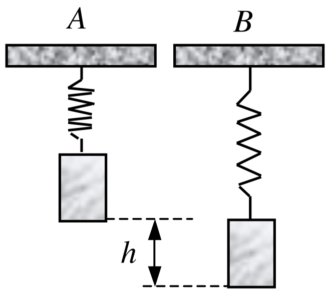
DINÁMICA Y M.A.S.

Un muelle de constante k = 250 N/m se cuelga de un soporte rígido y se une a su extremo inferior un objeto de 1 kg de masa, que se deja en libertad cuando el muelle está sin deformar. a) ¿Cuánto desciende el objeto antes de empezar a ascender de nuevo?, b) ¿A qué distancia por debajo del punto de partida está la posición de equilibrio del objeto?, c) ¿Cuál es el periodo de la oscilación?, d) ¿Cuál es la velocidad del objeto cuando alcanza por primera vez la posición de equilibrio?, e) ¿Cuándo sucede esto?

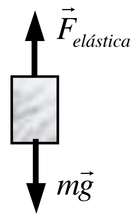
Solución: **I.T.T. 00, 03**

a) Las únicas fuerzas que actúan sobre el objeto son la gravitatoria y la elástica, ambas fuerzas conservativas, con lo que podemos aplicar la conservación de la energía. Llamemos A a la situación inicial y B a la situación final en la que el cuerpo se para e inicia el ascenso. Tomemos el origen de energía potencial gravitatoria en la situación inicial y el origen de energía potencial elástica cuando el muelle está sin estirar (lo cual ocurre también en la situación inicial):



$$E_A = E_B \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2}kh^2 - mgh \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{2mg}{k}}$$

b) En la situación de equilibrio las dos fuerzas se anulan entre sí:



$$mg = k\Delta l \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta l = \frac{mg}{k} = \frac{h}{2}}$$

La posición de equilibrio se encuentra a mitad de camino entre la posición A y la B. Lógico ya que en estas dos situaciones el cuerpo está en reposo y estas dos situaciones constituyen por lo tanto los puntos de retorno en el movimiento oscilatorio del cuerpo.

c) El periodo de oscilación vendrá dado por: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \boxed{0.40 \text{ s}}$

d) Cuando pasa por la posición de equilibrio la velocidad es máxima y para un M.A.S. vale:

$$v_{máx.} = \omega A = \left(\frac{h}{2}\right)\sqrt{\frac{k}{m}} = \left(\frac{mg}{k}\right)\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{m}{k}}\, g = \boxed{62.0 \text{ cm/s}}$$

e) Esto sucede cuando ha transcurrido un cuarto del periodo: $\Delta t = \frac{T}{4} = \boxed{0.10 \text{ s}}$

Una partícula de masa m se encuentra en un campo de energía potencial que solo depende de x de la forma: $E_p(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}$, donde a y b son ciertas constantes positivas. Hallar el periodo de oscilaciones de la partícula en su movimiento en la dirección X alrededor de las posiciones de equilibrio.

Solución: I.T.T. 96, 00, 03

Para encontrar los puntos de equilibrio estudiamos dónde se anula la derivada primera:

$$\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_{equil.}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2\frac{a}{x_{equil.}^3} + \frac{b}{x_{equil.}^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{equil.} = \frac{2a}{b}$$

Para ver si se trata de un punto de equilibrio estable estudiamos el valor de la derivada segunda en dicha posición:

$$\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_{equil.}} = 6\frac{a}{x_{equil.}^4} - 2\frac{b}{x_{equil.}^3} = \frac{b^4}{8a^3} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{P. Equil. Estable}$$

La constante elástica para los movimientos oscilatorios alrededor de dicha posición de equilibrio es:

$$k = \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_{equil.}} = \frac{b^4}{8a^3}$$

Y el periodo de oscilación será:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \boxed{\frac{4\pi a\sqrt{2ma}}{b^2}}$$

Una partícula de masa m se encuentra en un campo de energía potencial que depende de la coordenada x según la ley $U(x) = U_0(1 - \cos ax)$ donde U_0 y a son ciertas constantes positivas. Hallar el periodo de las pequeñas oscilaciones de la partícula alrededor de la posición de equilibrio.

Solución: I.T.T. 02, 05

Para calcular las posiciones de equilibrio calculemos la derivada de la energía potencial:

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_{eq.}} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_0\, a \operatorname{sen} a x_{eq.} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{eq.} = 0\,, \frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}, \frac{3\pi}{a}, \ldots$$

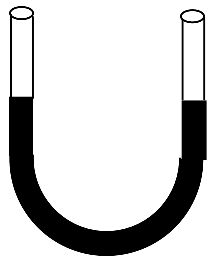
Para que el equilibrio sea estable la derivada segunda debe ser positiva (mínimo de energía potencial):

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_{eq.estable}} > 0 \quad \Rightarrow \quad U_0\, a^2 \cos a x_{eq.estable} > 0 \quad \Rightarrow \quad x_{eq.estable} = 0\,, \frac{2\pi}{a}, \frac{4\pi}{a}, \ldots$$

La constante elástica será la derivada segunda de la energía potencial en el punto de equilibrio estable, con lo que el periodo de las pequeñas oscilaciones será:

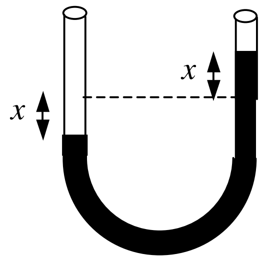
$$k = \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_{eq.estable}} = U_0\, a^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{U_0\, a^2}{m}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{m}{U_0\, a^2}}}$$

Determinar el periodo de las oscilaciones de una masa M de un líquido en un tubo en forma de U de sección circular de radio R. Despreciar la viscosidad del líquido.



Solución: **I.T.T. 02, 05**

Si separamos el líquido de su posición de equilibrio elevando su nivel en una rama una altura x y disminuyendo la misma altura en la otra rama las fuerzas gravitatorias sobre las diferentes partes del líquido tienden a devolver a éste a su posición inicial iniciándose de esta forma un movimiento oscilatorio. Ha habido por lo tanto una variación de energía potencial gravitatoria. Si tomamos el nivel nulo de energía potencial gravitatoria cuando el líquido se encontraba en la situación de equilibrio y si llamamos $\Delta m_{líquido}$ a la cantidad de líquido que ha pasado de una rama a la otra aumentando su altura en x, la energía potencial gravitatoria que posee ahora vendrá dada por:



$$E_{pot.grav.} = \Delta m_{líquido}\, g\, x = \Delta V_{líquido}\, \rho\, g\, x = \left(\pi R^2 x\right)\rho\, g\, x = \frac{1}{2}\left(2\pi R^2 \rho\, g\right)x^2$$

La energía potencial gravitatoria del sistema es proporcional al desplazamiento x al cuadrado con lo que el movimiento resultante será un M.A.S. de periodo:

$$\boxed{\frac{1}{R}\sqrt{\frac{2\pi M}{\rho g}}}$$

$$k = 2\pi R^2 \rho g \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{2\pi R^2 \rho g}{M}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} =$$

Todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje igual al peso del fluido desalojado. Un cilindro uniforme de densidad ρ y longitud l flota según su eje vertical en un fluido de densidad ρ_0. ¿Cuál es la frecuencia de las oscilaciones verticales de pequeña amplitud que realiza?

