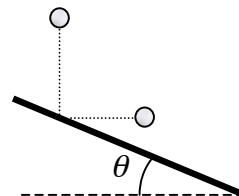


TRABAJO Y ENERGÍA: CHOQUES

Una bola de acero que cae verticalmente rebota en una placa rígida que forma un ángulo θ con la horizontal. Calcular θ para que la bola salga con una velocidad horizontal después del choque. Calcular la velocidad después del choque.



Solución: I.T.I. 93

Texto solución

Una pelota de masa M que se mueve con una velocidad v choca de frente con una segunda bola de masa m que se encuentra en reposo. Sea e el coeficiente de restitución entre las dos pelotas. Determinar el porcentaje de energía que se pierde en el choque.

Solución: I.T.I. 94

Texto solución

¿Qué fracción de energía se pierde en un choque central directo parcialmente elástico?

Solución: I.T.I. 01, I.T.T. 01, 04

Teniendo en cuenta la conservación del momento lineal (las velocidades son componentes a lo largo de la dirección de choque, y no módulos) y la definición del coeficiente de restitución e :

$$\left. \begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ e &= -\frac{v'_2 - v'_1}{v_2 - v_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} v'_1 &= \frac{v_1(m_1 - m_2 e) + v_2 m_2 (1 + e)}{m_1 + m_2} \\ v'_2 &= \frac{v_2(m_2 - m_1 e) + v_1 m_1 (1 + e)}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right.$$

Una vez calculadas las velocidades de las dos partículas después del choque podemos calcular la energía cinética final y compararla con la que tenían inicialmente.

El cambio en la energía cinética del conjunto de las dos partículas se suele representar por la letra Q , que con los valores obtenidos anteriormente vale:

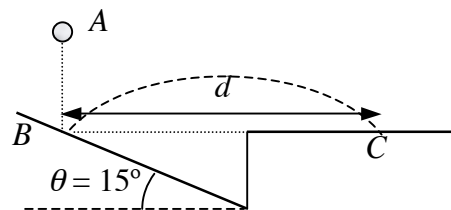
$$Q = \Delta E_c = \left(\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) = \dots = -\frac{1}{2} (1 - e^2) \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) (v_1 - v_2)^2$$

Si Q es cero el coeficiente de restitución e es igual a la unidad (el caso particular en que $v_1 = v_2$ no constituye un choque entre las partículas). En general Q será una cantidad negativa, lo que implica que se pierde energía en el choque. La fracción f de energía perdida sería:

$$f = \frac{Q}{E_{c, inicial}} = -\frac{1}{2} (1 - e^2) \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) (v_1 - v_2)^2 \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right)^{-1}$$

Tomemos un caso concreto: dos partículas idénticas ($m_1 = m_2$) chocan con velocidades iguales y de sentido contrario ($v_1 = -v_2$) y el coeficiente de restitución es $e = 0.5$. Según la expresión anterior $f = -0.75$, lo que indica que el 75% de la energía cinética de las partículas se pierde en el choque.

Una bola de acero A cae desde una altura $h = 1.2\text{m}$ para chocar con una placa B también de acero y rebotar al punto C . Sabiendo que el coeficiente de restitución es $e = 0.8$, calcular la distancia d .



Solución: I.T.I. 01, 02, 04, 05, I.T.T. 01, 04

Primeramente aplicaremos el principio de conservación de la energía para calcular el módulo de la velocidad con la que la bola impacta con la placa B (tomamos el nivel nulo de energía potencial gravitatoria a la altura del impacto):

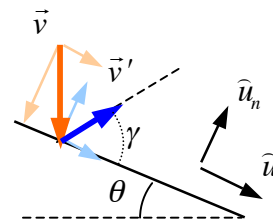
$$\left. \begin{array}{l} E_{\text{inicial}} = mgh \\ E_{\text{final}} = \frac{1}{2}mv^2 \end{array} \right\} \quad E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}$$

En el choque la componente tangencial de la velocidad permanece constante:

$$v'_t = v_t = \sqrt{2gh} \sin \theta$$

Para la componente normal utilizamos la expresión del coeficiente de restitución:

$$e = -\frac{v'_n}{v_n} \quad \Rightarrow \quad v'_n = -e v_n = e \sqrt{2gh} \cos \theta$$



