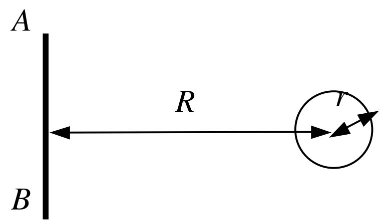
CALC. DE CENTROS DE MASA: PAPPUS-GULDING

Obtener el volumen y el área del sólido de revolución formado al girar respecto al eje *AB* el área mostrada en la figura.



Solución: **I.T.I. 01, 04, I.T.T. 01, 04**

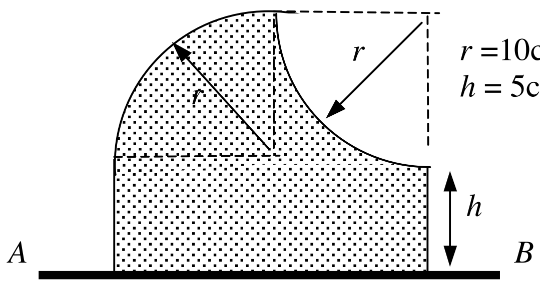
Para calcular el volumen del cuerpo de revolución generado utilizaremos el segundo teorema de Pappus-Gulding:

$$V_{generado} = A_{placa}\left(recorrido\ C.M.\ placa\right) \quad \Rightarrow \quad V_{generado} = \left(\pi r^2\right)\left(2\pi R\right) = \boxed{2\pi^2 r^2 R}$$

Para calcular el área del cuerpo de revolución generado consideraremos que estamos girando un alambre circular de radio *r* y utilizaremos el primer teorema de Pappus-Gulding:

$$A_{generada} = L_{alambre}\left(recorrido\ C.M.\ alambre\right) \quad \Rightarrow \quad A_{generada} = \left(2\pi r\right)\left(2\pi R\right) = \boxed{4\pi^2 rR}$$

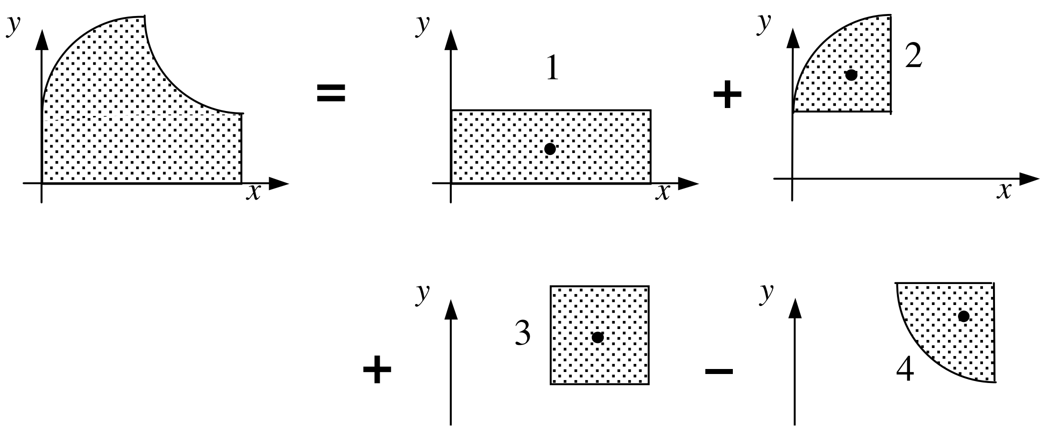
Obtener el volumen y el área del sólido de revolución formado al girar respecto al eje *AB* el área mostrada en la figura.



r =10cm
h = 5cm

Solución: **I.T.I. 01, 04, I.T.T. 01, 04**

Para calcular la posición del C.M. de la placa vamos a dividirla en diferentes partes cuyos C.M. conozcamos:



Las posiciones del C.M. de cada una de las piezas son:

$$\vec{r}_1 = \left(r, \frac{h}{2}, 0\right) \qquad \vec{r}_2 = \left(r - \frac{4r}{3\pi}, h + \frac{4r}{3\pi}, 0\right)$$

$$\vec{r}_3 = \left(\frac{3r}{2}, h + \frac{r}{2}, 0\right) \qquad \vec{r}_4 = \left(2r - \frac{4r}{3\pi}, h + r - \frac{4r}{3\pi}, 0\right)$$

La coordenada y del C.M. de toda la pieza será:

$$y_{C.M.} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 - y_4 A_4}{A_1 + A_2 + A_3 - A_4} =$$