Solución: I.T.T. 96, 01, 04

Tomemos como sentido positivo de desplazamiento del cilindro verticalmente hacia abajo. Llamemos h a la longitud de cilindro debajo del agua cuando flota en equilibrio. En esta situación tendremos que la fuerza neta hacia abajo será nula:

$$mg - F_{empuje} = 0 \quad \Rightarrow \quad mg = \left(V_{sumergido}\,\rho_0\right)g \quad \Rightarrow \quad mg = \left(\pi R^2 h\,\rho_0\right)g$$

Si realizamos un desplazamiento x del cilindro respecto de su posición de equilibrio, la nueva longitud de cilindro por debajo del agua será $h + x$. En esta nueva situación la fuerza neta hacia abajo ya no será nula:

$$F_{neta} = mg - F'_{empuje} = mg - \left(V'_{sumergido}\,\rho_0\right)g = mg - \left(\pi R^2[h + x]\rho_0\right)g$$

Sustituyendo en esta expresión la relación entre el peso del cilindro y la altura h:

$$F_{neta} = -\left(\pi R^2 \rho_0\, g\right)x$$

Vemos que la fuerza es de tipo elástico con una constante elástica: $k = \pi R^2 \rho_0\, g$

La frecuencia de las oscilaciones será:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi R^2 \rho_0\, g}{\pi R^2 l \rho}} = \boxed{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\left(\frac{g}{l}\right)}}$$

Un bloque de madera cuya densidad es ρ tiene dimensiones a, b, c. Mientras está flotando en el agua con el lado a vertical se le empuja hacia abajo y se le suelta. Halle el periodo de las oscilaciones resultantes.

Solución: I.T.T. 95, 99, 00, 03

Tomemos como sentido positivo de desplazamiento del bloque verticalmente hacia abajo. Llamemos h a la longitud del bloque debajo del agua cuando flota en equilibrio. En esta situación tendremos que la fuerza neta hacia abajo será nula:

$$mg - F_{empuje} = 0 \quad \Rightarrow \quad mg = \left(V_{sumergido}\,\rho_0\right)g \quad \Rightarrow \quad mg = \left(bch\,\rho_0\right)g$$

Donde ρ_0 es la densidad del agua. Si realizamos un desplazamiento x del bloque respecto de su posición de equilibrio, la nueva longitud del bloque por debajo del agua será $h + x$. En esta nueva situación la fuerza neta hacia abajo ya no será nula:

$$F_{neta} = mg - F'_{empuje} = mg - \left(V'_{sumergido}\,\rho_0\right)g = mg - \left(bc[h + x]\rho_0\right)g$$

Sustituyendo en esta expresión la relación entre el peso del cilindro y la altura h:

$$F_{neta} = -\left(bc\,\rho_0 g\right)x$$

Vemos que la fuerza es de tipo elástico con una constante elástica: $k = bc\rho_0\,g$

El periodo de las oscilaciones será:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{abc\,\rho}{bc\,\rho_0\,g}} = \boxed{2\pi\sqrt{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\left(\frac{a}{g}\right)}}$$

Una esfera flota en el agua de forma que sólo esta sumergida hasta la mitad. En un momento determinado se la empuja ligeramente hacia abajo y se la suelta. Encontrar el periodo de las oscilaciones resultantes. (Recuérdese que la fuerza de empuje es igual al peso del fluido desalojado).

Solución: I.T.T. 97, 02, 05

Tomemos como sentido positivo de desplazamiento de la esfera verticalmente hacia abajo. Cuando la esfera flota en equilibrio la fuerza neta hacia abajo es nula:

$$mg - F_{empuje} = 0 \quad \Rightarrow \quad mg = \left(V_{sumergido}\,\rho_0\right)g \quad \Rightarrow \quad mg = \left(\frac{2}{3}\pi R^3 \rho_0\right)g \qquad (1)$$

Si realizamos un pequeño desplazamiento dx de la esfera respecto de su posición de equilibrio, el volumen sumergido por debajo del agua de la esfera será ahora $\frac{2}{3}\pi R^3 + \pi R^2 dx$. En esta nueva situación la fuerza neta hacia abajo ya no será nula:

$$F_{neta} = mg - F'_{empuje} = mg - \left(V'_{sumergido}\,\rho_0\right)g = mg - \left(\frac{2}{3}\pi R^3 + \pi R^2 dx\right)\rho_0\,g$$

Sustituyendo en esta expresión el valor para el peso de la esfera que obteníamos en (1):

$$F_{neta} = -\pi R^2 \rho_0\,g\,dx$$

Vemos que la fuerza es de tipo elástico con una constante elástica: $k = \pi R^2 \rho_0\,g$

El periodo de las oscilaciones será:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\pi R^3 \rho_0}{\pi R^2 \rho_0\, g}} = \boxed{2\pi\sqrt{\left(\frac{2R}{3g}\right)}}$$

Determinar el periodo de un péndulo utilizando el principio de conservación de la energía.

Solución: I.T.T. 02, 05

Si el péndulo va a oscilar alrededor de la posición de equilibrio vertical quiere decir que en dicha posición su energía potencial debe presentar un mínimo (punto de equilibrio estable). La única energía potencial que va a entrar en juego es la gravitatoria. Tomemos un origen de energías potenciales gravitatorias del sistema de tal forma que en la posición vertical de equilibrio sea nula. Cuando haya girado un pequeño ángulo θ la masa m del péndulo habrá ascendido una altura:

$$h(\theta) = L[1 - \cos\theta] = L\left[1 - \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}\right] \approx$$

$$\approx L\left[1 - \sqrt{1 - \theta^2}\right] \approx L\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right)\right] = \frac{1}{2}L\theta^2$$

Y la energía potencial del péndulo será:

$$E_{pot.}(\theta) = mg\,h(\theta) \approx \frac{1}{2}mgL\theta^2$$

La energía potencial del péndulo para pequeños desplazamientos angulares tiene forma parabólica $E_{pot.}(\theta) \approx \frac{1}{2}k\theta^2$ donde $k = mgL > 0$ hace el papel de constante elástica. El movimiento resultante va a ser un M.A.S.: $\theta(t) = \theta_{máx.}\cos(\omega t + \varphi)$.

