CINEMÁTICA:
MOVIMIENTO CIRCULAR,
DATOS EN FUNCIÓN DEL TIEMPO.

Las coordenadas de un cuerpo con movimiento en el plano XY son: $x = 2\,\text{sen}(\omega\, t)$, $y = 2\cos(\omega\, t)$, siendo ω constante. a) Encontrar la ecuación de la trayectoria. b) Calcular el vector velocidad en cualquier instante. c) Calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración en cualquier instante. d) Identificar el movimiento descrito por las ecuaciones expuestas.

Solución: I.T.I. 93, 00, 01, 04, I.T.T. 01, 04

a) Para calcular la trayectoria (ecuación que relaciona x con y) hay que eliminar el parámetro t en las expresiones que nos dan:

$$\text{sen}(\omega\, t) = \frac{x}{2} \qquad \cos(\omega\, t) = \frac{y}{2}$$

Teniendo en cuenta que $\cos^2(\omega\, t) + \text{sen}^2(\omega\, t) = 1$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^2 + y^2 = 2^2}$$

Se trata de una trayectoria circular centrada en el origen y de radio $R = 2$.

b) Derivando la posición:

$$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt} = 2\omega\cos(\omega t)} \qquad \boxed{v_y = \frac{dy}{dt} = -2\omega\,\text{sen}(\omega\, t)}$$

El módulo de la velocidad es constante: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2\omega$

c) Para calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración, si llamamos ρ al radio de curvatura (que en este caso es constante y vale 2):

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt} = 0} \qquad \boxed{a_n = \frac{v^2}{\rho} = 2\,\omega^2}$$

d) Se trata de un movimiento circular uniforme, donde la velocidad es $v = 2\,\omega$, y el radio de la trayectoria es $R = 2$.

(Las unidades utilizadas en el problema son las del S.I.)

Un cuerpo inicialmente en reposo (θ_0 = 0, ω_0 = 0 en t_0 = 0), es acelerado en una trayectoria circular de radio 1.3 m de acuerdo con la ecuación $\alpha = 120t^2 - 48t + 16$ (todo en unidades del S.I.). Halle: a) la velocidad angular como función del tiempo, b) la posición angular como función del tiempo, c) las componentes tangencial y normal de la aceleración.

Solución: I.T.I. 95, 96, 98, 00, 01, 03, 04, I.T.T. 01

a) Integrando la aceleración angular teniendo en cuenta las condiciones iniciales:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\omega = \alpha\, dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^\omega d\omega = \int_0^t \alpha\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \int_0^t \left(120t^2 - 48t + 16\right) dt = \boxed{40t^3 - 24t^2 + 16t}$$

b) Integrando ahora la velocidad angular:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\theta = \omega\, dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^\theta d\theta = \int_0^t \omega\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \int_0^t \left(40t^3 - 24t^2 + 16t\right) dt = \boxed{10t^4 - 8t^3 + 8t^2}$$

c) Las componentes intrínsecas de la aceleración vendrán dadas por:

$$a_t = \alpha R = \boxed{1.3\left(120t^2 - 48t + 16\right)}$$

$$a_n = \omega^2 R = \boxed{1.3\left(40t^3 - 24t^2 + 16t\right)^2}$$

(Como se indica en el enunciado las unidades utilizadas en el problema son las del S.I.)

Un punto se mueve en un círculo de acuerdo a la ley $s = t^3 + 2t^2$, donde s se mide en metros a lo largo del círculo y t en segundos. Si la aceleración total del punto es $16\sqrt{2}$ m/s^2 cuando t = 2 s, calcular el radio del círculo.

Solución: I.T.I. 93, 97, 99, 02, 05, I.T.T. 99, 02, 05

El módulo de la velocidad es igual al ritmo al cual se recorren distancias sobre la trayectoria luego:

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 4t$$

Las aceleraciones tangencial y normal serán:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 6t + 4 \quad , \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(3t^2 + 4t\right)^2}{R}$$

Teniendo en cuenta que $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$, y que para un tiempo concreto (t_0 = 2 s) nos dan el valor de a tenemos que:

$$a_n^2 = a^2 - a_t^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\left(3t_0^2 + 4t_0\right)^4}{R^2} = a(t_0)^2 - \left(6t_0 + 4\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{\left(3t_0^2 + 4t_0\right)^2}{\sqrt{a(t_0)^2 - \left(6t_0 + 4\right)^2}} = \boxed{25 \text{ m}}$$

Un punto se mueve sobre una circunferencia según la ley $\omega = t^2 + 4t + 2$, siendo ω la velocidad angular en rad/s respecto al centro de la circunferencia y t el tiempo en segundos. Si el ángulo descrito es 10 rad, cuando t = 2 s. ¿cuánto valdrá para t = 3s?

Solución: I.T.I. 99, 02, 05, I.T.T. 99, 02, 05

Nuestras condiciones iniciales de movimiento son: $t_0 = 2 \quad , \quad \theta_0 = 10 \text{ rad}$. La ecuación del ángulo en función del tiempo será:

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)\,dt = 10 + \left[\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 2t\right]_2^t = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 2t - \frac{14}{3}$$

Para un tiempo t_1 = 3 s tendremos que:

$$\theta(t_1) = \frac{1}{3}t_1^3 + 2t_1^2 + 2t_1 - \frac{14}{3} = \boxed{\frac{85}{3} \text{ rad} = 1623.38^\circ}$$