El módulo de la velocidad a la salida del choque será:

$$v' = \sqrt{v'^2_t + v'^2_n} = \sqrt{2gh} \sqrt{\sin^2 \theta + e^2 \cos^2 \theta} = 3.95 \text{ m/s}$$

El ángulo γ que forma dicha velocidad con el plano inclinado será:

$$\text{tg} \gamma = \frac{v'_n}{v'_t} = e \text{ctg} \theta \quad \Rightarrow \quad \gamma = 71.48^\circ$$

El ángulo β que formará dicha velocidad con la horizontal será: $\beta = \gamma - \theta = 56.48^\circ$

Después del choque la bola realizará un movimiento parabólico con velocidad inicial v' formando un ángulo β con la horizontal. Si tomamos el origen de coordenadas en el punto de impacto, ponemos a cero el cronómetro en el instante del choque, y orientamos los ejes X e Y horizontal y verticalmente, las ecuaciones del movimiento serán:

$$x(t) = v' \cos \beta t \quad y(t) = v' \sin \beta t - \frac{1}{2}gt^2$$

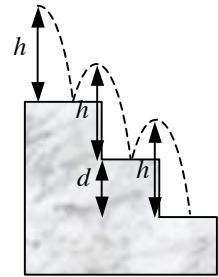
Si la bola golpea en el punto C en el instante $t = t_c$:

$$y(t_c) = 0 \Rightarrow v' \sin \beta t_c - \frac{1}{2} g t_c^2 = 0 \Rightarrow t_c = \frac{2v' \sin \beta}{g}$$

La distancia d que nos piden será la coordenada x de la bola en ese instante:

$$d = x(t_c) = v' \cos \beta t_c = \frac{2v'^2 \cos \beta \sin \beta}{g} = \frac{v'^2 \sin(2\beta)}{g} = \boxed{1.47 \text{ m}}$$

Una bola se deja caer desde una altura h sobre el rellano de una escalera y desciende rebotando como se muestra en la figura. ¿cuál será el valor del coeficiente de restitución e para el cual la pelota rebotará a la misma altura sobre cada escalón?



Solución: I.T.I. 01, I.T.T. 01

Primeramente aplicaremos el principio de conservación de la energía para calcular la velocidad con la que la bola impacta con el escalón superior. Tomando el nivel nulo de energía potencial gravitatoria a la altura del impacto, los ejes X e Y horizontal y vertical respectivamente, y teniendo en cuenta que la componente x de la velocidad no cambia en el movimiento parabólico de la bola:

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{inicial}} &= mgh + \frac{1}{2} m v_x^2 \\ E_{\text{final}} &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) \end{aligned} \right\} E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}} \Rightarrow v_y = -\sqrt{2gh}$$

La componente x de la velocidad no cambia en el choque. Para hallar la componente y aplicamos la ecuación del coeficiente de restitución:

$$e = -\frac{v'_y}{v_y} \Rightarrow v'_y = -e v_y = e \sqrt{2gh}$$

Aplicando de nuevo el principio de la energía para calcular la altura h' hasta la que rebota:

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{inicial}} &= \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y'^2) \\ E_{\text{final}} &= mgh' + \frac{1}{2}mv_x^2 \end{aligned} \right\} \quad E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}} \Rightarrow h' = \frac{v_y'^2}{2g} = e^2 h$$

Si queremos que la altura sobre el siguiente escalón sea igual a la altura inicial:

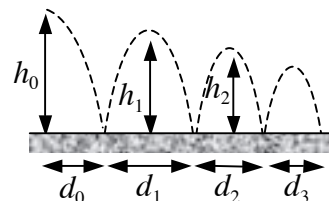
$$h = h' + d = e^2 h + d \Rightarrow e = \sqrt{1 - \frac{d}{h}}$$

Desde la azotea de un edificio de altura h se deja caer una bola cuyo coeficiente de restitución con el suelo es e . Calcular la altura a la que asciende la pelota después del n -ésimo rebote.

