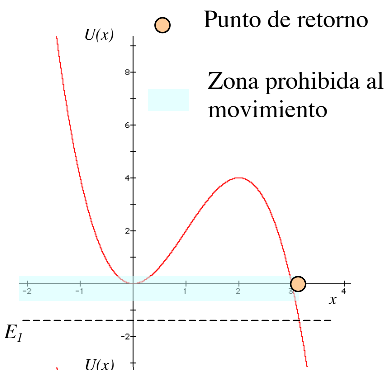
a) , b) y d) La componente $x$ de la fuerza está relacionada con la derivada de la energía potencial: $F_x = -\frac{dU}{dx}$. En aquellas posiciones del eje $X$ en que la derivada de $U$ sea negativa la fuerza empujará a la partícula hacia la derecha, y en aquellas en que la derivada sea positiva empujará hacia la izquierda. Aquellas posiciones en que la derivada de $U$ se anule serán posiciones de equilibrio (la fuerza se anula). En nuestro caso en $x = 0$ tenemos



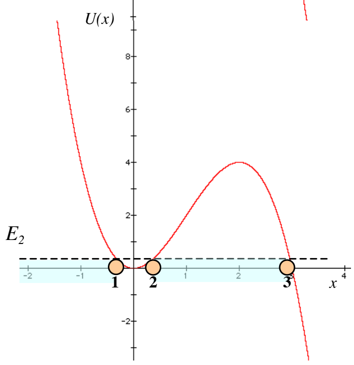
un punto de equilibrio estable (mínimo de $U$) y en $x = 2$ un punto de equilibrio inestable (máximo de $U$):

c) Dependiendo del valor de la energía de la partícula existirán zonas del eje $X$ donde el movimiento esté prohibido. En estas zonas la energía potencial es mayor que la energía total de la partícula. En caso de moverse en estas zonas la energía cinética de la partícula sería negativa $\left(E = E_{cin.} + E_{pot.}\right)$ lo cual es absurdo. En los puntos del eje $X$ en los que la energía total de la partícula es puramente potencial $\left(E_{cin.} = 0 \;\; , \; E = E_{pot.}\right)$ el móvil se detendrá invirtiendo su movimiento. Estos puntos se conocen como puntos de retorno.

Vamos a estudiar cuatro casos:

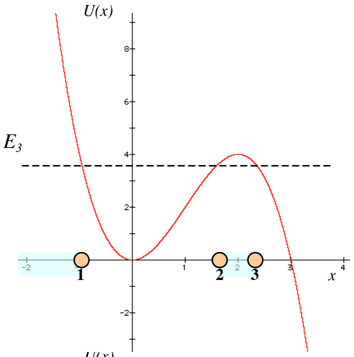



1. Si su energía total es negativa ($E_1$ en la figura) sólo podrá moverse a la derecha del punto de retorno. Si la partícula se acerca al origen desde la derecha irá disminuyendo su velocidad (debido a que la fuerza que actúa sobre ella la empuja hacia la derecha). Al llegar al punto de retorno su velocidad se anula, invierte su sentido del movimiento y acaba desapareciendo por la derecha con movimiento acelerado.

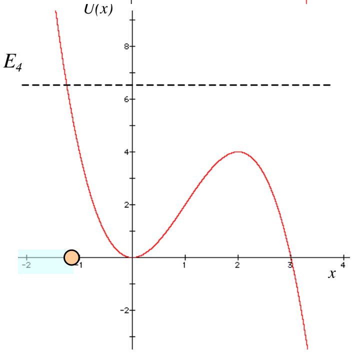



2. Si su energía total es ligeramente positiva ($E_2$ en la figura) sólo existirán dos zonas permitidas para el movimiento: entre los puntos de retorno **1** y **2** y a la derecha del punto de retorno **3**. Estas dos zonas están separadas por una zona prohibida al movimiento, que se conoce como barrera de potencial, la partícula en su movimiento no podrá pasar por lo tanto de una zona a la otra, realizando su movimiento sólo en una de ellas. Si la partícula se acerca al origen desde la derecha, igual que en el caso anterior, irá disminuyendo su velocidad (debido a que la fuerza que actúa sobre ella la empuja hacia la derecha) y al llegar al punto de retorno **3** su velocidad se anulará, invirtiendo su sentido del movimiento y desapareciendo finalmente por la derecha con movimiento acelerado. Si la partícula se encuentra moviéndose entre los puntos **1** y **2** realizará un movimiento de vaivén entre estos puntos. Como el movimiento se realiza en posiciones muy cercanas al punto de equilibrio estable dicho movimiento oscilatorio será un Movimiento Armónico Simple.

