DINAMICA VARIOS:

Sobre un objeto se ejercen dos fuerzas: $\vec{F}_1 = \left(-2.4\hat{i} + 6.4\hat{j}\right)$ N y $\vec{F}_2 = \left(8.5\hat{i} - 9.7\hat{j}\right)$ N. a) ¿Cuál es el módulo de cada fuerza? b) ¿Cuál es el ángulo de cada una de estas fuerzas con el eje X? c) Calcular el módulo y dirección de la fuerza resultante sobre el objeto.

Solución: I.T.I. 99

Texto solución

Una partícula de masa $m_1 = 0.2$ kg se mueve a $v_1 = 0.4$ m/s a lo largo del eje X cuando choca con otra de masa $m_2 = 0.3$ kg en reposo. Después del choque la primera partícula se mueve con una velocidad $v_1' = 0.2$ m/s en una dirección que forma 40º con el eje X. Determinar: a) el módulo y la dirección de la velocidad de la segunda partícula después del choque, b) el cambio de velocidad y momento lineal de cada partícula.

Solución: I.T.I. 95

Texto solución

Un cuerpo con una masa m = 10 g cae desde una altura de 3 m sobre un montículo de arena penetrando d = 3 cm antes de detenerse, ¿qué fuerza constante ejerce la arena sobre el cuerpo?

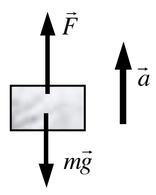
Solución: I.T.I. 95, 99

Texto solución

Se deja caer libremente un cuerpo de 10 g de masa. Supuesta nula la resistencia del aire, y cuando su velocidad es v = 20 m/s, se le opone una fuerza que detiene su caída al cabo de 4 s. a) ¿Cuál debe ser esa fuerza? b) ¿Qué espacio habrá recorrido hasta el momento de oponerse la fuerza? c) ¿Qué espacio total habrá recorrido hasta el momento de detenerse?

Solución: I.T.I. 05

a) El cuerpo va a realizar un movimiento unidimensional vertical. Llamemos a dicho eje el eje X y tomemos el sentido positivo hacia abajo. Aplicando la segunda ley de Newton:



$$\left.\begin{array}{l} M\vec{g}+\vec{F}=M\vec{a} \quad \Rightarrow \quad Mg-F=Ma_x \\ a_x=\dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}=\dfrac{0-v}{\Delta t}=-\dfrac{v}{\Delta t} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad F=M\left(g+\frac{v}{\Delta t}\right)=\boxed{0.148\ \text{N}}$$

b) En la primera parte del problema tenemos un movimiento uniformemente acelerado con aceleración g:

$$v^2=0+2g(\Delta x)_{\substack{primer\\trayecto}} \quad \Rightarrow \quad (\Delta x)_{\substack{primer\\trayecto}}=\frac{v^2}{2g}=\boxed{20.4\ \text{m}}$$

c) En la segunda parte del problema tenemos un movimiento uniformemente acelerado con aceleración a_x:

$$0=v^2+2a_x(\Delta x)_{\substack{segundo\\trayecto}} \quad \Rightarrow \quad (\Delta x)_{\substack{segundo\\trayecto}}=-\frac{v^2}{2a_x}$$

El desplazamiento final será: $\Delta x=(\Delta x)_{\substack{primedr\\trayecto}}+(\Delta x)_{\substack{segundo\\trayecto}}=\dfrac{v^2}{2g}-\dfrac{v^2}{2a_x}=\boxed{60.4\ \text{m}}$

Un tronco de un árbol de 45 kg flota en un río cuya velocidad de corriente es de 8 km/h. Un cisne de 10 kg intenta aterrizar en el tronco mientras vuela a una velocidad de 8 km/h en sentido contrario al de la corriente. El cisne resbala a lo largo del tronco y sale de éste con una velocidad de 2 km/h. Calcular la velocidad final del tronco. Despreciar el rozamiento con el agua.

Solución: I.T.I. 96, 04

Si no hay rozamiento con el agua podemos aplicar la conservación del momento lineal:

$$m_{cisne}v_{cisne}+m_{tronco}v_{tronco}=m_{cisne}v'_{cisne}+m_{tronco}v'_{tronco}$$

$$\Rightarrow \quad v'_{tronco}=\frac{m_{cisne}}{m_{tronco}}\left(v_{cisne}-v'_{cisne}\right)+v_{tronco}=\cancel{\frac{20}{3}\ \text{km/h}}$$

Jose Javier Sandonís R..., 11/11/04 11:50
Eliminado: Texto solución

Una persona se encuentra de pie en la plataforma de un camión que se mueve a 36 km/h. ¿Con qué ángulo y dirección debe inclinarse para no caer si en 2 s la velocidad cambia a: a) 45 km/h, b) 9 km/h.