Solución: I.T.I. 00

Texto solución

Una bola cae sobre un suelo liso y rebota varias veces como se indica en la figura obtener una expresión de las alturas y distancia recorridas en el bote n -ésimo.



Solución: I.T.I. 02, I.T.T. 02, 05

En cada uno de los botes que realiza la bola la componente x de la velocidad no cambia (la dirección del eje X es tangente a la superficie de contacto en el choque oblicuo entre la bola y el suelo).

Si un objeto cae desde una altura h se puede demostrar, utilizando lo aprendido en cinemática, que el tiempo que tarda en caer es: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, y que la componente y de la velocidad al llegar al suelo es: $v_y^2 = 2gh$ (esto último se puede demostrar también fácilmente aplicando la conservación de la energía entre su posición inicial a altura h y su posición a ras del suelo). Dada la simetría del movimiento parabólico, las mismas fórmulas pueden aplicarse para el movimiento de subida desde el suelo hasta una altura h .

Si llamamos $v_{y,i}$ a la componente vertical de la bola después de caer de la altura h_i justo antes del bote $i+1$, y $v'_{y,i+1}$ a la velocidad de la bola justo después del bote $i+1$, iniciando el movimiento de subida hasta la altura h_{i+1} , tenemos que, puesto que el suelo está

quieto, en ese bote se verifica lo siguiente (¡cuidado con los signos de las componentes y de la velocidad!):

$$e = \frac{v'_{y,i+1} - 0}{0 - v_{y,i}} = -\left(\frac{v'_{y,i+1}}{v_{y,i}}\right) = -\left(\frac{\sqrt{2gh_{i+1}}}{-\sqrt{2gh_i}}\right) = \sqrt{\frac{h_{i+1}}{h_i}} \Rightarrow h_{i+1} = e^2 h_i \Rightarrow \boxed{h_i = e^{2i} h_0}$$

En cada bote la altura es un factor e^2 menor que la altura del bote anterior.

Si llamamos ahora t_i al tiempo de caída desde la altura h_i entre el bote i y el $i+1$:

$$\frac{t_{i+1}}{t_i} = \sqrt{\frac{h_{i+1}}{h_i}} = e \Rightarrow t_{i+1} = e t_i \Rightarrow t_i = e^i t_0$$

En cada bote el tiempo de caída (o de subida) del movimiento parabólico es un factor e menor que el del bote precedente.

Para las distancias recorridas tendríamos que:

$$\left. \begin{aligned} d_i &= 2v_x t_i \Rightarrow \frac{d_{i+1}}{d_i} = \frac{t_{i+1}}{t_i} = e \\ d_0 &= v_x t_0 = v_x \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} d_{i+1} &= e d_i \quad i = 1, 2, 3, \dots \\ d_1 &= 2e d_0 \end{aligned}}$$

En cada bote la distancia recorrida horizontalmente es un factor e menor que la recorrida en el bote anterior.

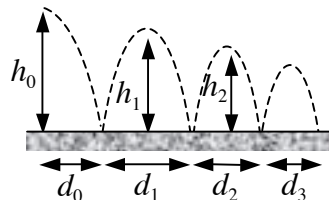
Podemos incluso calcular la distancia horizontal total recorrida por la bola hasta que deja de botar:

$$\begin{aligned} d &= d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + \dots = d_0 + 2ed_0 + 2e^2 d_0 + 2e^3 d_0 + \dots = \\ &= 2d_0 \left(\frac{1}{2} + e + e^2 + e^3 + \dots \right) = 2d_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{e}{1-e} \right) \end{aligned}$$

Una bola abandona el borde de una mesa horizontal con una velocidad de 3 m/seg. La altura de la mesa es de 1 m y el coeficiente de restitución entre el suelo y la bola es de 0.6. Determinar: a) la relación entre la altura de un bote y el siguiente, b) la relación entre el avance horizontal de un bote y el siguiente, c) la distancia horizontal entre el pie de la mesa y el último bote de la bola.

Solución: I.T.I. 92, 03, I.T.T. 00, 03

- a) En cada uno de los botes que realiza la bola la componente x de la velocidad no cambia (la dirección del eje X es tangente a la superficie de contacto en el choque oblicuo entre la bola y el suelo).



