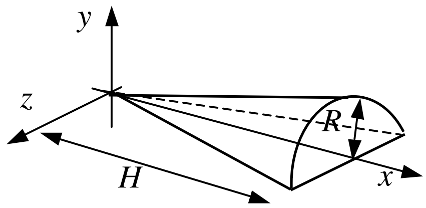
CALCULO DE CENTROS DE MASA

Determinar la posición del C.M. de un semicono.

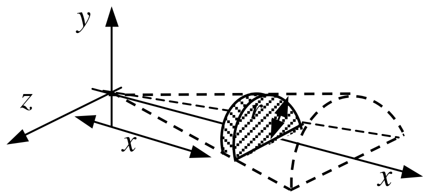
Solución: I.T.I. 01, I.T.T. 01, 04

Sea el semicono de la figura orientado a lo largo del eje X, de altura H y radio R. Dado que el plano XY es un plano de simetría que divide al semicono en dos mitades simétricas, el C.M. se encontrará en dicho plano, con lo cual la coordenada z del C.M. será nula:



$$\boxed{z_{C.M.} = 0}$$

Para el cálculo de la coordenada x del C.M. dividimos al semicono en rodajas en forma de semidiscos de radio r y espesor dx. La abertura del cono nos da la relación entre la coordenada x y el radio r de los semidiscos:



$$\frac{R}{H} = \frac{r}{x} \quad \Rightarrow \quad r = \left(\frac{R}{H}\right) x$$

El volumen de cada uno de los semidiscos será:

$$dV = \frac{1}{2}\pi r^2 dx = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{R}{H}\right)^2 x^2 dx$$

El volumen total del semicono será:

$$V = \int dV = \int_0^H \frac{1}{2}\pi\left(\frac{R}{H}\right)^2 x^2 dx = \frac{1}{6}\pi R^2 H$$

La coordenada x del C.M. será:

$$\int x\, dV = \int_0^H \frac{1}{2}\pi\left(\frac{R}{H}\right)^2 x^3 dx = \frac{1}{8}\pi R^2 H^2$$

$$\Rightarrow \quad x_{C.M.} = \frac{\int x\, dV}{\int dV} = \boxed{\frac{3}{4}H}$$

Para la coordenada y del C.M. vamos a utilizar los mismos diferenciales de volumen del cálculo anterior, a pesar de que todos sus puntos no tengan la misma coordenada y. Sabiendo que el C.M. de un semicírculo de radio r se encuentra a una distancia $\dfrac{4r}{3\pi}$ del diámetro, vamos a tomar esta posición como la representativa de cada una de las rodajas utilizadas en el apartado anterior.

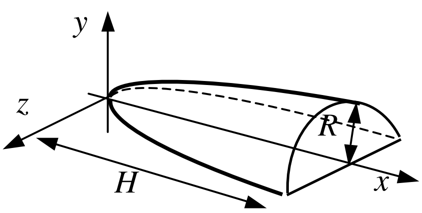
$$\int y_{\text{semidisco}}\, dV = \int \left(\frac{4r}{3\pi}\right) dV = \int_0^H \left(\frac{4r}{3\pi}\right) \frac{1}{2}\pi r^2 dx =$$

$$= \int_0^H \frac{2}{3}\, r^3 dx = \int_0^H \frac{2}{3}\left(\frac{R}{H}\right)^3 x^3 dx = \frac{1}{6}\, R^3 H$$

$$\Rightarrow \quad y_{C.M.} = \frac{\int y_{\text{semidisco}}\, dV}{\int dV} = \boxed{\frac{R}{\pi}}$$

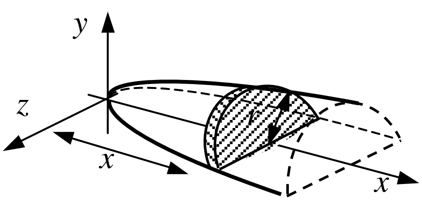
Calcular el centro de masas de medio paraboloide ($y \geq 0$) de revolución alrededor del eje X, cuyo radio en la base es R, la altura es H, y su vértice se encuentra en el origen de coordenadas.