Solución: **I.T.I. 95**

Texto solución

Un cuerpo cuya masa es de 2 kg se desplaza sobre una superficie horizontal lisa bajo la acción de una fuerza horizontal $F = 55 + t^2$ donde F se expresa en N y t en segundos. Calcular la velocidad de la masa cuando $t = 5$ s si en $t = 0$ estaba en reposo.

Solución: **I.T.I. 96**

Texto solución

Un cuerpo inicialmente en reposo en x_0 se mueve en línea recta bajo la acción de una fuerza $F = -\frac{k}{x^2}$. Demostrar que su velocidad en función de su posición es: $v(x)^2 = \frac{2k}{m}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)$

Solución: **I.T.I. 96, 04**

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$-\frac{k}{x^2} = ma \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{k}{mx^2}$$

y teniendo en cuenta que el cuerpo parte del reposo ($v_0 = 0$) y que cuando la aceleración viene dada en función de la posición podemos utilizar la siguiente expresión:

$$v^2 = v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} a\,dx = \frac{2k}{m}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)$$

Si algún día nos encontrásemos con una partícula con masa negativa ¿como la reconoceríamos? Discutir como sería su comportamiento en su interacción con la tierra, si caería o no como todos los demás cuerpos, así como su interacción con otra partícula semejante pero de masa positiva.

Jose Javier Sandonís R..., 12/11/04 12:02
Eliminado:

Solución: **I.T.I. 98, 01, I.T.T. 97, 01**

Según la ley de la gravitación de Newton la fuerza gravitatoria que la Tierra, de masa M, ejerce sobre una partícula de masa m que se encuentre en su superficie viene dada por:

$$\vec{F}_{grav.} = -G\frac{Mm}{R^2}\hat{r} \qquad (1)$$

donde R es el radio de la Tierra y $\hat{r}$ es el vector unitario en la dirección radial desde el centro de la Tierra.

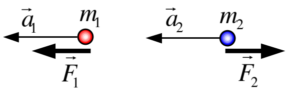
Aplicando la 2ª ley de Newton podemos obtener la aceleración con la que se mueve nuestra partícula:

$$\vec{F}_{grav.} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad -G\frac{Mm}{R^2}\hat{r} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = -G\frac{M}{R^2}\hat{r} = -9.8\,\mathrm{m/s^2}\,\hat{r}$$

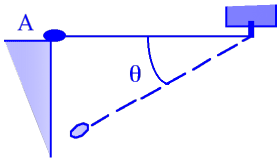
Observamos que la aceleración resultante es la aceleración de la gravedad, y que ¡es independiente del valor de la masa de la partícula!
¿Cómo puede ser posible que una partícula de masa negativa se vea atraída hacia la Tierra?
La explicación es sencilla: Si uno considera una masa m negativa en la ecuación (1) la fuerza resultante tiene la misma dirección y sentido que $\hat{r}$, por lo tanto es una

FUERZA REPULSIVA. Al utilizar la 2ª ley de Newton, si la masa es negativa, los vectores fuerza y aceleración tienen sentidos contrarios, por lo tanto dicha masa se verá sometida a una ACELERACION ATRACTIVA.
Vemos por lo tanto que un experimento de caída libre no distinguiría entre partículas de masa positiva y partículas de masa negativa.

¿Qué ocurriría si estudiamos la interacción gravitatoria entre dos partículas, una de masa positiva y otra de masa negativa?
Al igual que ocurría en el caso anterior, las fuerzas gravitatorias que se van a ejercer serán fuerzas repulsivas. Para la masa positiva su aceleración tendrá el mismo sentido que la fuerza gravitatoria que experimenta, y por lo tanto será repulsiva. En cambio para la masa negativa su aceleración será de sentido contrario a la fuerza que actúa sobre ella, será por lo tanto atractiva. El movimiento resultante sería el indicado en la figura, donde la partícula de masa negativa perseguiría a la partícula de masa positiva mientras ésta tiende a alejarse de la primera.

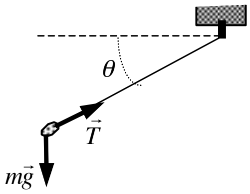


Una bolsa se empuja suavemente desde lo alto de una pared en A y se balancea en un plano vertical en el extremo de una cuerda de longitud L. Para cualquier posición de la bolsa determínese la componente tangencial de la aceleración y obténgase su velocidad. Determinar el valor del ángulo θ_{rotura} para el cual la cuerda se rompe, si se sabe que puede soportar una tensión máxima igual al doble del peso de la bolsa.