Cuando se expresa la energía potencial en función de desplazamientos lineales $E_{pot.}(x) \approx \frac{1}{2}k\,x^2$ la frecuencia angular está relacionada con la constante elástica (que se medirá en el S.I. en J/m^2 o lo que es equivalente N/m) y la masa de la forma: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Cuando se expresa la energía potencial en función de desplazamientos angulares $E_{pot.}(\theta) \approx \frac{1}{2}k\theta^2$ (la constante elástica k de esta expresión se medirá en el S.I. en J) la expresión para la frecuencia angular es similar pero sustituyendo magnitudes lineales por magnitudes angulares. En nuestro caso debemos sustituir la masa por el momento de inercia I del sistema respecto del punto de rotación:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{I}} = \sqrt{\frac{mgL}{mL^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Otra forma de calcular dicha frecuencia angular sin utilizar el concepto de momento de inercia es la siguiente. Hemos concluido en la discusión anterior que la variable angular θ va a realizar un movimiento angular $\theta(t) = \theta_{máx.}\cos\left(\omega t + \varphi\right)$ donde $\theta_{máx.}$ es la amplitud angular del movimiento. Si derivamos para calcular la velocidad angular en función del tiempo:

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta_{máx.}\omega\,\mathrm{sen}\left(\omega t + \varphi\right)$$

donde la máxima velocidad angular sería: $\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)_{máx.} = \theta_{máx.}\omega$

Cuando el péndulo alcanza su desplazamiento angular máximo $\theta_{máx.}$ toda su energía es potencial gravitatoria, su energía cinética es nula. Cuando el sistema pasa por su posición de equilibrio vertical su energía potencial gravitatoria es nula (visto como hemos tomado el origen de energías potenciales gravitatorias) en cambio su energía cinética será máxima. Como la energía total del sistema debe permanecer constante:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}mv_{máx.}^2 = \dfrac{1}{2}mgL\theta_{máx.}^2 \\[2ex] v_{máx.} = \left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)_{máx.} L \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{máx.} = \sqrt{\frac{g}{L}}\,\theta_{máx.} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

El valor del periodo será: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \boxed{2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}}$

Un reloj de péndulo de periodo 1s se dilata 0.1mm por efecto de la temperatura de la habitación en la que se encuentra. Suponiendo que este efecto se mantiene constante, ¿en cuánto se adelantará o atrasará al cabo de 24h?

Solución: I.T.T. 95, 00, 04

La relación entre el periodo de un péndulo y su longitud viene dada por la expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Rightarrow \quad l = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g$$

En un intervalo de tiempo de 24 horas, $\Delta t = 86400\ \mathrm{s}$, dicho péndulo realizará un número N de oscilaciones:

$$N = \frac{\Delta t}{T}$$

Cuando el péndulo se dilata tenemos que:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}} > T \quad , \quad l' = l + \Delta l = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g + \Delta l$$

En el mismo intervalo de tiempo Δt el péndulo realizará ahora menos oscilaciones:

$$N' = \frac{\Delta t}{T'} = \frac{\Delta t}{T}\frac{T}{T'} = N\frac{T}{T'} < N$$

con lo cual nuestro reloj de péndulo va con retraso (el segundero ha avanzado menos)

La diferencia en el número de oscilaciones en los dos casos multiplicada por el periodo que debería tener el péndulo es justamente el tiempo que retrasa el péndulo dilatado:

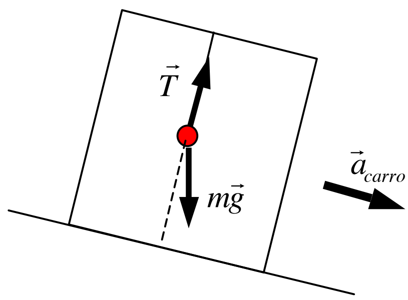
$$t_{retraso} = \Delta N\,T = \left(N - N'\right)T = N\left(1 - \frac{T}{T'}\right)T = \left(1 - \frac{T}{T'}\right)\Delta t$$

$$= \left(1 - \sqrt{\frac{l}{l'}}\right)\Delta t = \left[1 - \sqrt{\frac{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g}{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g + \Delta l}}\right]\Delta t = \boxed{17.4\text{ s}}$$

Un péndulo simple de longitud L está sujeto del techo de un carro que desliza sin rozamiento por un plano inclinado un ángulo θ con la horizontal. Determinar el periodo de oscilación del péndulo para pequeñas amplitudes.

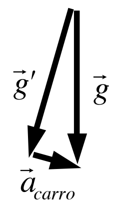
Solución: **I.T.T. 00, 03**

El estudio del deslizamiento del carro muestra que su aceleración a lo largo del plano inclinado es debida a la componente de la aceleración de la gravedad a lo largo de dicho plano: $a_{carro} = g\,\text{sen}\,\theta$. La aceleración de la gravedad efectiva que se observa dentro del carro será (utilizando lo aprendido en movimiento relativo):



$$\vec{g} = \vec{g}\,' + \vec{a}_{carro} \quad \Rightarrow \quad \vec{g}\,' = \vec{g} - \vec{a}_{carro}$$

Dentro del carro se observa por lo tanto una aceleración de la gravedad efectiva que consta solamente de la componente perpendicular al plano de la aceleración de la gravedad $\vec{g}$: $g' = g\cos\theta$.



El periodo de un péndulo para pequeñas oscilaciones está relacionado con su longitud y con la aceleración de la gravedad mediante:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

En nuestro caso tendremos que:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g'}} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{L}{g\cos\theta}}}$$

En la cabina de un ascensor que empezó a elevarse con una aceleración constante $a < g$, se instaló un reloj de péndulo. A la altura h la aceleración del ascensor cambió de sentido manteniendo igual su módulo. ¿Al cabo de qué tiempo de haber iniciado el movimiento la indicación del reloj resulta ser correcta?

Solución: **I.T.T. 99, 01, 04**

Llamemos $(\Delta t)_{subida}$ al tiempo transcurrido durante la subida y $(\Delta t)_{bajada}$ al tiempo transcurrido durante la bajada. En el interior del ascensor acelerado con una aceleración $\vec{a}$ la física se desarrolla como si hubiese una gravedad efectiva $\vec{g}_{ef.} = \vec{g} - \vec{a}$ (movimiento relativo).
Durante la subida y la bajada, el periodo del reloj de péndulo será:

$$T_{subida} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_{ef.,subida}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}} \quad , \quad T_{bajada} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_{ef.,bajada}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$$

El número de oscilaciones que realizará mientras sube y baja será:

$$n_{subida} = \frac{(\Delta t)_{subida}}{T_{subida}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2h}{a}}\sqrt{\frac{g+a}{l}} \quad , \quad n_{bajada} = \frac{(\Delta t)_{bajada}}{T_{bajada}} = \frac{(\Delta t)_{bajada}}{2\pi}\sqrt{\frac{g+a}{l}}$$

En las expresiones anteriores hemos utilizado la relación entre la altura h y el tiempo de subida: $h = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2_{subida}$.