Si un objeto cae desde una altura h se puede demostrar, utilizando lo aprendido en cinemática, que el tiempo que tarda en caer es: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, y que la componente y de

la velocidad al llegar al suelo es: $v_y^2 = 2gh$ (esto último se puede demostrar también fácilmente aplicando la conservación de la energía entre su posición inicial a altura h y su posición a ras del suelo). Dada la simetría del movimiento parabólico, las mismas fórmulas pueden aplicarse para el movimiento de subida desde el suelo hasta una altura h .

Si llamamos $v_{y,i}$ a la componente vertical de la bola después de caer de la altura h_i justo antes del bote $i+1$, y $v'_{y,i+1}$ a la velocidad de la bola justo después del bote $i+1$, iniciando el movimiento de subida hasta la altura h_{i+1} , tenemos que, puesto que el suelo está quieto, en ese bote se verifica lo siguiente (¡cuidado con los signos de las componentes y de la velocidad!):

$$e = \frac{v'_{y,i+1} - 0}{0 - v_{y,i}} = -\left(\frac{v'_{y,i+1}}{v_{y,i}}\right) = -\left(\frac{\sqrt{2gh_{i+1}}}{-\sqrt{2gh_i}}\right) = \sqrt{\frac{h_{i+1}}{h_i}} \Rightarrow \boxed{h_{i+1} = e^2 h_i \Rightarrow h_i = e^{2i} h_0}$$

En cada bote la altura es un factor $e^2 = 0.36$ veces la altura del bote anterior.

Si llamamos ahora t_i al tiempo de caída desde la altura h_i entre el bote i y el $i+1$:

$$\frac{t_{i+1}}{t_i} = \sqrt{\frac{h_{i+1}}{h_i}} = e \Rightarrow t_{i+1} = e t_i \Rightarrow t_i = e^i t_0$$

En cada bote el tiempo de caída (o de subida) del movimiento parabólico es un factor $e = 0.6$ veces el del bote precedente.

- b) Para las distancias recorridas tendríamos que (si llamamos v_x a la velocidad con que la bola abandonó la mesa):

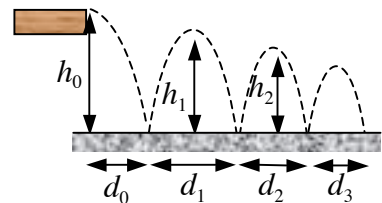
$$\left. \begin{aligned} d_i = 2v_x t_i &\Rightarrow \frac{d_{i+1}}{d_i} = \frac{t_{i+1}}{t_i} = e \\ d_0 = v_x t_0 = v_x \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} d_{i+1} = e d_i & i = 1, 2, 3, \dots \\ d_1 = 2e d_0 \end{cases}$$

En cada bote la distancia recorrida horizontalmente es un factor $e = 0.6$ veces la recorrida en el bote anterior.

c) La distancia horizontal total recorrida por la bola hasta que deja de botar:

$$\begin{aligned} d &= d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + \dots = d_0 + 2ed_0 + 2e^2d_0 + 2e^3d_0 + \dots = \\ &= 2d_0 \left(\frac{1}{2} + e + e^2 + e^3 + \dots \right) = 2v_x \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \left(\frac{1}{2} + \frac{e}{1-e} \right) = 6.78 \text{ m} \end{aligned}$$

Una pelota se mueve con velocidad constante y cae desde el borde de una mesa que se encuentra a una altura de 75 cm sobre el suelo. Sabiendo que la pelota choca contra el suelo a una distancia de 50 cm del pie de la mesa y que el coeficiente de restitución en el choque es de 0.85 determinar la altura y la distancia que avanza la pelota en cada uno de los dos primeros rebotes. Calcular el espacio horizontal recorrido por la pelota entre el primer y el último rebote.