Solución: I.T.I. 97, 00, 03, I.T.T. 97, 04

El diagrama de fuerzas sobre la bolsa será como se indica en la figura. Planteando la segunda ley de Newton y descomponiendo en componentes tangencial y normal tenemos que:



$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} mg\cos\theta = ma_t & (1) \\ T - mg\,\text{sen}\,\theta = ma_n & (2) \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos que: $\boxed{a_t = g\cos\theta}$

Para calcular la velocidad en función de la posición angular de la bolsa tenemos en cuenta que la aceleración tangencial es justamente el ritmo al cual varía el módulo de la velocidad con el tiempo: $\dfrac{dv}{dt} = g\cos\theta$

En esta ecuación tenemos tres variables: v, t y θ, y por lo tanto no podemos separar variables e integrar. Si multiplicamos y dividimos por $d\theta$ en el lado izquierdo de la ecuación tenemos que:

$$\frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = g\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{d\theta}\omega = g\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{d\theta}\frac{v}{l} = g\cos\theta$$

Ahora tenemos una ecuación con sólo dos variables: v y θ y ya podemos separarlas e integrar imponiendo las condiciones iniciales del movimiento:

$$\int_0^v v\,dv = \int_0^\theta gl\cos\theta\,d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}v^2 = gl\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{2gl\,\mathrm{sen}\,\theta}}$$

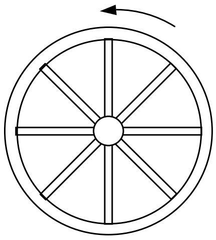
Para determinar en qué posición se rompe la cuerda utilizamos la ecuación (2):

$$T = mg\,\mathrm{sen}\,\theta + ma_n = mg\,\mathrm{sen}\,\theta + m\frac{v^2}{l} = mg\,\mathrm{sen}\theta + m\left(2g\,\mathrm{sen}\theta\right) = 3mg\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Cuando la tensión alcance su valor máximo y se rompa la cuerda en ese momento el ángulo será θ_{rotura} y tendremos que:

$$T_{máx.} = 2mg = 3mg\,\mathrm{sen}\theta_{rotura} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{rotura} = \mathrm{Arc\,sen}\left(\frac{2}{3}\right) = 41.81^{\circ}}$$

La estación espacial Columbus coprotagonista de la película “2001 una odisea en el espacio” es semejante a una inmensa rueda de carro antiguo que rota sobre sí misma para generar sobre los astronautas una gravedad artificial que les permita moverse andando por el suelo de forma análoga a como lo harían en la tierra. La comunicación entre las distintas plantas se hace con ascensores que se desplazan por el interior de los radios de la rueda.



a) Averigua cuál debe ser la relación entre la velocidad de rotación y el radio de la estación para generar sobre el piso exterior una gravedad artificial igual a la de la tierra.
b) Si los ascensores se mueven uniformemente, encuentra una fórmula que exprese el peso del pasajero en función del tiempo al descender en él.
c) Razona lo que le pasaría al pasajero si al descender en el ascensor se rompiera la cuerda que lo sustenta.

Nota: si $\vec{a} = \omega^2 \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \mathrm{senh}\left[\omega(t - t_0)\right]\hat{r}$

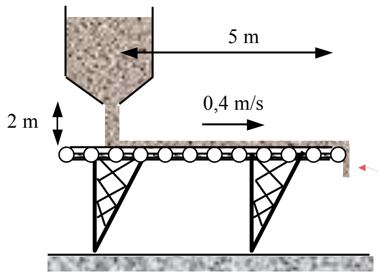
Solución: **I.T.I. 92, I.T.T. 96**

Texto solución

Desde un granero caen 240 Kg de trigo por minuto sobre una cinta transportadora horizontal de masa total 100 Kg. La distancia entre la abertura del granero y la cinta es de 2 m, y se supone que el grano al iniciar su caída parte del reposo. La velocidad de arrastre de la cinta es de 0,4 m/s.

d) ¿Que fuerza ejerce la cinta sobre el trigo en el lugar del impacto? (suponer que el trigo queda en reposo con la cinta).

e) ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento mínimo entre el suelo y las patas de la cinta para que estas no deslicen?



Jose Javier Sandonís R…, 10/11/04 18:01
Con formato: Numeración y viñetas

Solución: I.T.I. 98, 00, I.T.T. 97, 99, 02, 05

Cojamos nuestro sistema de referencia de forma que el eje X sea horizontal hacia la derecha y el eje Y vertical hacia arriba.

a) Cuando un grano de trigo de masa dm partiendo del reposo cae desde una altura $h = 2$ m e impacta con la cinta posee una velocidad: $\vec{V}_{antes} = -\sqrt{2gh}\,\hat{j}$. Después se deja arrastrar por la cinta con una velocidad $\vec{V}_{después} = V_{cinta}\,\hat{i}$. El cambio en el momento lineal del grano de trigo será por lo tanto:

$$d\vec{p} = dm\vec{V}_{después} - dm\vec{V}_{antes} = dm\left(\vec{V}_{después} - \vec{V}_{antes}\right) = dm\,\Delta\vec{V}$$