Durante todo el proceso de subida y bajada un reloj de péndulo que estuviese fuera del ascensor (y que por lo tanto ni se adelantase ni se retrasase como le sucede al reloj de dentro) habría realizado el siguiente número de oscilaciones:

$$n = \frac{(\Delta t)_{subida} + (\Delta t)_{bajada}}{T} = \frac{(\Delta t)_{subida} + (\Delta t)_{bajada}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = \frac{1}{2\pi}\left[\sqrt{\frac{2h}{a}} + (\Delta t)_{bajada}\right]\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Si imponemos la condición de que los atrasos y adelantos del reloj instalado en el ascensor se compensan y marca el tiempo correcto.

$$n = n_{subida} + n_{bajada} \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad (\Delta t)_{bajada} = \sqrt{\frac{2h}{a}}\left(\frac{\sqrt{1+\eta}-1}{1-\sqrt{1-\eta}}\right) \qquad \eta = \frac{a}{g}$$

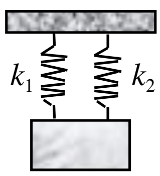
El tiempo total transcurrido desde que arrancó el ascensor será:

$$\Delta t = (\Delta t)_{subida} + (\Delta t)_{bajada} = \sqrt{\frac{2h}{a}}\left(1 + \frac{\sqrt{1+\eta}-1}{1-\sqrt{1-\eta}}\right) = \boxed{\sqrt{\frac{2h}{a}}\left(\frac{\sqrt{1+\eta}-\sqrt{1-\eta}}{1-\sqrt{1-\eta}}\right)}$$

Demostrar que la constante elástica efectiva cuando un objeto se une a dos muelles es: a) $k_{ef.} = k_1 + k_2$, si los dos muelles se unen directamente al objeto, b) $\frac{1}{k_{ef.}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$, si los muelles se unen entre sí formando una cadena en la que al final enganchamos el objeto.

Solución: I.T.T. 00, 03

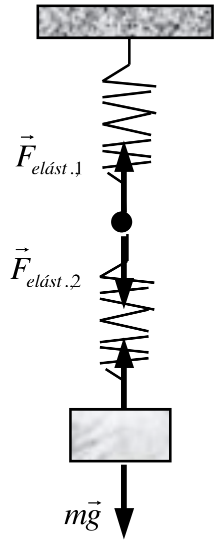
a) En una situación como la de la figura si el bloque tiene una masa m el alargamiento Δx de los muelles en la situación de equilibrio será:



$$mg - k_1\Delta x - k_2\Delta x = 0 \quad \Rightarrow \quad mg - (k_1 + k_2)\Delta x = 0$$

El sistema es por lo tanto equivalente a haber utilizado un único muelle de constante: $\boxed{k_{ef.} = k_1 + k_2}$

b) En una situación en la que los muelles están unidos formando una cadena, en el equilibrio, la suma de fuerzas sobre el objeto debe ser nula, así como la suma de fuerzas que actúan sobre el punto de unión entre los dos muelles, con lo que:



$$\left.\begin{array}{l} F_{elást.2} = mg \quad \Rightarrow \quad k_2 \Delta x_2 = mg \quad \Rightarrow \quad \Delta x_2 = \dfrac{mg}{k_2} \\ F_{elást.1} = F_{elást.2} \quad \Rightarrow \quad k_1 \Delta x_1 = k_2 \Delta x_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta x_1 = \dfrac{k_2}{k_1}\Delta x_2 = \dfrac{mg}{k_1} \end{array}\right\}$$

El alargamiento total del muelle será:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{mg}{k_1} + \frac{mg}{k_2} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) mg$$

Y la fuerza elástica que actúa sobre el objeto en función de su desplazamiento Δx se puede escribir finalmente como:

$$F_{elást.2} = mg = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)^{-1} \Delta x$$

Este par de muelles es por lo tanto equivalente a un solo muelle de constante elástica:

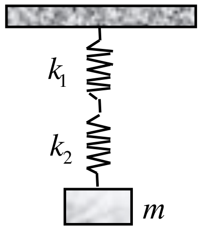
$$\boxed{k_{ef.} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)^{-1}}$$

Un sistema se compone de un cuerpo unido por dos resortes al techo. Las constantes elásticas son k_1 y k_2. Dependiendo de si los dos resortes se utilizan en paralelo o unidos linealmente determinar el trabajo realizado para estirarlos desplazando el cuerpo una longitud Δl.

Solución: **I.T.I. 96, I.T.T. 96**

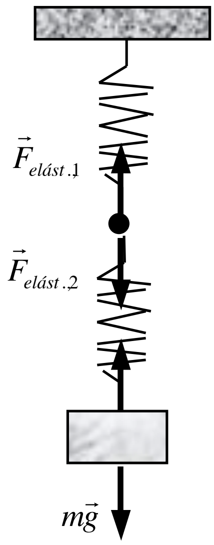
Texto solución

Del techo se cuelga un resorte de constante elástica k_1. De este resorte se cuelga un segundo de constante elástica k_2. Finalmente, de este se cuelga un cuerpo de masa m. a) ¿Cuál es el alargamiento de cada uno de los muelles cuando el cuerpo se encuentra en reposo? b) ¿Cuál sería la frecuencia de los M.A.S. que realizaría el cuerpo si lo separásemos de la posición de equilibrio?



Solución: **I.T.T. 97, 99, 02, 04, 05**

a) Se puede ver que en el equilibrio la suma de fuerzas sobre el objeto debe ser nula, así como la suma de fuerzas que actúan sobre el punto de unión entre los dos muelles, con lo que:



$$F_{elást,2} = mg \quad \Rightarrow \quad k_2 \Delta x_2 = mg \quad \Rightarrow \quad \Delta x_2 = \boxed{\frac{mg}{k_2}}$$

$$F_{elást,1} = F_{elást,2} \quad \Rightarrow \quad k_1 \Delta x_1 = k_2 \Delta x_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta x_1 = \frac{k_2}{k_1} \Delta x_2 = \boxed{\frac{mg}{k_1}}$$

b) El alargamiento total del muelle será:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{mg}{k_1} + \frac{mg}{k_2} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) mg$$

Y la fuerza elástica que actúa sobre el objeto en función de su desplazamiento Δx se puede escribir finalmente como:

$$F_{elást,2} = mg = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \Delta x$$

Este par de muelles es por lo tanto equivalente a un solo muelle de constante elástica:

$$\frac{1}{k_{equiv.}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Los M.A.S. que va a realizar el objeto tendrán una frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{equiv.}}{m}} = \boxed{\sqrt{\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right)\frac{1}{m}}}$$

Disponemos de un resorte horizontal de cte. elástica 13 N/m, cuyos extremos están fijos en sendas paredes verticales separadas por una distancia igual a la longitud natural del muelle l_0. En un punto a distancia $d = 1/3\ l_0$ de uno de sus extremos se sujetó un pequeño cuerpo de masa $m = 25$ g. Despreciando la masa del resorte hallar el periodo de las oscilaciones longitudinales pequeñas de dicho cuerpo.

Solución: I.T.T. 99, 02, 05

El objeto está sometido a la acción de dos muelles, uno de longitud $1/3\ l_0$ por un lado y otro de longitud $2/3\ l_0$ por el otro lado.

Si dividimos un muelle de constante elástica k en dos segmentos iguales de constante elástica k_s se puede demostrar que (ver problema anterior):

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_s} \quad \Rightarrow \quad k_s = 2k$$

Si dividimos un muelle de constante elástica k en tres segmentos iguales de constante elástica k_s:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_s} \quad \Rightarrow \quad k_s = 3k$$

Teniendo en cuenta esto se puede deducir que la constante elástica de cada muelle es inversamente proporcional a su longitud. Si llamamos $\eta = \frac{d}{l_0}$ las constantes elásticas de nuestros dos muelles son: $k_1 = \frac{k}{\eta}$, $k_2 = \frac{k}{1-\eta}$.