Solución: I.T.I. 94

Texto solución

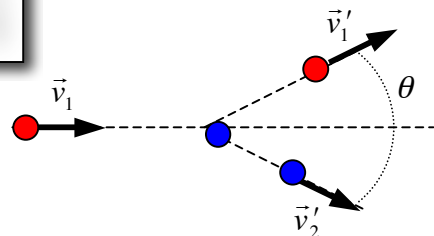
Entre una partícula 1 y otra que permanecía en reposo 2 tuvo lugar una colisión perfectamente elástica. Determinar la relación entre sus masas si: a) la colisión es frontal y las partículas se separan en sentidos contrarios y a velocidades iguales, b) las partículas se separan simétricamente respecto de la dirección inicial del movimiento de la partícula 1 y el ángulo entre sus direcciones de movimiento es de 60° .

Solución: I.T.I. 00, 03, I.T.T. 00, 02, 05

- a) Si aplicamos la conservación del momento lineal y la ecuación del coeficiente de restitución, que al ser un choque elástico tendremos $e = 1$, la relación entre las masas será (¡cuidado con los signos!):

$$\left. \begin{aligned} m_1 v_1 &= -m_1 v + m_2 v \\ 1 &= \frac{2v}{v_1} \Rightarrow v = \frac{1}{2} v_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}}$$

- b) Si aplicamos la conservación del momento lineal y la conservación de la energía por ser un choque elástico:



$$m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \Rightarrow \begin{cases} m_1 v_1 = m_1 v'_1 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + m_2 v'_2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 0 = m_1 v'_1 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - m_2 v'_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$

Tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas cuya solución es:

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{v_1}{2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{v_1}{\sqrt{3}} \\ v'_2 &= \left[4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \right] \frac{v_1}{2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}} v_1 \\ \frac{m_1}{m_2} &= \left[4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \right] = 2 \end{aligned}$$

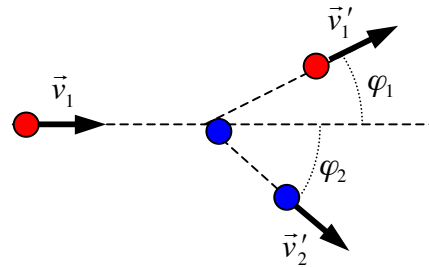
Una bola de billar en reposo es golpeada por otra idéntica que se mueve con una velocidad $v_1 = 2 \text{ m/s}$, y ésta última es desviada un ángulo $\varphi_1 = 30^\circ$ de su dirección inicial. La bola que estaba en reposo adquiere una velocidad que forma un ángulo $\varphi_2 = -45^\circ$ con la velocidad inicial $\vec{v}_1$. Hallar la velocidad de cada bola después del choque. Determinar si el choque es elástico.

Solución: I.T.I. 00, 03, I.T.T. 00, 03

Si aplicamos la conservación del momento lineal (téngase en cuenta que $\varphi_2 < 0$):

$$m\vec{v}_1 = m\vec{v}'_1 + m\vec{v}'_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mv_1 = mv'_1 \cos(\varphi_1) + mv'_2 \cos(\varphi_2) \\ 0 = mv'_1 \sin(\varphi_1) + mv'_2 \sin(\varphi_2) \end{cases}$$



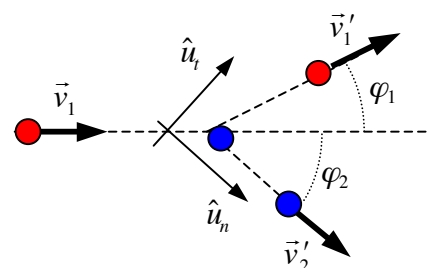
Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya solución es:

$$\begin{aligned} v'_1 &= \left[\frac{-\sin \varphi_2}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \right] v_1 = 1.464 \text{ m/s} \\ v'_2 &= \left[\frac{\sin \varphi_1}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \right] v_1 = 1.035 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Para comprobar si se trata o no de un choque elástico bastaría con comprobar si se conserva la energía cinética en el choque:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_{c, inicial}}{m} &= \frac{1}{2} v_1^2 = 2 \text{ m}^2/\text{s}^2 \\ \frac{E_{c, final}}{m} &= \frac{1}{2} v_1'^2 + \frac{1}{2} v_2'^2 = 1.61 \text{ m}^2/\text{s}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{CHOQUE INELASTICO}$$