Solución: **I.T.I. 03, 04, I.T.T. 01**



Sea el semiparaboloide de la figura orientado a lo largo del eje X, de altura H y radio R. Dado que el plano XY es un plano de simetría que divide al semiparaboloide en dos mitades simétricas, el C.M. se encontrará en dicho plano, con lo cual la coordenada z del C.M. será nula:

$$\boxed{z_{C.M.} = 0}$$



Para el cálculo de la coordenada x del C.M. dividimos al semiparaboloide en rodajas en forma de semidiscos de radio r y espesor dx. La ecuación del paraboloide nos da la relación entre la coordenada x y el radio r de los semidiscos:

$$\left.\begin{array}{l} x = k r^2 \\ H = k R^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{H}{R^2} \quad \Rightarrow \quad r = \left(\frac{R^2}{H}\, x\right)^{\frac{1}{2}}$$

El volumen de cada uno de los semidiscos será:

$$dV = \frac{1}{2}\pi r^2 dx = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{R^2}{H}\, x\right) dx$$

El volumen total del semiparaboloide será:

$$V = \int dV = \int_0^H \frac{1}{2}\pi\left(\frac{R^2}{H}x\right)dx = \frac{1}{4}\pi R^2 H$$

La coordenada x del C.M. será:

$$\int x\,dV = \int_0^a \frac{1}{2}\pi\left(\frac{R^2}{H}\right)x^2 dx = \frac{1}{6}\pi R^2 H^2$$

$$\Rightarrow \qquad x_{C.M.} = \frac{\int x\,dV}{\int dV} = \boxed{\frac{2}{3}H}$$

Para la coordenada y del C.M. vamos a utilizar los mismos diferenciales de volumen del cálculo anterior, a pesar de que todos sus puntos no tengan la misma coordenada y. Sabiendo que el C.M. de un semicírculo de radio r se encuentra a una distancia $\frac{4r}{3\pi}$ del diámetro, vamos a tomar esta posición como la representativa de cada una de las rodajas utilizadas en el apartado anterior.

$$\int y_{semidisco}\,dV = \int\left(\frac{4r}{3\pi}\right)dV = \int_0^H \left(\frac{4r}{3\pi}\right)\frac{1}{2}\pi r^2 dx =$$

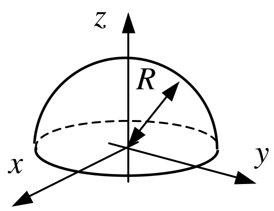
$$= \int_0^H \frac{2}{3}r^3 dx = \int_0^H \frac{2}{3}\left(\frac{R^2}{H}x\right)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{15}R^3 H$$

$$\Rightarrow \qquad y_{C.M.} = \frac{\int y_{semidisco}\,dV}{\int dV} = \boxed{\frac{16R}{15\pi}}$$

Determinar la posición del C.M. de una semiesfera.

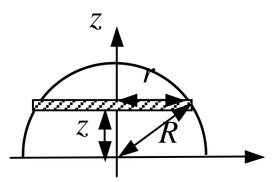
Solución: I.T.I. 01, 04, I.T.T. 01, 04

Sea la semiesfera de la figura orientada con su eje de revolución a lo largo del eje Z, y de radio R. Dado que el eje Z es un eje de simetría de la semiesfera, el C.M. se encontrará en dicho eje, con lo cual las coordenadas x e y del C.M. serán nulas:



$$\boxed{x_{C.M.} = 0 \qquad y_{C.M.} = 0}$$

Para el cálculo de la coordenada z del C.M. vamos a dividir la semiesfera en rodajas circulares de radio r y espesor dz. La ecuación de la circunferencia nos dará la relación entre r y z:



$$r^2 + z^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{R^2 - z^2}$$

El volumen de la semiesfera es:

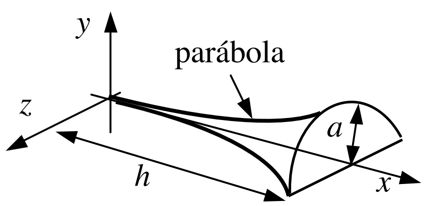
$$V = \int dV = \int \pi r^2 dz = \int_0^R \pi \left(R^2 - z^2\right) dz = \frac{2}{3}\pi R^3$$

La coordenada z del C.M. será:

$$\int z\, dV = \int_0^R \pi \left(R^2 - z^2\right) z\, dz = \frac{\pi}{4} R^4$$

$$\Rightarrow \quad z_{C.M.} = \frac{\int z\, dV}{\int dV} = \boxed{\frac{3}{8}R}$$

Determinar el centro de masas del cuerpo de la figura.

