

## ECUACIÓN DEL M.A.S.

Una partícula tiene un desplazamiento  $x$  dado por:  $x(t) = 0.3\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$  en donde  $x$  se mide en metros y  $t$  en segundos. a) ¿Cuáles son la frecuencia, el periodo, la amplitud, la frecuencia angular y la constante de fase del movimiento? b) ¿En dónde se encuentra la partícula para  $t = 1\text{s}$ ? c) Calcular la velocidad y la aceleración en un instante cualquiera. d) Hallar la posición y velocidad inicial de la partícula.

**Solución: I.T.I. 96, 98, 00, 03, I.T.T. 03**

a) Por comparación con la expresión  $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$  tenemos que:

$$A = 0.3 \text{ m} \quad \omega = 2 \text{ rad / s} \quad \varphi = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 3.14 \text{ s} \quad \nu = \frac{1}{T} = 0.32 \text{ Hz}$$

b) Sustituyendo en la ecuación tenemos:  $x(1 \text{ s}) = -0.245 \text{ m}$

c) Derivando sucesivamente:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -0.6 \text{ sen}\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -1.2 \text{ cos}\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

d) Si tomamos como instante inicial  $t = 0$ , tenemos que:

$$x(0) = 0.26 \text{ m} \quad v(0) = -0.3 \text{ m / s}$$

---

Un oscilador armónico simple es descrito por la ecuación:  $x = 4\text{sen}(0.1t + 0.5)$  donde todas las cantidades se expresan en unidades del S.I. Encontrar:

- La amplitud, el período, la frecuencia y la fase inicial del movimiento
- La velocidad y la aceleración.
- Las condiciones iniciales (en  $t = 0$ ).
- La posición, velocidad y aceleración para  $t = 5$  s.

Dibujar un gráfico representando la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

---

**Solución: I.T.I. 94, 95, 98, I.T.T. 99, 02, 05**

- a) Comparando con la expresión general del M.A.S.:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) = A \text{sen}(\omega t + \theta) \\ x(t) &= 4 \cos\left(0.1t + 0.5 - \frac{\pi}{2}\right) = 4 \text{sen}(0.1t + 0.5) \end{aligned} \right\}$$

Amplitud del movimiento: $A = 4$ m.	Frecuencia angular: $\omega = 0.1$ rad/s
Periodo: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 20\pi$ s	Frecuencia: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20\pi}$ Hz
Fase inicial: $\varphi = \left(0.5 - \frac{\pi}{2}\right)$ rad (si utilizamos la función coseno para el M.A.S.)	
$\theta = 0.5$ rad (si utilizamos la función seno para el M.A.S.)	

- b) Derivando sucesivamente:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 0.4 \cos(0.1t + 0.5) \quad , \quad a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -0.04 \text{sen}(0.1t + 0.5)$$