3. Si su energía total es positiva ($E_3$ en la figura) todo se desarrolla igual que en el caso anterior salvo que si la partícula se encuentra moviéndose entre los puntos **1** y **2** realizará un movimiento oscilatorio que ya no será un Movimiento Armónico Simple al separarse apreciablemente en su movimiento de la posición de equilibrio estable.




4. Si su energía total ($E_4$ en la figura) es superior al máximo en la curva de energía potencial, tenemos un movimiento similar al del caso 1) salvo que en su movimiento el móvil se va a acelerar y frenar según vaya encontrando zonas en las que la fuerza que actúa sobre él le empuje en el mismo sentido o en sentido contrario a su movimiento. Si se acerca por la derecha irá disminuyendo su rapidez hasta que llegue a $x$ =2, a partir de ahí aumentará su rapidez hasta llegar al origen, disminuyendo de nuevo y deteniéndose en el punto de retorno. Invertirá su sentido del movimiento alejándose por la derecha con un movimiento acelerado hasta el origen, seguidamente decelerado hasta $x$ = 2 y de nuevo acelerado.




---

La energía potencial de una partícula sometida a un campo de fuerzas centrales es $U(r) = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$ donde $a$ y $b$ son constantes positivas y $r$ la distancia al centro de fuerzas. Hallar: a) el valor de $r_0$ correspondiente a la posición de equilibrio ¿será estable o inestable?, b) el valor máximo de la fuerza, c) representa $U(r)$ y $F(r)$ y discutir los posibles movimientos radiales de una partícula en este campo.

---

**Solución: I.T.I. 96, 02, 05, I.T.T. 96, 02, 05**

d) Derivando respecto de $r$, calculando la derivada en $r_0$, e igualándola a cero obtenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dU}{dr} = -\dfrac{2a}{r^3} + \dfrac{b}{r^2} \\ \left.\dfrac{dU}{dr}\right|_{r=r_0} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad br_0 = 2a \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_0 = \frac{2a}{b}}$$

Calculando la derivada segunda en dicho punto:

$$\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_0} = \left.\frac{6a}{r^4} - \frac{2b}{r^3}\right|_{r=r_0} = \frac{6a}{r_0^4} - \frac{2b}{r_0^3} = \frac{6a - 2br_0}{r_0^4} = \frac{6a - 2b\left(\frac{2a}{b}\right)}{r_0^4} = \frac{2a}{r_0^4} > 0$$

$\Rightarrow$ MÍNIMO DE ENERGÍA POT. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{PUNTO DE EQUIL. ESTABLE}}$

e) La componente radial de la fuerza viene dada por:

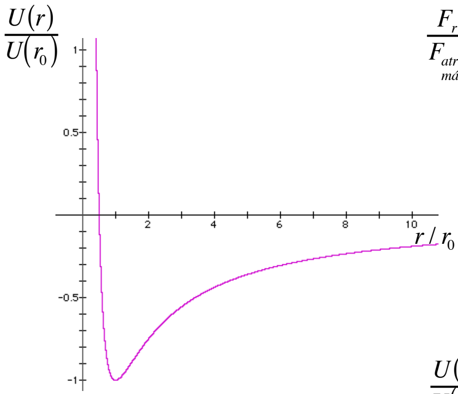
$$F_r(r) = -\frac{dU}{dr} = \frac{2a}{r^3} - \frac{b}{r^2}$$

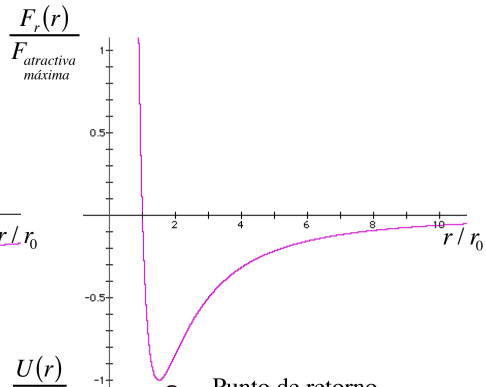
Esta fuerza alcanzará un valor extremo para una distancia $r$*:

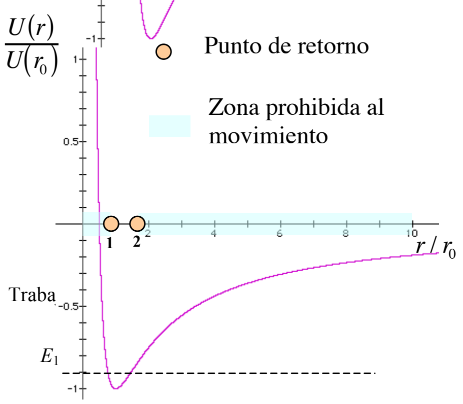
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dF_r}{dr} = -\dfrac{6a}{r^4} + \dfrac{2b}{r^3} \\ \left.\dfrac{dF_r}{dr}\right|_{r=r^*} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2br^* = 6a \Rightarrow r^* = \frac{3a}{b}$$

$$F_r(r^*) = -\frac{b^3}{27a^2} \Rightarrow \boxed{F_{\substack{atractiva\\máxima}} = \frac{b^3}{27a^2}}$$

f) Las gráficas de la energía potencial y de la fuerza son las siguientes:

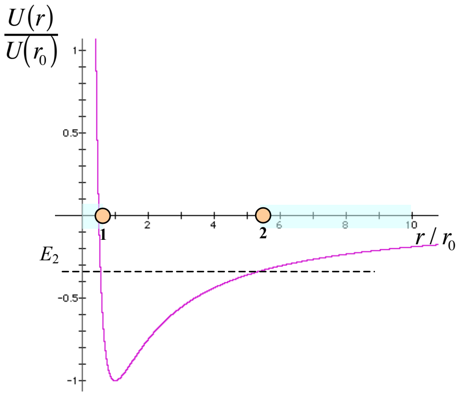


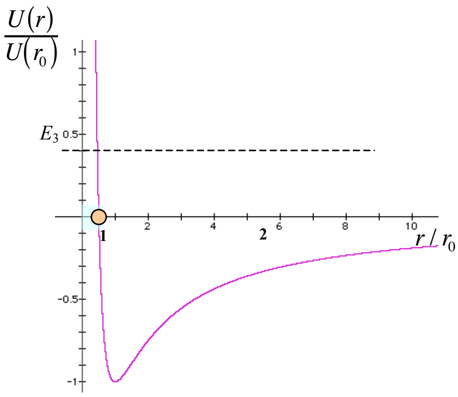




Si la energía total de la partícula ($E_1$ en la figura) es negativa y cercana al valor mínimo de la energía potencial, sólo existirá una pequeña zona permitida para el movimiento: entre los puntos de retorno **1** y **2**. Entre estos puntos la partícula realizará un movimiento oscilatorio. Como el movimiento se realiza en posiciones muy cercanas al punto de equilibrio estable dicho movimiento oscilatorio será un Movimiento Armónico Simple.

Si su energía total ($E_2$ en la figura) es ligeramente negativa existirá una zona permitida para el movimiento: entre los puntos de retorno **1** y **2**. Entre estos puntos la partícula realizará un movimiento oscilatorio. Como el movimiento se realiza en posiciones bastante alejadas del punto de equilibrio estable dicho movimiento oscilatorio no será un Movimiento Armónico Simple, sino un movimiento más complejo.




Si su energía total ($E_3$ en la figura) es positiva tenemos un movimiento que ya no va a ser oscilatorio al haber sólo un único punto de retorno **1**. Si la partícula se acerca por la derecha irá aumentando su rapidez hasta que llegue al punto de equilibrio estable, a partir de ahí disminuirá su rapidez hasta llegar al punto de retorno **1** deteniéndose. Invertirá su sentido del movimiento acercándose al punto de equilibrio estable con un movimiento acelerado hasta llegar a dicho punto, alejándose a continuación por la derecha con un movimiento decelerado.




---

Una función de energía potencial para un sistema está dada por $U(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$, determinar la fuerza que actúa sobre la partícula. Encontrar las posiciones de equilibrio de la misma. ¿Cuáles serán de equilibrio estable?

---

**Solución: I.T.I. 92, 98, 03, I.T.T. 03**

La fuerza vendrá dada por:

$$F_x(x) = -\frac{dU}{dx} = \boxed{3x^2 - 4x - 3}$$

Las posiciones de equilibrio se obtienen igualando a cero la derivada primera de la energía potencial, o lo que es lo mismo igualando a cero la fuerza:

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_{equil.}} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_x\left(x_{equil.}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x_{equil.}^2 - 4x_{equil.} - 3 = 0$$

Ecuación de segundo grado que tiene dos soluciones: $\boxed{x_{equil.1} = 1.869 \quad , \quad x_{equil.2} = -0.535}$

Si calculamos la derivada segunda de la energía potencial en cada caso tenemos que:

$$U''(x) = \frac{d^2U}{dx^2} = -6x + 4$$

$$U''\left(x_{equil.1}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Máximo de U} \quad \Rightarrow \quad \text{Punto de equilibrio inestable}$$

$$\boxed{U''\left(x_{equil.2}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Mínimo de U} \quad \Rightarrow \quad \text{Punto de equilibrio estable}}$$

---

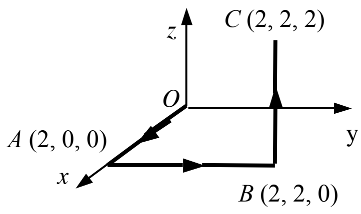
La función de energía potencial para una fuerza bidimensional está dada por $U(x,y) = 3x^2y - 7x$, encontrar la fuerza que actúa en el punto $(x, y)$.