La fuerza que ha realizado la cinta sobre el grano de trigo que cae para cambiar su momento lineal será:

$$\vec{F}_{cinta\rightarrow trigo} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \left(\frac{dm}{dt}\right)\Delta\vec{V} = \boxed{\left(1.6\hat{i} + 25.0\hat{j}\right)\text{N}}$$

Donde $\left(\frac{dm}{dt}\right)$ es el ritmo al cual cae masa de trigo sobre la cinta y vale:

$$\left(\frac{dm}{dt}\right) = \frac{240\text{ kg}}{60\text{ s}} = 4\text{ kg/s}$$

b) Si calculamos la cantidad de grano de trigo que se halla encima de la cinta, teniendo en cuenta el tiempo Δt que tarda un grano desde que cae hasta que recorre la distancia d al extremo de la cinta:

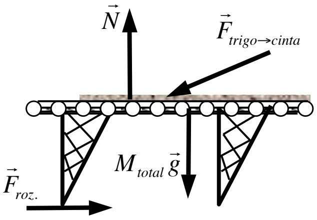
Jose Javier Sandonís R…, 10/11/04 18:01
Con formato: Numeración y viñetas

$$m_{trigo} = \left(\frac{dm}{dt}\right)\Delta t = \left(\frac{dm}{dt}\right)\frac{d}{v_{cinta}} = 50\text{ kg}$$

Dibujando el diagrama de fuerzas sobre la cinta transportadora (incluyendo el trigo que se encuentra sobre ella), teniendo en cuenta que por la tercera ley de Newton la fuerza que el trigo que cae ejerce sobre la cinta transportadora es igual y de sentido contrario a la que ésta ejerce sobre el trigo: $\vec{F}_{trigo\to cinta} = -\vec{F}_{cinta\to trigo}$ y planteando la segunda ley de Newton:

$$M_{total}\,\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{roz.} + \vec{F}_{trigo\to cinta} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{roz.} = \left(\dfrac{dm}{dt}\right)V_{cinta} \\ N = M_{total}\,g + \left(\dfrac{dm}{dt}\right)\sqrt{2gh} = 1495 \text{ N} \end{cases}$$



Como el rozamiento es estático:

$$F_{roz.} \le \mu N \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dm}{dt}\right)V_{cinta} \le \mu N \quad \Rightarrow \quad \mu \ge \left(\frac{dm}{dt}\right)\frac{V_{cinta}}{N} = \boxed{1.07\cdot 10^{-3}}$$

En realidad si consideramos el inicio del proceso el rozamiento debería ser algo mayor ya que inicialmente cuando caen los primeros granos no hay trigo en la cinta:

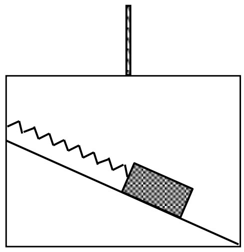
$$m_{trigo} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{total} = m_{cinta} = 100 \text{ kg} \quad \Rightarrow \quad N = 1005 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad \mu \ge \boxed{1.59\cdot 10^{-3}}$$

El marco de una puerta desliza hacia abajo sin rozamiento por un plano inclinado un ángulo θ colocándose una plomada suspendida del techo. ¿En qué dirección se inclina la plomada? Obtener el valor del ángulo φ que se desvía respecto de la vertical.

Solución: **I.T.I. 96**

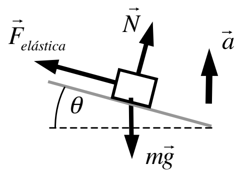
Texto solución

Sobre un plano inclinado un ángulo φ se tiene un muelle sujeto por un extremo al plano y que soporta en el otro extremo un cuerpo de masa m. La longitud natural del muelle es l_0 y su constante recuperadora k. Si todo el sistema se introduce en un ascensor, calcular la longitud que tiene el muelle si el ascensor: a) Sube con velocidad constante. b) Sube con aceleración a. c) Baja con aceleración a.



Solución: **I.T.I. 94, 98, 99, 02, 05, I.T.T. 95, 97, 99, 02, 05, I.I. 94**

Dibujando el diagrama de las fuerzas que actúan sobre el bloque y aplicando la segunda ley de Newton:



$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{elástica} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N\,\text{sen}\theta - k\Delta l\cos\theta = 0 \\ N\cos\theta + k\Delta l\,\text{sen}\theta - mg = ma_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta l = \frac{m\left(g + a_y\right)\text{sen}\theta}{k}$$

En las ecuaciones hemos escrito expresamente a_y en vez de a ya que vamos a analizar diferentes casos con aceleraciones ascendentes y descendentes. Si llamamos l_0 a la longitud natural del muelle:

a) $a_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{l = l_0 + \dfrac{mg\,\text{sen}\theta}{k}}$

b) $a_y = a \quad \Rightarrow \quad \boxed{l = l_0 + \dfrac{m(g+a)\text{sen}\,\theta}{k}}$

c) $a_y = -a \quad \Rightarrow \quad \boxed{l = l_0 + \dfrac{m(g-a)\text{sen}\theta}{k}}$

Los tres casos pueden resumirse en una sola fórmula: $l = l_0 + \dfrac{m\,g_{efectiva}\,\text{sen}\theta}{k}$.