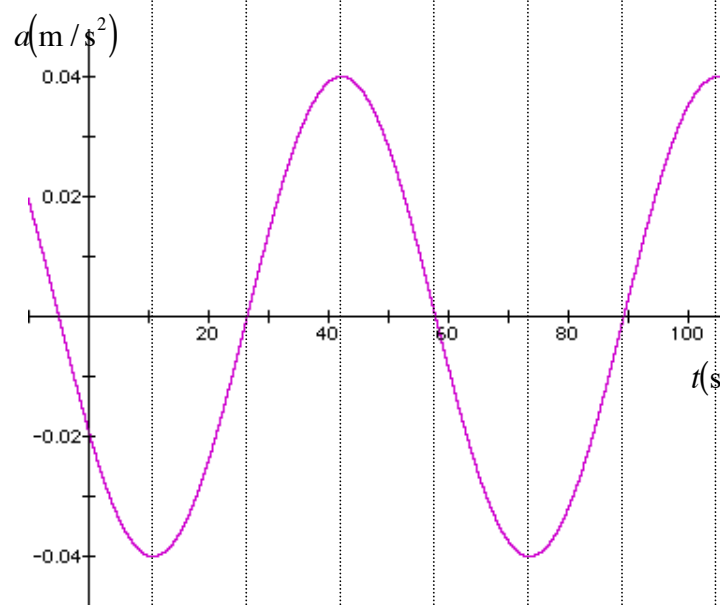
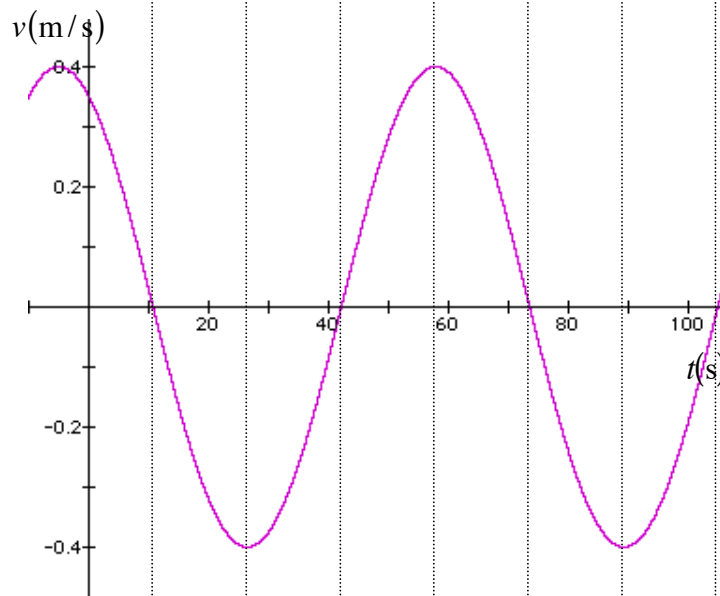
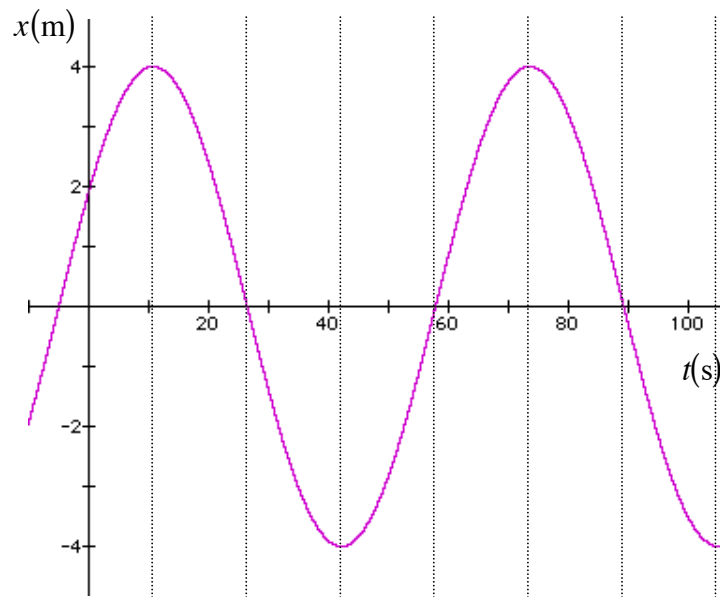
- c) Para el instante inicial  $t = 0$  tenemos que:

$$x_0 = x(t=0) = 4 \text{sen}(0.5) = 1.92 \text{ m} \quad , \quad v_0 = v(t=0) = 0.4 \cos(0.5) = 0.351 \text{ m/s}$$

- d) Sustituyendo en las expresiones anteriores:

$$\begin{aligned} x(t=5) &= 4 \text{sen}(1) = 3.37 \text{ m} \quad , \quad v(t=5) = 0.4 \cos(1) = 0.216 \text{ m/s} \\ a(t=5) &= -0.04 \text{sen}(1) = -3.37 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

La representación gráfica de la posición, velocidad y aceleración será:



La ecuación del movimiento de un cuerpo, suspendido de un resorte y que oscila verticalmente es  $y(t) = A \sin(\omega t)$ , siendo  $A$  y  $\omega$  constantes. Calcular:  $v(t)$ ,  $a(t)$ ,  $v(y)$ ,  $a(y)$ , amplitud, velocidad máxima, aceleración máxima, dibujar gráficas de  $y$ ,  $v$  y  $a$  en función del tiempo.