Podemos incluso hasta calcular el valor del coeficiente de restitución en este choque. Considerando que las componentes de las velocidades no cambian en la dirección tangencial y que sólo cambian en la dirección normal tenemos que dichas direcciones en nuestro problema están orientadas como se indica en la figura (téngase en cuenta que si la partícula 2 se encontraba en reposo inicialmente la componente tangencial de su velocidad después del choque debe ser también nula, es decir, la velocidad que adquiere después del choque nos está mostrando la dirección normal):



$$e = \frac{v'_{2,n} - v'_{1,n}}{v_{1,n} - 0} = \frac{v'_2 - v'_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{v_1 \cos \varphi_2} = \boxed{0.464}$$

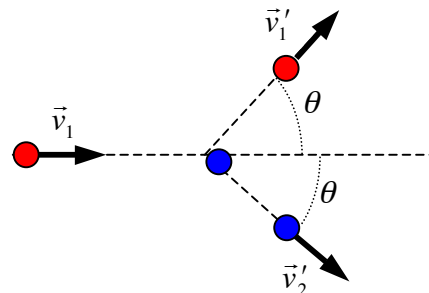
Una bola de billar en reposo es golpeada por otra idéntica que se mueve con una velocidad v_1 . Las partículas se separan simétricamente respecto de la dirección inicial del movimiento de la partícula 1 y el ángulo entre sus direcciones de movimiento es de 2θ . Hallar la velocidad de cada bola después del choque. Determinar el valor máximo $\theta_{\max}$ que puede alcanzar el ángulo. Determinar el coeficiente de restitución si $\theta = \frac{1}{2}\theta_{\max}$.

Solución: I.T.T. 04

Si aplicamos la conservación del momento lineal:

$$m\vec{v}_1 = m\vec{v}'_1 + m\vec{v}'_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mv_1 = mv'_1 \cos \theta + mv'_2 \cos \theta \\ 0 = mv'_1 \sin \theta - mv'_2 \sin \theta \end{cases}$$



Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya solución es:

$$v'_1 = v'_2 = \frac{v_1}{2 \cos \theta}$$

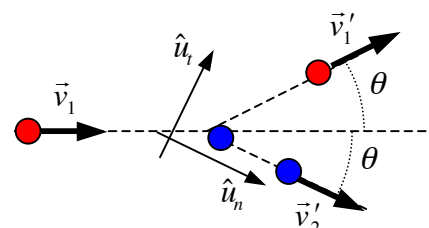
La energía cinética final debe ser igual (si el choque es elástico) o inferior (si el choque es inelástico) a la energía cinética inicial.

$$\left. \begin{aligned} E_{c, \text{inicial}} &= \frac{1}{2}mv_1^2 \\ E_{c, \text{final}} &= \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 = \frac{mv_1^2}{4 \cos^2 \theta} = \frac{E_{c, \text{inicial}}}{2 \cos^2 \theta} \leq E_{c, \text{inicial}} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2 \cos^2 \theta} \leq 1 \Rightarrow \cos \theta \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta \leq \boxed{45^\circ}$$

El ángulo máximo se alcanza por lo tanto si el choque es elástico.

Considerando que las componentes de las velocidades no cambian en la dirección tangencial y que sólo cambian en la dirección normal tenemos que dichas direcciones en nuestro problema están orientadas como se indica en la figura (téngase en cuenta que si la partícula 2 se encontraba en reposo inicialmente la componente tangencial de su



velocidad después del choque debe ser también nula, es decir, la velocidad que adquiere después del choque nos está mostrando la dirección normal). El coeficiente de restitución será:

$$e = \frac{v'_{2,n} - v'_{1,n}}{v_{1,n} - 0} = \frac{v'_2 - v'_1 \cos(2\theta)}{v_1 \cos \theta} = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2 \cos^2 \theta} = \tan^2 \theta = \tan^2 \left(\frac{\theta_{\text{máx.}}}{2} \right) = \boxed{0.172}$$

Una pequeña esfera de masa 100 g se halla colgada de un hilo inextensible y sin masa, de longitud 2 m sujeto por su otro extremo a un punto fijo. lanzamos horizontalmente otra pequeña esfera para que realice un choque frontal con la primera. Calcular la mínima velocidad de la esfera que lanzamos y su masa para que realizado el choque la esfera colgada del hilo describa una circunferencia completa en el plano vertical y la bola lanzada caiga verticalmente. Coeficiente de restitución $e = 1/4$. ¿Dónde la tensión del hilo es máxima?, determínala. Las esferas se consideran como masas puntuales.