Por lo tanto, para un observador en el interior del ascensor, todo ocurre como si la aceleración efectiva de la gravedad tomase diferentes valores dependiendo de la aceleración de éste: $\vec{g}_{efectiva} = \vec{g} - \vec{a}$. Cuando el ascensor sube con velocidad constante la gravedad efectiva es la aceleración de la gravedad usual (la persona en el interior del ascensor se siente igual de pesada que de costumbre). Cuando el ascensor se mueve con una aceleración hacia arriba la gravedad efectiva es mayor (la persona en el interior del ascensor se siente más pesada). Finalmente si el ascensor se mueve aceleradamente hacia abajo la gravedad efectiva es menor (la persona en el interior del ascensor se siente menos pesada).

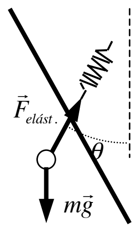
Enganchamos una partícula de masa m = 1 kg a un resorte espiral de masa despreciable cuya longitud es l_0 = 48 cm y de constante recuperadora k = 100 N/m. Lo hacemos girar como un péndulo cónico con una velocidad angular constante de 60 r.p.m. Calcular: a) el alargamiento del resorte, b) el ángulo que forma la altura del cono con su generatriz.

Solución: I.T.I. 94, 04, I.T.T. 95, I.I. 94

Dibujando el diagrama de fuerzas y planteando la segunda ley de Newton teniendo en cuenta que el movimiento es circular uniforme y la aceleración de la partícula es normal:

$$\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}_N \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} F\,\text{sen}\,\theta = m\omega^2 R \quad \Rightarrow \quad k\Delta l\,\text{sen}\,\theta = m\omega^2 (l_0 + \Delta l)\text{sen}\,\theta \\ \quad \Rightarrow \quad \Delta l = l_0\left(\dfrac{m\omega^2}{k - m\omega^2}\right) = \quad 0.31 \text{ m} \\ F\cos\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos\left(\dfrac{mg}{k\Delta l}\right) = \quad 72° \end{cases}$$



Jose Javier Sandonís R..., 12/11/04 12:26
Eliminado:

Una partícula P es atraída constantemente por el origen de coordenadas con una fuerza $F = k\,r$ siendo $r = OP$. Su posición inicial es A $(0, b)$ y su velocidad inicial v_0 es paralela al eje X. Calcular: trayectoria de la partícula. ¿Cuál debería ser el valor de v_0 para que la trayectoria fuese una circunferencia? Velocidad y aceleración del movimiento en ese caso.

Solución: I.T.I. 97, 02, 03, 05

Expresada vectorialmente tenemos para la fuerza y las componentes:

$$\vec{F} = -k\,\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k\,x \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -k\,y \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) & v_x(t) = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) \\ y(t) = B\cos(\omega t + \theta) & v_y(t) = -B\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta) \end{array} \right.$$

Cada componente varía de acuerdo a la ecuación de un Movimiento Armónico Simple de frecuencia angular $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Para conocer las constantes A, B, φ y θ que aparecen en las ecuaciones anteriores aplicamos las condiciones iniciales del movimiento:

$$\left\{ \begin{array}{lll} x(0) = 0 & \Rightarrow & A\cos\varphi = 0 \\ v_x(0) = v_0 & \Rightarrow & -A\omega\,\mathrm{sen}\varphi = v_0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad , \quad A = \frac{v_0}{\omega} = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} y(0) = b & \Rightarrow & B\cos\theta = b \\ v_y(0) = 0 & \Rightarrow & -B\omega\,\mathrm{sen}\theta = 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \theta = 0 \quad , \quad B = b$$

Sustituyendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \dfrac{v_0}{\omega}\mathrm{sen}(\omega t) \\ y(t) = b\cos(\omega t) \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{x^2}{\left(\dfrac{v_0}{\omega}\right)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{ELIPSE}}$$

Para que sea una circunferencia de radio R: $\dfrac{v_0}{\omega} = b = R \quad \Rightarrow \quad v_0 = b\omega = \boxed{b\sqrt{\dfrac{k}{m}}}$

En este caso la velocidad será constante en módulo:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left[v_0\cos(\omega t)\right]^2 + \left[-b\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)\right]^2} = v_0$$

Y al ser un movimiento circular uniforme la aceleración será normal y valdrá:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{b^2\left(\dfrac{k}{m}\right)}{b} = \boxed{\frac{b\,k}{m}}$$

Un cajón de masa m_0 se desplaza horizontalmente en un día de lluvia. Su superficie superior, de valor A, está abierta a la lluvia, por lo que poco a poco se va llenando de agua. Sabiendo que la lluvia cae a un ritmo R (medido en kg m^{-2} s^{-1}), que cuando estaba vacío la velocidad del carretón era v_0, y que el coeficiente de rozamiento entre el cajón y el suelo es μ, calcular como varía la velocidad del carretón con el tiempo.