**Solución: I.T.I. 97, 01, 04, I.T.T. 04**

Derivando sucesivamente:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = \boxed{A\omega \cos(\omega t)} \qquad \boxed{-A\omega^2 \sin(\omega t)}$$

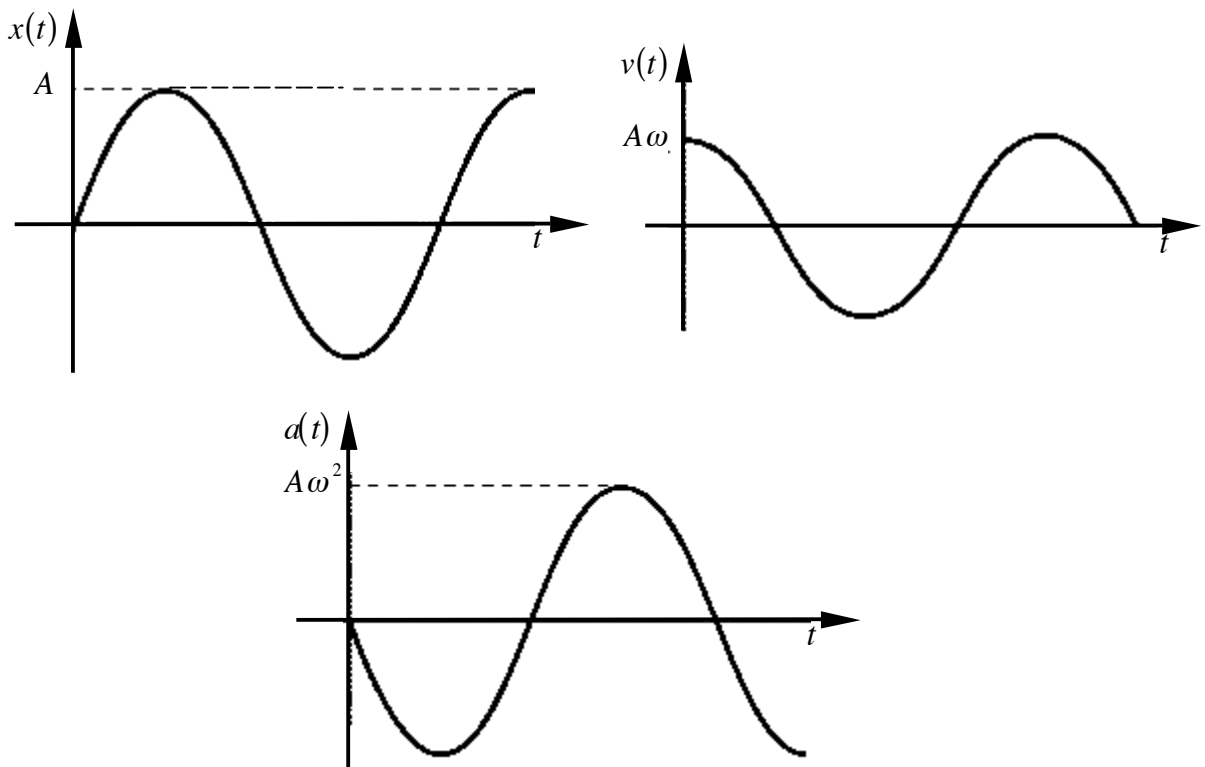
Teniendo en cuenta la expresión  $y(t)$  y sustituyéndola en  $v(t)$  y  $a(t)$  para eliminar el tiempo:

$$\cos(\omega t) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\omega t)} \Rightarrow v(y) = \boxed{\pm \omega \sqrt{A^2 - y^2}}, \quad a(y) = \boxed{-\omega^2 y}$$