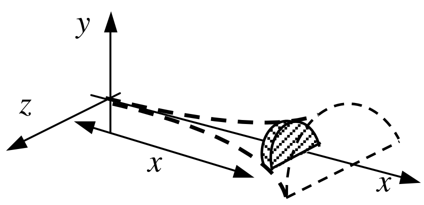


Solución: **I.T.I. 02, I.T.T. 99, 02**

Dado que el plano XY es un plano de simetría que divide a la figura en dos mitades simétricas, el C.M. se encontrará en dicho plano, con lo cual la coordenada z del C.M. será nula:

$$\boxed{z_{C.M.} = 0}$$

Para el cálculo de la coordenada x del C.M. dividimos al semicono en rodajas en forma de semidiscos de radio r y espesor dx. La relación entre la coordenada x y el radio r de los semidiscos vendrá dada por la ecuación de la parábola:



$$\left.\begin{array}{l} r = Cx^2 \\ \\ a = Ch^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad r = \left(\frac{a}{h^2}\right) x^2$$

El volumen de cada uno de los semidiscos será:

$$dV = \frac{1}{2}\pi r^2 dx = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{a}{h^2}\right)^2 x^4 dx$$

El volumen total de la figura será:

$$V = \int dV = \int_0^h \frac{1}{2}\pi \left(\frac{a}{h^2}\right)^2 x^4 dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{h^2}\right)^2 \frac{h^5}{5}$$

La coordenada x del C.M. será:

$$\int x\, dV = \int_0^a \frac{1}{2}\pi \left(\frac{a}{h^2}\right)^2 x^5 dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{h^2}\right)^2 \frac{h^6}{6}$$

$$\Rightarrow \quad x_{C.M.} = \frac{\int x\, dV}{\int dV} = \boxed{\frac{5}{6}h}$$

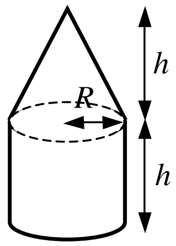
Para la coordenada y del C.M. vamos a utilizar los mismos diferenciales de volumen del cálculo anterior, a pesar de que todos sus puntos no tengan la misma coordenada y. Sabiendo que el C.M. de un semicírculo de radio r se encuentra a una distancia $\frac{4r}{3\pi}$ del diámetro, vamos a tomar esta posición como la representativa de cada una de las rodajas utilizadas en el apartado anterior.

$$\int y_{\text{semidisco}}\, dV = \int \left(\frac{4r}{3\pi}\right) dV = \int_0^H \left(\frac{4r}{3\pi}\right) \frac{1}{2}\pi r^2 dx =$$

$$= \int_0^H \frac{2}{3}\, r^3 dx = \int_0^H \frac{2}{3}\left(\frac{a}{h^2}\right)^3 x^6 dx = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{h^2}\right)^3 \frac{h^7}{7}$$

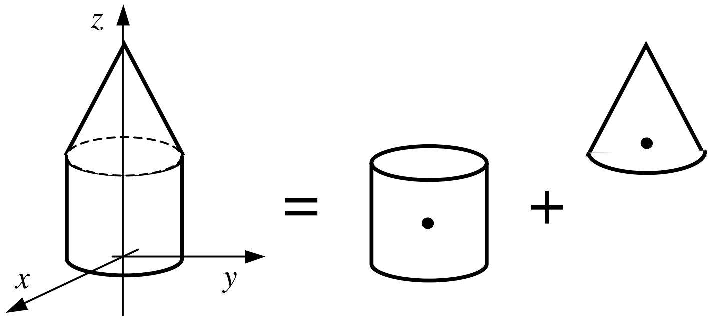
$$\Rightarrow \quad y_{C.M.} = \frac{\int y_{\text{semidisco}}\, dV}{\int dV} = \boxed{\frac{20a}{21\pi}}$$

Calcular la posición del centro de masas del cuerpo de la figura.



Solución: **I.T.I. 03, I.T.T. 03**

Si llamamos Z al eje de revolución del cuerpo su centro de masas, que va a estar situado por simetría en dicho eje, sólo tendrá componente z. Si descomponemos el cuerpo en dos piezas, un cono y un cilindro, cada pieza vendrá representada por la posición de su centro de masas y el problema es equivalente al cálculo del c.m. de un sistema de dos partículas:



$$\left.\begin{array}{ll} V_1 = \pi R^2 h & z_1 = \dfrac{h}{2} \\ V_2 = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h & z_2 = \dfrac{5h}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad z_{c.m.} = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2}{V_1 + V_2} = \boxed{\frac{11h}{16}}$$