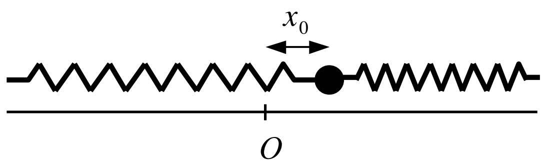
Aplicando la segunda ley de Newton al objeto:

$$ma_x = -k_1 x - k_2 x = -\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{1-\eta}\right) k\,x = k_{equiv.} x \quad , \quad k_{equiv.} = \left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{1-\eta}\right) k$$

El periodo de los pequeños movimientos oscilatorios será:

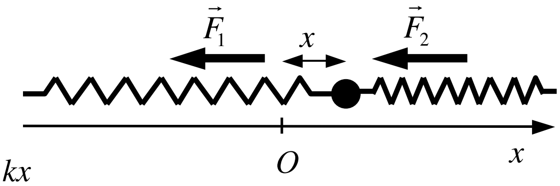
$$\omega = \sqrt{\frac{k_{equiv.}}{m}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{1-\eta}\right)\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\eta(1-\eta)\frac{m}{k}} = \boxed{0.13 \text{ s}}$$

Una partícula de masa m, situada sobre una mesa horizontal sin fricción esta enganchada a dos resortes idénticos, de constante elástica k, cuya longitud sin estirar es l_0, y cuyos extremos están fijos en los puntos P_1 y P_2 separados entre sí por una distancia 2 l_0. Si la partícula se desplaza hacia un lado una pequeña distancia x_0 y después se la suelta, a) encontrar su ecuación del movimiento si el desplazamiento se realiza paralelamente a la longitud de los muelles. b) Si el desplazamiento se realiza perpendicularmente ¿el movimiento resultante sería un M.A.S.?



Solución: I.T.T. 97, 01, 04

a) En el primer caso si desplazamos la partícula de la posición de equilibrio los dos muelles actúan ejerciendo fuerzas elásticas en el mismo sentido la fuerza neta será:



$$F_x = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x = -2kx$$

Es una fuerza elástica donde la constante elástica efectiva resultante es la suma de las dos constantes elásticas de los muelles: $k_{ef.} = k_1 + k_2 = 2k$

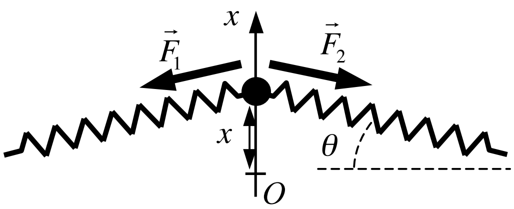
El movimiento resultante será un M.A.S. con una frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{ef.}}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Para calcular la amplitud A y la fase inicial φ del movimiento aplicamos las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ v(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = x_0 \\ \varphi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right)}$$

b) En el segundo caso si realizamos un desplazamiento vertical pequeño en comparación con la longitud de los muelles, $x << l_0$, la nueva longitud de de éstos será:



$$l = \sqrt{l_0^2 + x^2} = l_0 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{l_0}\right)^2} \approx l_0 \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l_0}\right)^2\right]$$

Los módulos de las fuerzas elásticas ejercidas por los muelles serán:

$$F_1 = F_2 = k\,\Delta l = k\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l_0}\right)^2\right] l_0$$

La fuerza resultante sólo tiene componente vertical, las componentes horizontales se anulan:

$$F_x = -\left(F_1 + F_2\right)\operatorname{sen}\theta = -2k\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l_0}\right)^2\right] l_0 \operatorname{sen}\theta \approx -2k\left(\frac{x}{l_0}\right)^3 l_0$$

La fuerza resultante tiene sentido contrario al desplazamiento pero es proporcional a x^3 y no a x, por lo tanto dará lugar a un movimiento oscilatorio que no será un M.A.S.

Un bloque descansa sobre el tablero de una mesa que realiza un movimiento armónico simple de amplitud A y periodo T. a) Si la oscilación es vertical ¿cuál es el máximo valor de A que permitirá al bloque permanecer siempre en contacto con la mesa?, b) Si la oscilación es horizontal, y el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la mesa es μ, ¿cuál es el máximo valor de A para que el bloque no se deslice?

Solución: I.T.T. 96, 00, 03

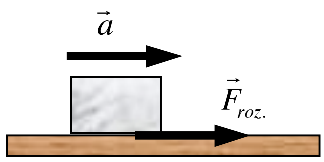
a) Tomemos como sentido positivo de desplazamiento del bloque verticalmente hacia abajo. En su movimiento oscilatorio vertical la aceleración del bloque será:

$$mg - N = ma \quad \Rightarrow \quad a = g - \frac{N}{m} \quad \Rightarrow \quad a \le g$$

Teniendo en cuenta que el valor mínimo para la normal es nulo la aceleración vertical del bloque hacia abajo no puede sobrepasar el valor de g. Ahora bien, en un movimiento oscilatorio el valor máximo para la aceleración es $a_{máx.} = \omega^2 A$ con lo que:

$$\omega^2 A \le g \quad \Rightarrow \quad A \le \frac{g}{\omega^2} = \boxed{g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2}$$

b) En el movimiento oscilatorio horizontal la fuerza responsable del movimiento del bloque es la fuerza de rozamiento estática con la mesa, que hace que el bloque siga el movimiento de ésta:



$$F_{roz.} = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F_{roz.}}{m} \leq \frac{F_{roz.máx.}}{m} = \frac{\mu N}{m} = \frac{\mu mg}{m} = \mu g$$

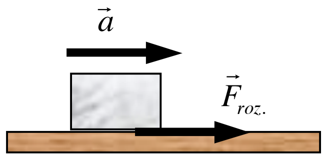
Igual que antes, el valor máximo para la aceleración en un movimiento oscilatorio es $a_{máx.} = \omega^2 A$ con lo que:

$$\omega^2 A \leq \mu g \quad \Rightarrow \quad A \leq \frac{\mu g}{\omega^2} = \boxed{\mu g \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2}$$

Un objeto esta colocado encima de una mesa con ruedas. Si a esta se le comunica horizontalmente un M.A.S. con una frecuencia de 3 Hz, y si el coeficiente de rozamiento entre la mesa y el objeto es de 0.40 determinar la amplitud máxima permitida de movimiento para que el objeto no deslice sobre la mesa.

Solución: **I.T.T. 97, 01, 04**

Para que el objeto acompañe en su movimiento a la mesa sin deslizar sobre ésta la fuerza de rozamiento tiene que ser capaz de comunicarle al objeto en todo momento la misma aceleración que la mesa.