Solución: I.T.T. 00, 03

La masa del vagón junto con la del agua que hay en su interior será en función del tiempo (ponemos a cero el cronómetro cuando el cajón estaba vacío y empezó a llenarse):

$$m(t) = m_0 + RAt$$

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento horizontal del vagón tenemos:

$$\vec{F}_{roz.} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Rightarrow \quad -\mu N = \frac{dp}{dt} \quad \Rightarrow \quad -\mu\left(m_0 + RAt\right)g = \frac{dp}{dt}$$

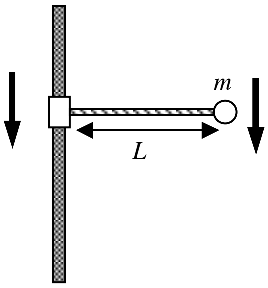
Separando variables e integrando imponiendo las condiciones iniciales del movimiento:

$$\int_{p_0}^{p} dp = -\int_0^t \mu g\left(m_0 + RAt\right)dt \quad \Rightarrow \quad p - p_0 = -\mu g\left(m_0 t + \frac{1}{2}RAt^2\right)$$

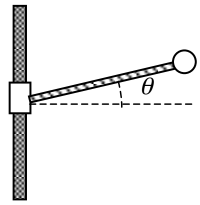
$$\Rightarrow \quad \left(m_0 + RAt\right)v - m_0 v_0 = -\mu g\left(m_0 t + \frac{1}{2}RAt^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v(t) = \frac{m_0 v_0 - \mu g\left(m_0 t + \frac{1}{2}RAt^2\right)}{\left(m_0 + RAt\right)}}$$

A un collarín que puede deslizarse libremente (es decir sin rozamiento) por un mástil vertical se une una pequeña esfera de masa m por medio de una cuerda de longitud L. Suponemos despreciables los rozamientos con el aire y consideramos que la velocidad de caída de la esfera es mucho mayor que otras componentes de velocidad que pueda tener. El experimento se realiza en un punto del hemisferio norte de latitud λ.



a) Hacia qué punto geográfico hay que orientar la cuerda para que en el movimiento de caída la esfera acabe impactando contra el mástil? ¿Cuánto tiempo tardará en impactar?
b) Hacia qué punto geográfico hay que orientar la cuerda para que no cambie su orientación y aparezca una tensión en ella? ¿Cuánto valdrá dicha tensión?
c) Si la cuerda en el caso del apartado b) no se hubiese dispuesto exactamente horizontal, sino formando un pequeño ángulo θ con la horizontal (ver 2ª figura) ¿qué tipo de movimiento realizaría la esfera vista desde el collarín?



Solución: **I.T.T. 00, 04**

a) ¿Qué fuerza horizontal puede hacer que la esfera impacte contra el mástil? La única fuerza de ese tipo es la fuerza de Coriolis, que desvía a los cuerpos en caida libre hacia el Este, y para ello habrá que orientar la cuerda hacia el Oeste. Si orientamos el eje X hacia el Este, el eje Y hacia el Norte y el eje Z perpendicular a la superficie terrestre y tenemos en cuenta que la velocidad de la esfera es prácticamente su velocidad en caida libre:

$$\vec{F}_{Coriolis} = m\vec{a}_{Coriolis} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v} \simeq -2m\vec{\omega} \times \left(\vec{g}t\right) = 2m\omega g \cos\lambda \, t \, \hat{i}$$

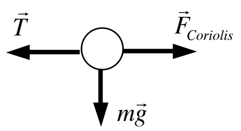
La aceleración horizontal de la esfera será la aceleración de Coriolis, y la distancia horizontal que se desplaza en función del tiempo será (integrando sucesivamente y teniendo en cuenta que $v_{0,x} = 0$, $x_0 = 0$):

$$x(t) = \frac{1}{3}\omega g \cos\lambda \, t^3$$

El tiempo que tardará en recorrer la distancia L e impactar contra el mástil será:

$$\boxed{t_{impacto} = \left(\frac{3L}{\omega g \cos\lambda}\right)^{1/3}}$$

b) Si orientamos la cuerda hacia el Este aparece una tensión en la cuerda que anula a la fuerza de Coriolis obligando a la esfera a descender verticalmente en línea recta:

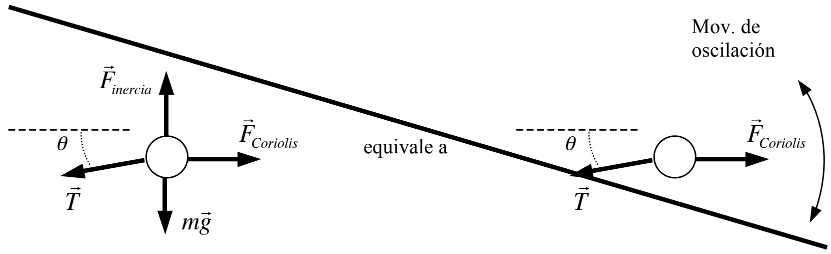


$$\boxed{2m\omega g \cos\lambda \, t}$$

$$T = F_{Coriolis} =$$

c) Si nos montamos encima del collarín y analizamos las cosas desde dicho punto de vista tenemos que añadir una fuerza de inercia relacionada con la aceleración del collarín respecto al suelo. Dicha fuerza de inercia anula al peso con lo cual el movimiento de la esfera será equivalente al movimiento de oscilación de un péndulo que oscila alrededor de la horizontal en vez de alrededor de la vertical y donde el papel del peso es sustituido por la fuerza de Coriolis:

$$\vec{F}_{inercia} = -m\vec{a}_{collarín} = -m\vec{g}$$



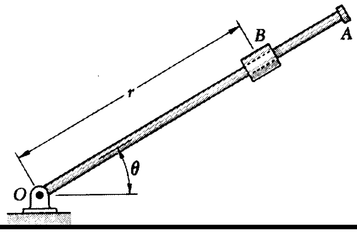
Teniendo en cuenta que el periodo de un péndulo vertical viene dado por: $P = 2\pi\sqrt{L/g}$, para la esfera podríamos escribir:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{L}{a_{Coriolis}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2\omega g \cos\lambda\, t}}$$

El periodo como se ve disminuiría con el tiempo con lo que movimiento oscilatorio se realizaría con frecuencia creciente (cada vez más rápido).

Jose Javier Sandonís R..., 15/11/04 21:09
Eliminado:

El movimiento de un bloque B de 2 kg en un plano horizontal se define por las relaciones $r(t) = 3t^2 - t^3$ y $\theta(t) = 2t^2$ donde r se expresa en m y θ en radianes. Determinar las componentes radial y transversal de la fuerza ejercida sobre el bloque para $t = 0$ y $t = 1$ s.



Solución: **I.T.I. 00, 03**

Las componentes radial y transversal de la aceleración son:

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad , \quad a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Sustituyendo en dichas expresiones las funciones $r(t)$ y $\theta(t)$ del enunciado tenemos que:

$$a_r(t) = 16t^5 - 48t^4 - 6t + 6 \quad , \quad a_\theta(t) = 60t^2 - 28t^3$$

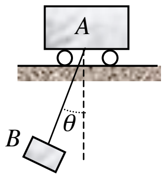
Con lo que las componentes radial y transversal de la fuerza ejercida sobre B serán:

$$F_r(t) = m_B\left(16t^5 - 48t^4 - 6t + 6\right) \quad , \quad F_\theta(t) = m_B\left(60t^2 - 28t^3\right)$$

Para los instantes que nos indican:

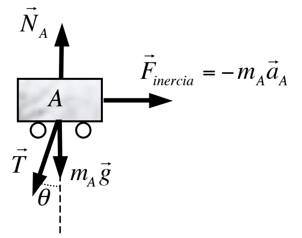
$F_r(0) = 12$ N	$F_\theta(0) = 0$ N
$F_r(1) = -64$ N	$F_\theta(1) = 64$ N

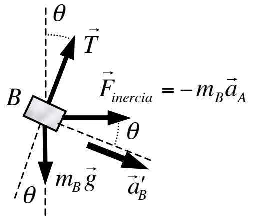
Un bloque B de 15 Kg está suspendido por una cuerda de 2.5 m sujeta a una carretilla A de 20 Kg. Despreciando el rozamiento determinar la aceleración inicial de la carretilla, la del bloque respecto de la carretilla y la tensión de la cuerda después de que el sistema se suelta desde el reposo en la posición indicada, $\theta = 25°$.



