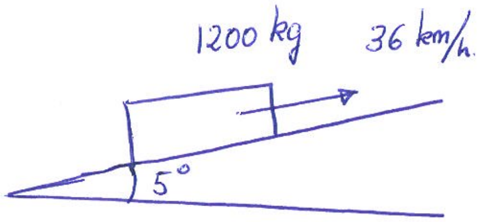
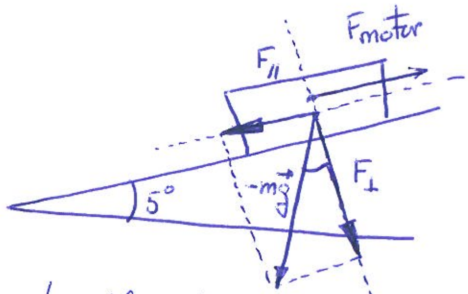
Problema 1: Un automóvil con masa de 1200 kg se mueve hacia arriba por una colina inclinada 5° con una velocidad de 36 km/h. Calcular a) el trabajo realizado por el motor en 5 minutos, b) la potencia desarrollada. Despreciar el trabajo de rozamiento.



Sólamente la componente del peso paralela a la rampa realiza trabajo. Ni la componente perpendicular del peso ni la normal realizan trabajo por ser perpendiculares al desplazamiento:



$$F_\perp = -mg\cdot\cos 5° = -1.173\cdot 10^4\ N$$

$$F_{\parallel} = -mg\cdot \text{sen}\, 5° = -1.026\cdot 10^3\ N$$

$$|F_{motor}| = |F_{\parallel}|$$

El motor del coche tiene que ejercer una fuerza sobre el coche de módulo igual a $F_{\parallel}$ y de sentido opuesto para mantener el coche con velocidad constante (sin aceleración)

En 5 minutos, el coche se habrá desplazado en la dirección paralela a la rampa; $\Delta x'$

$$\Delta x' = 36\,\frac{km}{h}\cdot\frac{1\,h}{3600\,s}\cdot\frac{1000\,m}{1\,km}\cdot 300\,s = 3000\ m$$

Con lo que el trabajo realizado por la fuerza paralela a la rampa será:

$$\underline{\underline{W}} = F_{\parallel}\cdot\Delta x' = +1.026\cdot 10^3\cdot 3\cdot 10^3\ J = \underline{\underline{3.078\cdot 10^3\ J}}$$

3) El motor realiza este trabajo en 5 minutos, con lo que la potencia desarrollada será:

$$\mathcal{P} = \frac{W}{t} = \frac{3.078 \cdot 10^3 \text{ J}}{300 \text{ s}} = 1.026 \cdot 10^4 \text{ W} = 10.26 \text{ kW}$$

Otra manera de calcular la potencia es

$$\underline{\underline{\mathcal{P}}} = F_{motor} \cdot v = 1.026 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 10 \text{ m/s} = 10.26 \cdot 10^3 \text{ W} = \underline{\underline{10.26 \text{ kW}}}$$

Problema 2: Un trineo de 20 kg se desliza por una colina desde una altura de 20 m. El trineo inicia su movimiento a partir del reposo y tiene una velocidad de 16 m/s cuando llega al pie de la colina. Calcule la energía perdida por fricción. Si la pendiente de la colina es de 30° calcule el coeficiente de rozamiento cinemático entre el trineo y el suelo así como la potencia de rozamiento.

En lo alto de la colina, toda la energía del sistema (el trineo) es potencial gravitatoria, ya que su velocidad es nula:

$$E_{inicial} = K_{inicial} + U_{inicial} = U_{inicial} = mgh$$

$$= 20\,kg \cdot 9.81\,m/s^2 \cdot 20\,m = 3924\,J$$

(Hemos tomado como cero de energía potencial y origen de altura el pie de la colina).

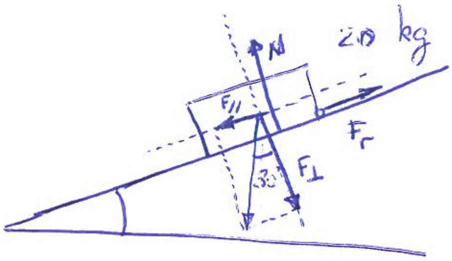
En el pie de la colina, toda la energía será cinética:

$$E_{final} = K_{final} + U_{final} = K_{final} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$= \frac{1}{2}\, 20\,kg \cdot \left(16\,m/s\right)^2 = 2560\,J$$

La ~~(energ)~~ diferencia de energías entre la posición final e inicial será el trabajo disipado por fuerzas no conservativas (el rozamiento):

$$\underline{W_{rozamiento}} = E_{inicial} - E_{final} = (3924 - 2560)\,J = \underline{1364\,J}$$