Solución: I.T.I. 00, 02, 05, I.T.T. 00, 03

Llamemos v_1 a la velocidad de la primera bola antes del choque, y v_2 a la velocidad de la segunda bola después del choque. Aplicando la conservación del momento lineal y la del coeficiente de restitución:

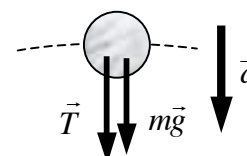
$$\left. \begin{aligned} m_1 v_1 &= m_2 v_2 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{m_1}{m_2} \\ e &= \frac{1}{4} = \frac{v_2}{v_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} m_1 &= \frac{m_2}{4} = 25 \text{ g} \\ v_2 &= \frac{v_1}{4} \end{aligned} \right.$$

La segunda bola va a realizar un movimiento circular de radio $l = 2$ m. Las únicas fuerzas que actúan sobre ella son: la tensión, que no realiza trabajo al ser perpendicular a la trayectoria, y el peso que es una fuerza conservativa. Podemos por lo tanto aplicar la conservación de la energía para calcular la velocidad de la segunda bola en la parte superior de su trayectoria circular. Tomando el nivel cero de energía potencial gravitatoria en la parte inferior:

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2,\text{arriba}}^2 + 2m_2 g l \Rightarrow v_{2,\text{arriba}}^2 = v_2^2 - 4gl = \frac{v_1^2}{16} - 4gl$$

Dibujando el diagrama de fuerzas cuando se encuentra en la parte más alta del círculo vemos que su aceleración va a ser vertical y por lo tanto sólo tendrá componente normal:

$$a_n = \frac{v_{2,\text{arriba}}^2}{l}.$$



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow T + mg = ma = m \frac{v_{2,arriba}^2}{l} = \frac{mv_1^2}{16l} - 4mg$$

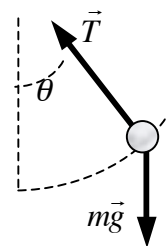
$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{(T + 5mg) \left(\frac{16l}{m} \right)}$$

La tensión en la parte superior debe como mínimo ser nula lo que implica que la velocidad mínima para la bola uno debe ser:

$$v_{1,mínima} = \sqrt{80gl} = 39.6 \text{ m/s}$$

Si dibujamos el diagrama de fuerzas en un momento en el que la cuerda forme un ángulo θ con la vertical y descomponemos en componentes normales:

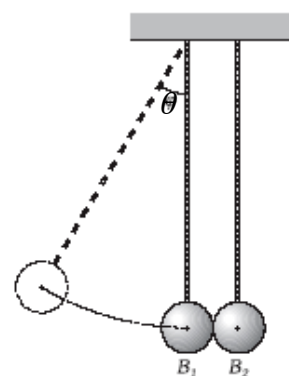
$$T - mg \cos \theta = ma_m = m \frac{v_2^2(\theta)}{l} \Rightarrow T = m \frac{v_2^2(\theta)}{l} + mg \cos \theta$$



Los dos términos que aparecen en la expresión para la aceleración toman un valor máximo en la posición inferior cuando $\theta = 0$, con lo que para el caso analizado en la primera parte del problema:

$$T_{máxima} = m \frac{v_2^2}{l} + mg = m \frac{(v_{1,mínima}/4)^2}{l} + mg = 6mg$$

Dos bolas de marfil B_1 y B_2 , de masas M_1 y M_2 , están suspendidas de dos hilos inextensibles de longitud 1 m. Las bolas se tocan, sin presión, cuando los hilos están verticales. Separamos B_1 de su posición de equilibrio un ángulo de $\theta = 60^\circ$, manteniendo el hilo extendido y en el mismo plano vertical que el otro hilo; soltamos B_1 y entonces viene a chocar contra la bola B_2 , que estaba inmóvil. Se pide calcular en los tres casos siguientes: a) $M_2 = 2M_1$, b) $M_2 = M_1/2$, c) $M_2 = M_1$. 1) La velocidad de B_1 cuando ésta choca con B_2 2) Las velocidades de ambas bolas después del choque, supuesto perfectamente elástico. 3) Las alturas a que ascenderán después del choque en el tercer caso.