Solución: **I.T.I. 03, I.T.T. 03**

Visto por un observador inercial O la carretilla presenta una aceleración $\vec{a}_A$ hacia la izquierda (la única fuerza que actúa sobre ella y que tiene componente horizontal es la tensión de la cuerda, que tira hacia la izquierda). Como en el enunciado nos piden calcular también la aceleración relativa de B respecto de A nos vamos a colocar en la situación de un observador no inercial O' fijo en A. Para este observador, B va a seguir una trayectoria circular, y la aceleración inicial que ve para el bloque es una aceleración tangencial (B está inicialmente en reposo y por lo tanto no existirá en dicho momento aceleración normal). El diagrama de fuerzas para cada cuerpo y las ecuaciones que plantearía el observador O' serán:





$$\vec{N}_A + \vec{T} + m_A\vec{g} + \left(-m_A\vec{a}_A\right) = 0 \qquad \vec{T} + m_B\vec{g} + \left(-m_B\vec{a}_A\right) = m_B\vec{a}'_B$$

Descomponiendo en componentes horizontales y perpendiculares para A y en componentes tangenciales y normales para B:

$$N_A - m_A g - T\cos\theta = 0 \qquad T + m_B a_A \operatorname{sen}\theta - m_B g\cos\theta = 0$$

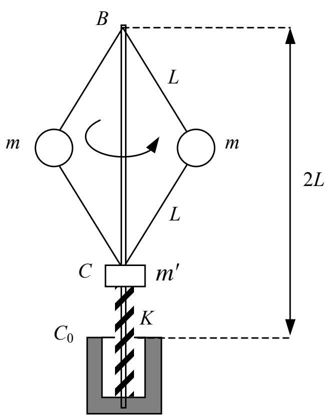
$$m_A a_A - T\operatorname{sen}\theta = 0 \qquad m_B a_A\cos\theta + m_B g\operatorname{sen}\theta = m_B a'_B$$

Sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas cuya solución es:

$$N_A = \left(\frac{m_A + m_B}{m_A + m_B\operatorname{sen}^2\theta}\right) m_A g \qquad T = \boxed{\left(\frac{m_A m_B\cos\theta}{m_A + m_B\operatorname{sen}^2\theta}\right) g}$$

$$a_A = \boxed{\left(\frac{m_B\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{m_A + m_B\operatorname{sen}^2\theta}\right) g} \qquad a'_B = \boxed{\left(\frac{m_A + m_B}{m_A + m_B\operatorname{sen}^2\theta}\right) g\operatorname{sen}\theta}$$

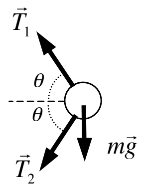
El regulador centrífugo de la figura está constituido por cuatro cables de la misma longitud L que giran alrededor de un eje vertical siendo el punto B fijo y teniendo que $\overline{BC_0} = 2L$. La masa m' resbala sin rozamiento a lo largo del eje y está sujeta por un muelle de constante K. Las bolas son iguales y de masa m. Cuando el sistema está en reposo C coincide con C_0 y el muelle tiene su longitud natural. a) Cuando el sistema gira con velocidad angular ω determinar la deformación x del muelle en función de m, m', K, L y ω. b) Determinar las tensiones en los cables en función de m, m', K, L y x.



Solución: I.T.I. 05

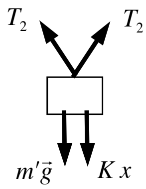
a) Dibujando el diagrama de fuerzas para las masas m y m' y aplicando la segunda ley de Newton:

Jose Javier Sandonís R…, 14/11/05 12:40
Con formato: Numeración y viñetas



$$\left.\begin{array}{r}(T_1+T_2)\cos\theta = m\omega^2 L\cos\theta \\ (T_1-T_2)\operatorname{sen}\theta - mg = 0\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} T_1 = \dfrac{1}{2}m\left(\omega^2 L + \dfrac{g}{\operatorname{sen}\theta}\right) = \dfrac{1}{2}m\left(\omega^2 L + \dfrac{gL}{L-x/2}\right) \\ T_2 = \dfrac{1}{2}m\left(\omega^2 L - \dfrac{g}{\operatorname{sen}\theta}\right) = \dfrac{1}{2}m\left(\omega^2 L - \dfrac{gL}{L-x/2}\right)\end{array}\right.$$



$$2T_2\operatorname{sen}\theta - Kx - m'g = 0$$

$$\Rightarrow \quad m\left(\omega^2 L - \frac{gL}{L-x/2}\right)\left(\frac{L-x/2}{L}\right) - Kx - m'g = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ldots \quad \boxed{x = \frac{m(\omega^2 L - g) - m'g}{K + \frac{1}{2}m\omega^2}}$$

b) Despejando en este resultado ω^2 en función de lo demás y sustituyendo en las expresiones de las dos tensiones:

Jose Javier Sandonís R…, 14/11/05 12:40
Con formato: Numeración y viñetas

$$\omega^2 = \frac{(m+m')g + Kx}{m(L-x/2)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} T_1 = \dfrac{Kx + (2m+m')g}{2 - x/L} \\ T_2 = \dfrac{Kx + m'g}{2 - x/L}\end{array}}$$