Se trata de un Movimiento Armónico Simple centrado en el origen. La amplitud se corresponde con el valor máximo de  $y$ :  $\boxed{A}$

El valor máximo de la velocidad será:  $\boxed{v_{m\acute{a}x.} = A\omega}$

El valor máximo de la aceleración será:  $\boxed{a_{m\acute{a}x.} = A\omega^2}$



---

Una partícula de masa  $m$  realiza un M.A.S. de periodo 1.5 s y se encuentra inicialmente en  $x_0 = 25$  cm y con una velocidad  $v_0 = 50$  cm/s. Escribir las ecuaciones de su posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

---

**Solución: I.T.T. 00, 03**

La frecuencia angular del M.A.S. será:  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{4\pi}{3}$  rad / s .

La ecuación del M.A.S. es:  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ , las ecuaciones para la velocidad y la aceleración se obtienen derivando sucesivamente:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \quad a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

Las constantes  $A$  y  $\varphi$  las determinaremos a partir de las condiciones iniciales del movimiento. Para  $t = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = A \cos(\varphi) \\ v_0 = -A\omega \sin(\varphi) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 27.7 \text{ cm} \\ \varphi = -0.445 \text{ rad} = -25.5^\circ \end{array} \right.$$

Sustituyendo en las expresiones anteriores tenemos que:

$$\begin{aligned} x(t) &= (27.7 \text{ cm}) \cos\left(\frac{4\pi}{3}t - 0.445\right) \\ v(t) &= -(116 \text{ cm/s}) \sin\left(\frac{4\pi}{3}t - 0.445\right) \\ a(t) &= -(486 \text{ cm/s}^2) \cos\left(\frac{4\pi}{3}t - 0.445\right) \end{aligned}$$

---

Una partícula de 4 kg se mueve a lo largo del eje  $X$  bajo la acción de la fuerza:  $F_x = -kx$ , con  $k = \left(\frac{\pi^2}{16}\right)$  N / m . Cuando  $t = 2$  s, la partícula pasa por el origen, y cuando  $t = 4$  s su velocidad es de 4 m/s. Encontrar la ecuación del movimiento.

---

**Solución: I.T.T. 97, 01, 04**

Como la fuerza es de tipo elástico va a realizar un Movimiento Armónico Simple con frecuencia angular:  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\pi}{8}$  rad / s . Para calcular la amplitud  $A$  y la fase inicial del movimiento  $\varphi$  aplicaremos la condiciones iniciales del movimiento:

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \\ v(t) = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x(2\text{s}) = 0 \\ v(4\text{s}) = 4\text{m/s} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = 0 \\ -A\omega \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = 4\text{m/s} \end{array} \right\}$$

Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de las cuales obtenemos:

$$A = \frac{32\sqrt{2}}{\pi} \text{m}$$

$$\varphi = -\frac{3\pi}{4}$$

---

Determinar la frecuencia angular y la amplitud de las oscilaciones de una partícula si a las distancias  $x_1$  y  $x_2$  de la posición de equilibrio su velocidad era  $v_1$  y  $v_2$  respectivamente.

---

**Solución: I.T.T. 99, 02, 05**

Teniendo en cuenta la expresión para la posición y velocidad en un M.A.S.:

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \\ v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \frac{x}{A} \right)^2 + \left( \frac{v}{\omega A} \right)^2 = 1$$

Aplicándolo a los datos que nos dan:

$$\left. \begin{array}{l} \left( \frac{x_1}{A} \right)^2 + \left( \frac{v_1}{\omega A} \right)^2 = 1 \\ \left( \frac{x_2}{A} \right)^2 + \left( \frac{v_2}{\omega A} \right)^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \sqrt{\frac{x_1^2 v_2^2 - x_2^2 v_1^2}{v_2^2 - v_1^2}} \\ \omega = \sqrt{\frac{v_2^2 - v_1^2}{x_1^2 - x_2^2}} \end{array} \right.$$