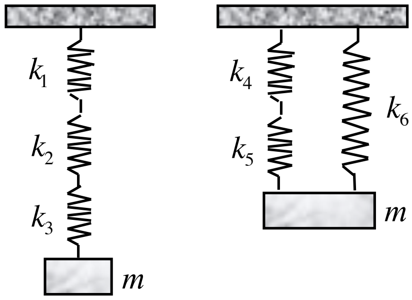


$$\left. \begin{array}{c} F_{roz.} = ma \\ \left|F_{roz.}\right| \leq F_{roz.máx.} = \mu mg \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad |a| \leq \mu g$$

Si esta condición debe cumplirse en cualquier instante de tiempo, basta con que el máximo valor de la aceleración lo cumpla:

$$a_{máx.} \leq \mu g \quad \Rightarrow \quad \omega^2 A \leq \mu g \quad \Rightarrow \quad A \leq \frac{\mu g}{\omega^2} = \frac{\mu g}{(2\pi\nu)^2} = \boxed{11.0\,\text{mm}}$$

Un bloque de 25 kg se cuelga de una serie de resortes como se indica en la figura. Para cada una de las dos disposiciones determínese para el movimiento oscilatorio del bloque cuando se le desplaza de la posición de equilibrio y se le suelta: a) El periodo y la frecuencia. b) La velocidad y aceleración máximas del bloque si la amplitud inicial fue de 30 mm. Datos: k_1 = 8 kN/m, k_2 = 12 kN/m, k_3 = 16 kN/m, k_4 = 6 kN/m, k_5 = 24 kN/m, k_6 = 3 kN/m.



Solución: **I.T.T. 95, 03**

a) Para el primer caso la cadena de muelles es equivalente a un muelle de constante elástica:

$$k = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}\right)^{-1} = \frac{48}{13}\ \mathrm{kN/m}$$

con lo que el periodo y la frecuencia valdrán:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \boxed{0.517\ \mathrm{s}} \qquad \nu = \frac{1}{T} = \boxed{1.93\ \mathrm{Hz}}$$

Para el segundo caso la cadena de muelles 4 y 5 es equivalente a un muelle de constante elástica:

$$k_{45} = \left(\frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5}\right)^{-1}$$

y este muelle junto con el muelle 6 serían equivalente a un muelle de constante elástica:

$$k = k_{45} + k_6 = \left(\frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5}\right)^{-1} + k_6 = \frac{39}{5}\ \mathrm{kN/m}$$

con lo que el periodo y la frecuencia valdrán:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \boxed{0.356\ \mathrm{s}} \qquad \nu = \frac{1}{T} = \boxed{2.81\ \mathrm{Hz}}$$

b) La velocidad y aceleración máximas en un movimiento oscilatorio vienen dados por:

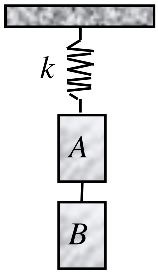
$$v_{máx.} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}\,A \quad , \quad a_{máx.} = \omega^2 A = \left(\frac{k}{m}\right)A$$

que en nuestros dos casos conduce a:

$$v_{máx.} = \boxed{0.365\ \mathrm{m/s}}, \quad a_{máx.} = \boxed{4.43\ \mathrm{m/s^2}}$$

$$v_{máx.} = \boxed{0.530 \text{ m/s}}, \quad a_{máx.} = \boxed{9.36 \text{ m/s}^2}$$

Se observa que el periodo de vibración para la disposición presentada en la figura es de 0.6 s. Si después de quitar el cilindro B, cuyo masa es de 1.5 kg, se observa que el nuevo periodo es de 0.5 s, determinar a) la masa del bloque A, b) la constante elástica del muelle.



Solución: **I.T.T. 95, 03**

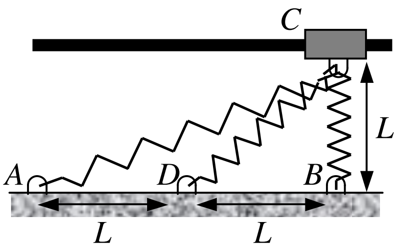
El periodo vendrá dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Para los dos casos mencionados tenemos el siguiente par de ecuaciones:

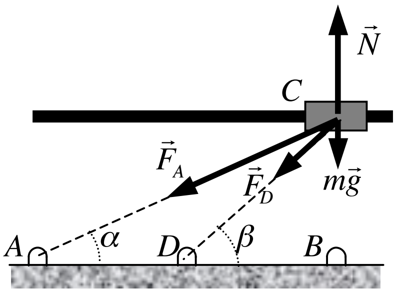
$$\left.\begin{array}{r} T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_A + m_B}{k}} \\ T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_A}{k}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{m_A = \left(\dfrac{T_2^2}{T_1^2 - T_2^2}\right) m_B = 3.41 \text{ kg}} \\ \boxed{k = \left(\dfrac{4\pi^2 m_B}{T_1^2 - T_2^2}\right) = 538 \text{ N/m}} \end{array}\right.$$

Un collarín C de 1.2 kg puede deslizar sin rozamiento a lo largo de una barra horizontal y está unido a tres resortes cada uno de constante k = 400 N/m, cuya longitud no deformada es de 150 mm. Si el collarín se suelta desde el reposo en la posición aquí mostrada, determínese: a) fuerzas que actúan sobre el collarín en dicha posición, b) aceleración del mismo cuando está en la vertical de los puntos B, D y A, c) razonar el tipo de movimiento al que está sometido el collarín, d) velocidad máxima que alcanzará en el movimiento, ¿dónde se produce?



Solución: **I.T.I. 05**

a) Dibujando el diagrama de fuerzas:



$$F_A = k\Delta L_A = k\left(\frac{L}{\operatorname{sen}\alpha} - L\right) =$$

$$= \left(\sqrt{5} - 1\right) k\, L = \boxed{74.16 \text{ N}}$$

$$F_B = k\Delta L_B = k\left(\frac{L}{\operatorname{sen}\beta} - L\right) = \left(\sqrt{2} - 1\right) k\, L = \boxed{24.85 \text{ N}}$$

$\operatorname{tg}\alpha = 1/2\ ,\ \operatorname{tg}\beta = 1$

$mg = \boxed{11.76 \text{ N}}$

Aplicando la segunda ley de Newton a las componentes verticales:

$$N = mg + F_{A,y} + F_{D,y} = mg + F_A \operatorname{sen}\alpha + F_D \operatorname{sen}\beta = \boxed{62.50 \text{ N}}$$

b) Aplicando la segunda ley de Newton a las componentes horizontales (tomamos el sentido positivo del eje horizontal X hacia la derecha):

$$-F_A \cos\alpha - F_D \cos\beta = ma_x \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{1}{m}\left(-F_A \cos\alpha - F_D \cos\beta\right) = \boxed{-69.92 \text{ m/s}^2}$$

Cuando se encuentra sobre la vertical de D por simetría la fuerza horizontal resultante es nula:

$$a_x = \boxed{0}$$

Cuando se encuentra sobre la vertical de A el resultado es el mismo que sobre B pero con el signo cambiado:

$$a_x = \boxed{69.92 \text{ m/s}^2}$$

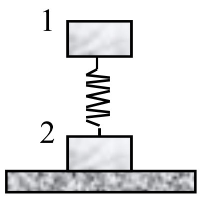
c) El tipo de movimiento al que está sometido el collarín será un movimiento oscilatorio entre las verticales de los puntos A y B. Dado que parte del reposo desde la vertical de B y está sometido en todo momento a una fuerza neta dirigida hacia el punto sobre la vertical de D (este punto será por lo tanto un punto de equilibrio estable con un mínimo de energía potencial elástica), irá ganando velocidad hasta llegar a la vertical de D, donde cambia la aceleración de sentido y por tanto la velocidad comenzará a decrecer, hasta llegar a la vertical de A donde la velocidad se hará nula y la aceleración máxima, siendo por tanto ese punto junto con la vertical de B puntos de retorno del collarín, donde se invierte el sentido de su movimiento.