Solución: I.T.I. 04

- 1) Aplicando la conservación de la energía entre la situación inicial en la que se suelta la bola B_1 y la situación final que es justo cuando dicha bola entra en contacto con la bola B_2 (tomamos el nivel nulo de energía potencial en la situación final) podemos calcular la velocidad con la que la primera bola impacta en la segunda y que será igual en los tres casos:

$$M_1 g L (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} M_1 V_1^2 \Rightarrow V_1 = \sqrt{2 g L (1 - \cos \theta)} = \boxed{3.13 \text{ m/s}}$$

- 2) Aplicando la conservación del momento lineal y el hecho de que el coeficiente de resitución es $e = 1$:

$$\left. \begin{aligned} M_1 V_1 &= M_1 V_1' + M_2 V_2' \\ e = \frac{V_2' - V_1'}{V_1} &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} V_1' = \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right) V_1 \\ V_2' = \left(\frac{2 M_1}{M_1 + M_2} \right) V_1 \end{cases}$$

aplicándolo a los tres casos propuestos:

a) $V_1' = \boxed{-1.04 \text{ m/s}}$ $V_2' = \boxed{2.09 \text{ m/s}}$

b) $V_1' = \boxed{1.04 \text{ m/s}}$ $V_2' = \boxed{4.17 \text{ m/s}}$

c) $V_1' = \boxed{0 \text{ m/s}}$ $V_2' = \boxed{3.13 \text{ m/s}}$

- 3) En el tercer caso las bolas (que tienen la misma masa) intercambian sus velocidades y por conservación de la energía es fácil ver que la segunda bola alcanzará exactamente la misma altura desde la que partió la primera:

$$h_2 = L(1 - \cos \theta) = \boxed{0.5 \text{ m}}$$

Dos esferas de masa $m_1 = 2 \text{ kg}$ y $m_2 = 3 \text{ kg}$ se mueven en la misma dirección con velocidades de $v_1 = 8 \text{ m/s}$ y $v_2 = 5 \text{ m/s}$. Determinar la velocidad después del choque si: a) llevan el mismo sentido, b) llevan sentidos contrarios. El coeficiente de restitución es $e = 1$.

Solución: I.T.T. 00

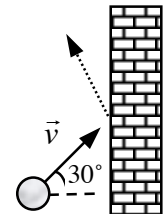
Texto solución

Demuéstrese que solamente en el caso de que el choque de una bola contra una pared sea totalmente elástico el ángulo que forma la velocidad con la línea de choque antes y después del mismo son iguales.

Solución: I.T.I. 92

Texto solución

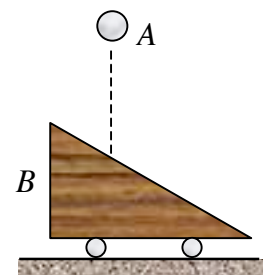
Una pelota se lanza contra una pared vertical lisa. Inmediatamente antes de que la pelota golpee a la pared, su velocidad tiene un módulo V y forma un ángulo de 30° con la horizontal. Sabiendo que el coeficiente de restitución es $e = 0.9$, calcular el módulo y dirección de la velocidad de la pelota cuando rebota.



Solución: I.T.T. 00

Texto solución

Una esfera A de masa 2 kg se suelta desde el reposo en la posición indicada y choca con la superficie inclinada de la cuña B de masa 6 kg con una velocidad de 3 m/s . La cuña está soportada por rodillos de forma que puede moverse libremente y se encuentra inicialmente en reposo. Sabiendo que el ángulo de la cuña es de 60° y que $e = 0.80$ determinar las velocidades de la cuña y de la bola inmediatamente después del choque.



Solución: I.T.I. 94

Texto solución