---

**Solución: I.T.I. 98**

Texto solución

Sea un campo de energía potencial $\phi(x, y, z) = -(x + y + z)^2$ a) Obtener la fuerza $\vec{F}$ que se deriva de dicho campo, señalando cual será su dirección y su modulo en el punto (2, 2, 2). b) Calcular (por integración) el trabajo realizado por la fuerza entre los puntos (0, 0, 0) y (2, 2, 2) a lo largo de las siguientes trayectorias: b1) $x = t$, $y = t$, $z = t$, b2) la representada en la figura ($t$ es un parámetro). Comentar estos resultados.
c) ¿Es una fuerza central? ¿por qué? d) Si la fuerza se aplica según la trayectoria b1 sobre una masa $m = 2$ kg, calcular la expresión de la aceleración. ¿Cual será su valor para $t = 2$? e) Si la partícula se mueve a lo largo del primer tramo de la trayectoria b2 ($OA$), determinar las dependencias de la aceleración $a_x$ y la velocidad $v_x$ con la posición. Suponer que en el origen $v = 0$.




**Solución:** **I.T.I. 03, I.T.T. 99, 03**

a) La fuerza que actúa sobre la partícula vendrá dada por:

$$\vec{F}(x,y,z) = -\vec{\nabla}\phi = \boxed{2(x+y+z)(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) \text{ N}}$$

$$\vec{F}(2,2,2) = \boxed{12(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) \text{ N}} \qquad \left|\vec{F}(2,2,2)\right| = \boxed{12\sqrt{3} \text{ N}}$$

b) El trabajo realizado por la fuerza vendrá dado por:

$$W = \int_O^C \vec{F}\, d\vec{r} = \int_O^C 2(x+y+z)(dx+dy+dz)$$

Para la primera trayectoria $x = y = z = t$, $dx = dy = dz = dt$, con $t$ entre 0 y 2, que sustituido en la expresión anterior conduce a:

$$W = \int_O^C \vec{F}\, d\vec{r} = \int_0^2 18\, t\, dt = \boxed{36 \text{ J}}$$

Para la segunda trayectoria haremos el cálculo entres partes.
En la primera tenemos: $y = 0$, $dy = 0$, $z = 0$, $dz = 0$.
En la segunda tenemos: $x = 2$, $dx = 0$, $z = 0$, $dz = 0$.
En la tercera tenemos: $x = 2$, $dx = 0$, $y = 2$, $dy = 0$.
Sustituyendo todas estas relaciones en la expresión del trabajo:

$$W = \int_0^2 2x\, dx + \int_0^2 2(2+y)\, dy + \int_0^2 2(4+z)\, dz = \left[x^2 + (2+y)^2 + (4+z)^2\right]_0^2 = \boxed{36 \text{ J}}$$

Es lógico que los resultados coincidan ya que la fuerza es una fuerza conservativa (ya que la hemos obtenido a partir del gradiente de un campo escalar) y por lo tanto el trabajo realizado por dicha fuerza no depende del camino entre los dos puntos, sino de dichos puntos inicial y final.

c) No es una fuerza central ya que los vectores fuerza no son concurrentes en un punto (todos los vectores fuerza son paralelos al vector $\left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right)$).

d) La aceleración de la partícula será:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = (x + y + z)\left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right)$$

Para la primera trayectoria ($x = y = z = t$) la aceleración en función del parámetro $t$ (que no es el tiempo) será:

$$\vec{a}(t) = \boxed{3t\left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right)} \qquad \vec{a}(2) = \boxed{6\left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right)}$$

e) Para la primera parte de la segunda trayectoria ($y = z = 0$) tenemos que:

$$\vec{a} = x\hat{i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_x(x) = x}$$

Como la aceleración está dada en función de la posición podemos calcular la velocidad en función de la posición de la siguiente forma (teniendo en cuenta que la velocidad inicial para $x = 0$ era nula):

$$v_x^2 = v_0^2 + 2\int_0^x a_x dx = 2\int_0^x x dx = x^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_x(x) = \pm x}$$

Francisco Javier Junquer..., 9/11/10 15:51
**Eliminado:**