d) La velocidad máxima se alcanza en la vertical de D (situación de equilibrio estable y mínimo de energía potencial elástica) y su valor, ya que las fuerzas que intervienen son conservativas, lo podemos obtener aplicando el principio de conservación de la energía entre las posiciones verticales sobre los puntos B y D (téngase en cuenta que en esta última posición uno de los muelles está sin estirar y los otros forman un ángulo β con la horizontal):

$$\frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\operatorname{sen}\alpha}-L\right)^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\operatorname{sen}\beta}-L\right)^2=\frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\operatorname{sen}\beta}-L\right)^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\operatorname{sen}\beta}-L\right)^2+\frac{1}{2}mv_{máx.}^2$$

$$\Rightarrow \quad v_{máx.}=\left[\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}-1\right)^2-\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\beta}-1\right)^2\right]^{1/2}\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}L=\boxed{3.19\text{ m/s}}$$

Dos cuerpos 1 y 2 de masas 1.0 kg y 4.1 kg respectivamente se unen entre sí por un resorte como se indica en la figura. El cuerpo 1 realiza oscilaciones armónicas verticales de amplitud A = 1.6 cm y de frecuencia angular ω = 25 rad/s. Despreciando la masa del resorte, determinar: a) los valores máximo y mínimo de la fuerza de presión de este sistema sobre la superficie horizontal, b) la amplitud A' de movimiento que habría que darle al cuerpo 1 para que el cuerpo 2 perdiese el contacto con el plano horizontal.



Solución: I.T.T. 99, 02, 05

f) Tomando el origen de alturas $y = 0$ en la posición en que el cuerpo 1 se encontraba en equilibrio, dicho cuerpo va tener una aceleración vertical en su M.A.S. que según la segunda ley de Newton será:

$$\vec{F}_{elást.\to 1}+m_1\vec{g}=m_1\vec{a} \quad \Rightarrow \quad F_{elást.\to 1,y}-m_1 g=m_1 a_y=-m_1\omega^2 y$$

$$\Rightarrow \quad F_{elást.\to 1,y}=m_1 g-m_1\omega^2 y$$

Teniendo en cuenta que las fuerzas elásticas que ejerce el muelle sobre cada cuerpo son iguales y de sentido contrario, la segunda ley de Newton aplicada al cuerpo 2 nos informará de la magnitud de la normal que el suelo ejerce sobre 2 (que es igual a la magnitud de la fuerza que 2 ejerce sobre el suelo):

$$\vec{N}_{suelo\to 2}+\vec{F}_{elást.\to 2}+m_2\vec{g}=0 \quad \Rightarrow \quad N_{suelo\to 2}+F_{elást.\to 2,y}-m_2 g=0$$

$$\Rightarrow \quad N_{suelo\to 2}-F_{elást.\to 1,y}-m_2 g=0 \quad \Rightarrow \quad N_{suelo\to 2}+m_1\omega^2 y-m_1 g-m_2 g=0$$

$$\Rightarrow \quad N_{suelo\to 2}=(m_1+m_2)g-m_1\omega^2 y$$

Teniendo en cuenta que la coordenada y del cuerpo 1 va a variar entre $-A$ y A:

$$\Rightarrow \quad (m_1 + m_2)g - m_1\omega^2 A \leq N_{suelo \to 2} \leq (m_1 + m_2)g + m_1\omega^2 A$$

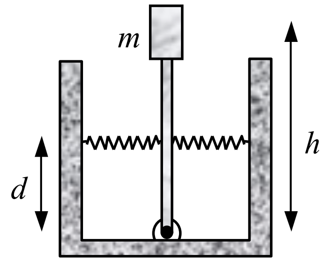
$$\Rightarrow \quad \boxed{40\text{ N} \leq N_{suelo \to 2} \leq 60\text{ N}}$$

El valor mínimo se alcanza cuando el cuerpo 1 se encuentra en su posición más alta y el valor máximo cuando se encuentra en su posición más baja.

g) Para una amplitud A' de forma que se pierda el contacto con el suelo:

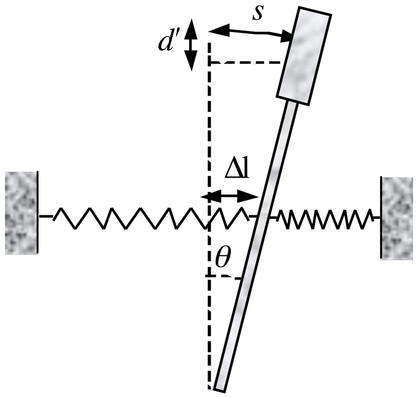
$$(m_1 + m_2)g - m_1\omega^2 A' \leq 0 \quad \Rightarrow \quad A' \geq \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1\omega^2} = \boxed{8.0\text{ cm}}$$

Con relación al sistema mostrado en la figura, si h = 700 mm y d = 500 mm y ambos resortes tienen una constante elástica de 600 N/m, determínese: a) el valor máximo que puede tener la masa para que se den movimientos oscilatorios, b) la masa m para la cual el periodo de las pequeñas oscilaciones es 0.5 s.



Solución: I.T.T. 97, 01

c) Si m va a realizar movimientos oscilatorios alrededor de la vertical quiere decir que en dicha posición su energía potencial debe presentar un mínimo (punto de equilibrio estable). Las energías potenciales que van a entrar en juego son la gravitatoria y la elástica. Tomemos como origen de energías potenciales gravitatorias la altura de m cuando está en la posición vertical de equilibrio, y consideremos que los muelles estaban inicialmente con su longitud natural, de esta forma la energía potencial total de m será nula. Si giramos un pequeño ángulo θ la masa m habrá descendido una distancia (utilizando que θ es muy pequeño):



$$d' = h(1-\cos\theta) = h\left(1-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}\right) \approx h\left(1-\sqrt{1-\theta^2}\right) \approx h\left(1-\left[1-\frac{1}{2}\theta^2\right]\right) = \frac{1}{2}h\theta^2$$

Su nueva energía potencial gravitatoria será:

$$E_{pot.grav.} = -mgd' = -\frac{1}{2}mgh\theta^2$$

Los muelles se habrán alargado y estirado respectivamente una distancia:

$$\Delta l = d\operatorname{sen}\theta \approx d\theta$$

Con lo que la nueva energía potencial elástica será:

$$E_{pot.elást.} = 2\left[\frac{1}{2}k(\Delta l)^2\right] = 2\left[\frac{1}{2}kd^2\theta^2\right]$$

La energía potencial total de m será (teniendo en cuenta que $s = h\theta$):

$$E_{pot.total} = \frac{1}{2}\left(2kd^2 - mgh\right)\theta^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{2kd^2 - mgh}{h^2}\right)}_{k_{ef.}}s^2$$