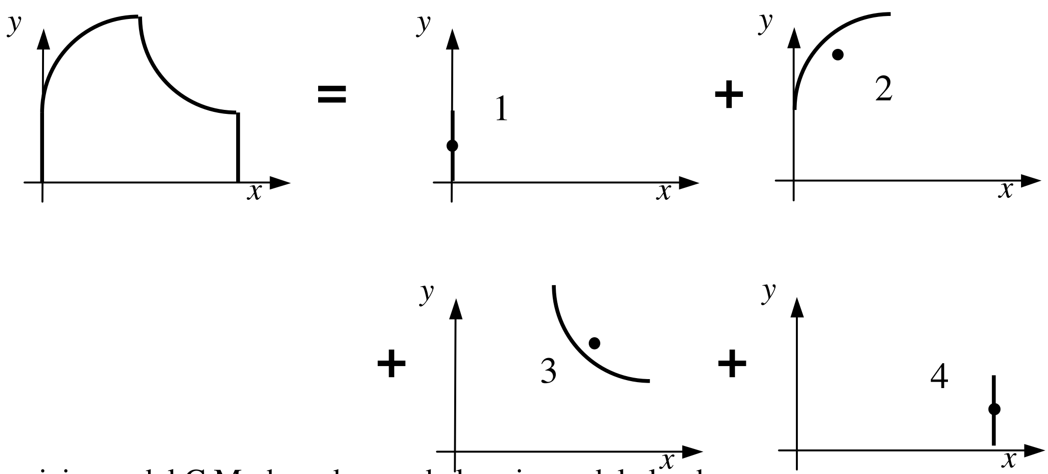
$$= \frac{\left(\frac{h}{2}\right)(2rh) + \left(h + \frac{4r}{3\pi}\right)\left(\frac{\pi}{4}r^2\right) + \left(h + \frac{r}{2}\right)\left(r^2\right) - \left(h + r - \frac{4r}{3\pi}\right)\left(\frac{\pi}{4}r^2\right)}{2rh + \frac{\pi}{4}r^2 + r^2 - \frac{\pi}{4}r^2} = 5.66 \text{ cm}$$

Para obtener el volumen del sólido de revolución generado al girar la placa aplicamos el segundo teorema de Pappus-Gulding:

$$V_{generado} = A_{placa}\left(recorrido\ C.M.\, placa\right)$$

$$\Rightarrow \quad V_{generado} = \left(2rh + r^2\right)\left(2\pi y_{C.M.}\right) = \boxed{7.11 \cdot 10^3 \text{ cm}^3}$$

Para calcular el área del cuerpo de revolución generado consideraremos que estamos girando un alambre que pasa por el perímetro de toda la placa (salvo la parte inferior) y utilizaremos el primer teorema de Pappus-Gulding.



Las posiciones del C.M. de cada una de las piezas del alambre son:

$$\vec{r}_1 = \left(0, \frac{h}{2}, 0\right) \qquad \vec{r}_2 = \left(r - \frac{2r}{\pi}, h + \frac{2r}{\pi}, 0\right)$$

$$\vec{r}_3 = \left(2r - \frac{2r}{\pi}, h + r - \frac{2r}{\pi}, 0\right) \qquad \vec{r}_4 = \left(2r, \frac{h}{2}, 0\right)$$

La coordenada y del C.M. de todo el alambre será:

$$y_{C.M.} = \frac{y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3 + y_4 L_4}{L_1 + L_2 + L_3 + L_4} =$$

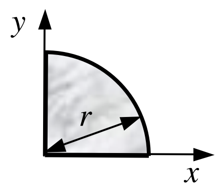
$$= \frac{\left(\frac{h}{2}\right)(h) + \left(h + \frac{2r}{\pi}\right)\left(\frac{\pi}{2}r\right) + \left(h + r - \frac{2r}{\pi}\right)\left(\frac{\pi}{2}r\right) + \left(\frac{h}{2}\right)(h)}{h + \frac{\pi}{2}r + \frac{\pi}{2}r + h} = 8.19\,\text{cm}$$

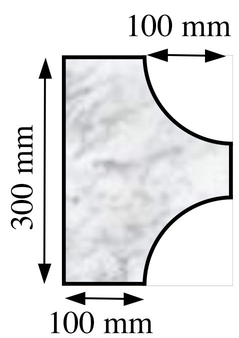
Aplicando el teorema:

$$A_{generada} = L_{alambre}\left(recorrido\ C.M.\,alambre\right)$$

$$\Rightarrow \quad A_{generada} = (2h + \pi r)(2\pi y_{C.M.}) = \boxed{2.13 \cdot 10^3\ \text{cm}^2}$$

Determinar los centros de gravedad de las placas de la figura.





Solución: **I.T.I. 02, I.T.T. 99, 02**

<u>Primera pieza</u>:

Rotando el cuarto de círculo alrededor del eje Y y utilizando el 2º teorema de Pappus-Gulding:

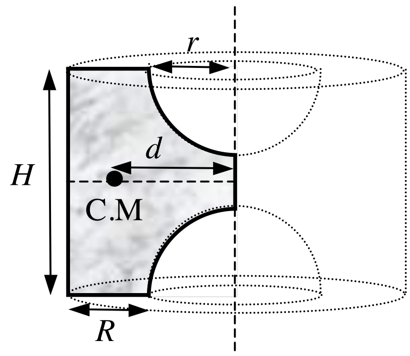
$$V_{semiesfera} = A_{\substack{cuarto \\ de\ círculo}} \left(Recorrido\ del\ c.m.\ del\ cuarto\ de\ círculo\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{1}{4}\pi R^2 \cdot 2\pi x_{C.M.} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{C.M.} = \frac{4R}{3\pi}}$$

Por simetría: $\boxed{y_{C.M.} = x_{C.M.} = \dfrac{4R}{3\pi}}$

<u>Segunda pieza</u>:

Por simetría el c.m. de la pieza estará a media altura. Rotando la pieza alrededor de un eje vertical y utilizando el 2º teorema de Pappus-Gulding:



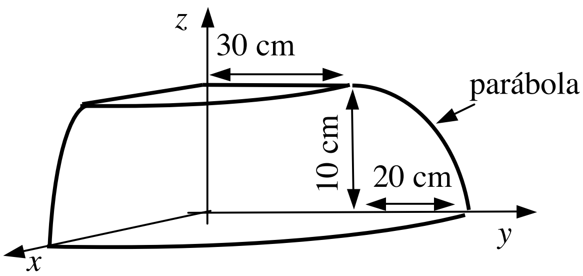
$$Volumen = \pi R^2 H - \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$Area\ de\ la\ placa = HR - \frac{1}{2}\pi R^2$$

$$Recorrido\ del\ C.M.\ de\ la\ placa = 2\pi d$$

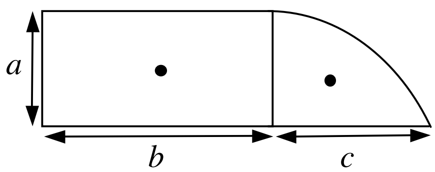
$$\Rightarrow \quad \pi R^2 H - \frac{4}{3}\pi R^3 = \left(HR - \frac{1}{2}\pi R^2\right) 2\pi d \quad \Rightarrow \quad d = \boxed{120.4\ \text{mm}}$$

Calcular el volumen del cuerpo de revolución mostrado en la figura. (Solo se muestra una cuarta parte y el vértice de la parábola está en la parte superior).



Solución: **I.T.I. 02, I.T.T. 99, 02**

Podemos utilizar el segundo teorema de Pappus-Gulding si consideramos que dicho cuerpo de revolución se genera al girar la siguiente placa alrededor del eje *Z*:

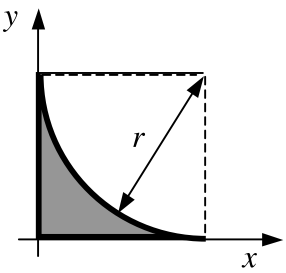


Dicha placa puede dividirse en un rectángulo y una placa semiparabólica, de forma que la coordenada *x* de su c.m. será:

$$\left.\begin{array}{ll} A_1 = ab \quad , & x_1 = \dfrac{1}{2}b \\ A_2 = \dfrac{2}{3}ac \quad , & x_2 = b + \dfrac{3}{8}c \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_{C.M.} = \frac{A_1x_1 + A_2x_2}{A_1 + A_2}$$

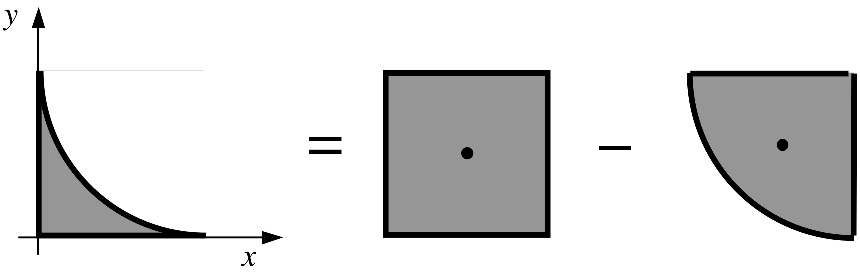
$$\Rightarrow \quad V_{generado} = A_{placa} 2\pi x_{C.M.} = (A_1 + A_2) 2\pi \left(\frac{A_1x_1 + A_2x_2}{A_1 + A_2}\right) = 2\pi (A_1x_1 + A_2x_2) = \boxed{59690\ \text{cm}^3}$$

Calcular el volumen del cuerpo de revolución obtenido al rotar la placa de la figura alrededor del eje Y. Datos: $r = 5$ cm.



Solución: **I.T.I. 03, I.T.T. 03**

Primero calcularemos la posición del centro de masas de la placa la cual podemos considerar como un cuadrado al que se le ha recortado un cuarto de círculo.



$$\left.\begin{array}{ll} A_1 = r^2 & x_1 = \dfrac{r}{2} \\ A_2 = \dfrac{1}{4}\pi r^2 & x_2 = \left(1 - \dfrac{4}{3\pi}\right) r \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x_{c.m.} = \frac{A_1 x_1 - A_2 x_2}{A_1 - A_2} = \left(\frac{10 - 3\pi}{12 - 3\pi}\right) r = 1.117 \text{ cm}$$

Según el segundo teorema de Pappus Gulding el volumen de revolución obtenido valdrá:

$$V_{revolución} = A_{placa}\left(2\pi x_{c.m.}\right) = \left(A_1 - A_2\right)\left(2\pi \frac{A_1 x_1 - A_2 x_2}{A_1 - A_2}\right) =$$

$$= 2\pi\left(A_1 x_1 - A_2 x_2\right) = \left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi^2}{2}\right) r^3 = \boxed{37.65 \text{ cm}^3}$$