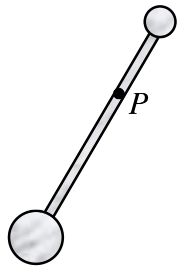
Esta expresión es similar a la energía potencial elástica almacenada en un muelle al estirarlo o contraerlo una distancia s y con una constante elástica efectiva igual a la expresión contenida en el último paréntesis. Para que ésta energía potencial tenga un mínimo en la posición de equilibrio necesitamos que la constante elástica efectiva sea positiva:

$$\frac{2kd^2 - mgh}{h^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad m < \frac{2kd^2}{gh} = \boxed{43.73\text{kg}}$$

d) La masa m que nos piden será:

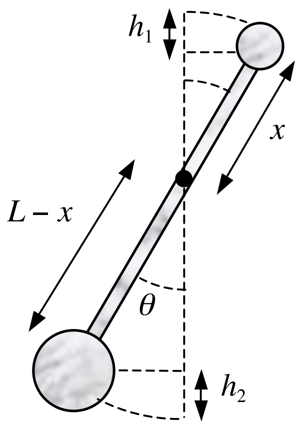
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{ef.}}} = 2\pi\sqrt{\frac{mh^2}{2kd^2 - mgh}} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{2kd^2}{\left(\frac{2\pi h}{T}\right)^2 + gh} = \boxed{3.56\text{kg}}$$

En una barra, de longitud L y sin masa, se colocan dos masas m_1 y $m_2 > m_1$ en los extremos. El sistema se pone a oscilar alrededor de P. Encontrar el periodo de las pequeñas oscilaciones en función de la distancia de P a m_1.



Solución: **I.T.T. 97, 01**

Si el sistema va a oscilar alrededor de la posición de equilibrio vertical quiere decir que en dicha posición su energía potencial debe presentar un mínimo (punto de equilibrio estable). La única energía potencial que va a entrar en juego es la gravitatoria. Tomemos un origen de energías potenciales gravitatorias del sistema de tal forma que en la posición vertical de equilibrio sea nula. Cuando haya girado un pequeño ángulo θ la masa m_1 habrá descendido una altura:



$$h_1(\theta) = x[1 - \cos\theta] = x\left[1 - \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta}\right] \approx$$

$$\approx x\left[1 - \sqrt{1 - \theta^2}\right] \approx x\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right)\right] = \frac{1}{2}x\,\theta^2$$

La masa m_2 habrá ascendido una altura:

$$h_2(\theta) = (L - x)[1 - \cos\theta] = \ldots \approx \frac{1}{2}(L - x)\theta^2$$

Y la nueva energía potencial del sistema será:

$$E_{pot.}(\theta) = m_2 g h_2(\theta) - m_1 g h_1(\theta) \approx \frac{1}{2}\left[m_2(L-x) - m_1 x\right] g\theta^2$$

La energía potencial para pequeños desplazamientos angulares tiene forma parabólica $E_{pot.}(\theta) \approx \frac{1}{2}k\theta^2$ donde $k = \left[m_2(L-x) - m_1 x\right]g$ hace el papel de constante elástica. Si $k > 0$ el movimiento resultante va a ser un M.A.S.: $\theta(t) = \theta_{máx.}\cos(\omega t + \varphi)$.

$$k > 0 \quad \Rightarrow \quad \left[m_2(L-x) - m_1 x\right] > 0 \quad \Rightarrow \quad x < \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)L \qquad (1)$$

Cuando se expresa la energía potencial en función de desplazamientos lineales $E_{pot.}(x) \approx \frac{1}{2}k x^2$ la frecuencia angular está relacionada con la constante elástica (que se medirá en el S.I. en J/m^2 o lo que es equivalente N/m) y la masa de la forma: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
Cuando se expresa la energía potencial en función de variables angulares $E_{pot.}(\theta) \approx \frac{1}{2}k\theta^2$ (la constante elástica k de esta expresión se medirá en el S.I. en J) la expresión para la frecuencia angular es similar pero sustituyendo magnitudes lineales por magnitudes angulares. En nuestro caso debemos sustituir la masa por el momento de inercia I del sistema respecto del punto de rotación:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{I}} = \sqrt{\frac{\left[m_2(L-x) - m_1 x\right]g}{m_1 x^2 + m_2(L-x)^2}} \qquad (2)$$

Otra forma de calcular dicha frecuencia angular sin utilizar el concepto de momento de inercia es la siguiente. Hemos concluido en la discusión anterior que la variable angular θ va a realizar un movimiento angular $\theta(t) = \theta_{máx.}\cos(\omega t + \varphi)$ donde $\theta_{máx.}$ es la amplitud del movimiento. Si derivamos para calcular la velocidad angular en función del tiempo:

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta_{máx.}\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

donde la máxima velocidad angular sería: $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{máx.} = \theta_{máx.}\omega \qquad (3)$

Cuando el sistema alcanza su desplazamiento angular máximo $\theta_{máx.}$ toda su energía es potencial gravitatoria, su energía cinética es nula. Cuando el sistema pasa por su posición de equilibrio vertical su energía potencial gravitatoria es nula (visto como hemos tomado el origen de energías potenciales gravitatorias) en cambio su energía cinética será máxima. Como la energía total del sistema debe permanecer constante:

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1,máx.}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,máx.}^2 = \frac{1}{2}k\,\theta_{máx.}^2$$

Relacionando las velocidades lineales con las angulares:

$$v_1 = x\left(\frac{d\theta}{dt}\right) \quad , \quad v_2 = (L-x)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

sustituyendo:

$$\frac{1}{2}m_1\, x^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2_{máx.} + \frac{1}{2}m_2(L-x)^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2_{máx.} = \frac{1}{2}k\,\theta^2_{máx.}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{máx.} = \sqrt{\frac{k}{m_1\, x^2 + m_2(L-x)^2}}\;\theta_{máx.}$$

Comparando con la expresión (3) deducimos que:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 x^2 + m_2(L-x)^2}} = \sqrt{\frac{\left[m_2(L-x) - m_1 x\right]g}{m_1 x^2 + m_2(L-x)^2}}$$

que es el mismo resultado que habíamos obtenido anteriormente (ver expresión (2)).

Este resultado es cierto sólo cuando se verifica la condición (1). Si dicha condición no se verifica, es decir, si $x > \left(\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\right)L$ la constante elástica que aparecía en la discusión anterior sería negativa. La energía potencial tendría un máximo para $\theta = 0$. La posición vertical sería una posición de equilibrio inestable, y si apartamos ligeramente el sistema de la vertical bascularía de forma que acabaría oscilando con la masa pequeña m_1 abajo y la masa grande m_2 arriba. Estudiando este caso como lo hemos hecho en el caso anterior llegaríamos a que:

$$\omega = \sqrt{\frac{\left[m_1 x - m_2(L-x)\right]g}{m_1 x^2 + m_2(L-x)^2}}$$

Podemos englobar los dos casos en uno usando valores absolutos:

$$\omega = \sqrt{\frac{\left|m_1 x - m_2(L-x)\right|g}{m_1 x^2 + m_2(L-x)^2}}$$

El valor del periodo será:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{m_1 x^2 + m_2(L-x)^2}{\left|m_1 x - m_2(L-x)\right|g}}}$$