Las fuerzas netas que actúan sobre el trineo son:

- peso : $-m\vec{g}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{- componente } \perp \text{ a la rampa: } -mg\cdot\cos 30 \\ \text{- componente } // \text{ a la rampa: } -mg\cdot\text{sen}\,30 \end{cases}$
- la normal $\vec{N}$
- la fuerza de rozamiento:

La fuerza neta perpendicular a la rampa se anula:

$$F_\perp + N = -mg\cdot\cos 30 + N = 0 \Rightarrow N = mg\cos 30$$

La fuerza neta paralela a la rampa es la responsable de la aceleración:

$$\sum F_{ext}^{paralelas} = -mg\cdot\text{sen}\,30 + F_r = -mg\,\text{sen}\,30 + \mu\cdot N = m\cdot a$$

$$-mg\,\text{sen}\,30 + \mu\cdot mg\cos 30 = ma$$

$$\mu = \frac{a + \cancel{m}g\,\text{sen}\,30}{g\cos 30} \qquad (1)$$

Por otra parte, como la aceleración es constante:

$$v_{x'f}^2 = v_{x'i}^2 + 2a_{x'}(x'_f - x'_i)$$

donde x' se refiere a la dirección paralela a la rampa.

$v_{x'f} = 16 \ m/s$ $\qquad$ $x'_i = 20 / \operatorname{sen} 30 \ m = 40 \ m$

$v_{x'i} = 0 \ m/s$ $\qquad$ $x'_f = 0 \ m$

Luego:

$$a_{x'} = \frac{v_{x'f}^2 - v_{x'i}^2}{2\,(x'_f - x'_i)} = -3.2 \ m/s^2$$

Reemplazando este valor de la aceleración en (1):

$$\underline{\underline{\mu = 0.2007}}$$

• Conocida la posición inicial y final, la aceleración y la velocidad inicial, podemos calcular el tiempo que tarda el trineo en caer.

$$x'_f = x'_i + v_{x'} \cdot t + \frac{1}{2} a_{x'} \cdot t^2$$

$$x'_f = x'_i + \frac{1}{2} a_{x'} \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot (x'_f - x'_i)}{a_{x'}}}$$

Reemplazando los datos del problema:

$$t = 5s$$

En 5s, el rozamiento realiza un trabajo de 1364 J

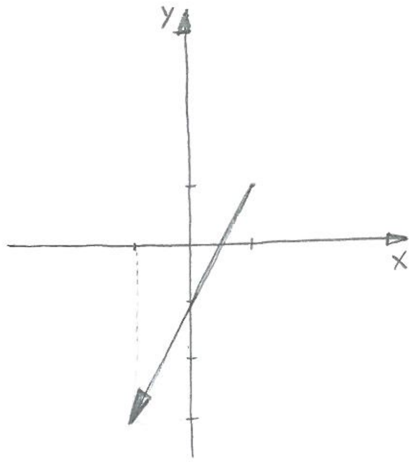
con lo que la potencia media vale:

$$\underline{\underline{P}} = \frac{1364 \ J}{5 \ s} = \underline{\underline{272.8 \ W}}$$

Problema 3: Sobre una partícula de masa $m = 4$ kg actúa una fuerza $\vec{F} = -2x\vec{i} - 4y\vec{j}$ N.

a) ¿Es una fuerza central? ¿Por qué?

No. Una fuerza central tiene siempre la misma dirección que el vector posición, mientras que ésta no cumple esta condición.

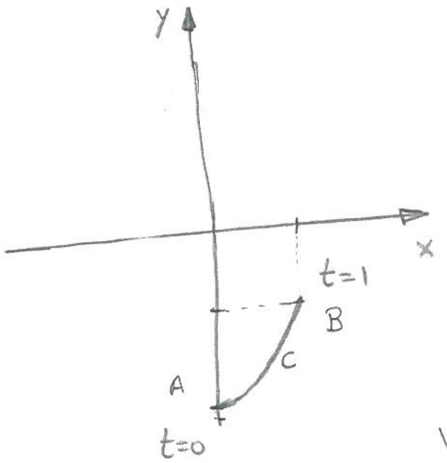


Por ejemplo, la fuerza sobre la partícula cuando ésta se encuentre en la posición (1, 1) será:

$$\vec{F} = -2\vec{i} - 4\vec{j}$$

que no está dirigida según la dirección del vector posición.

b) Determina el trabajo que realiza dicha fuerza cuando movemos a la partícula de la posición A (0, -2) hasta la posición B (1, -1) siguiendo la trayectoria $x = t$, $y = t^2 - 2$.



$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F} = -2x\vec{i} - 4y\vec{j} \\ d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} \end{array}\right\} \vec{F} \cdot d\vec{r} = (-2x\,dx) - 4y\,dy$$

$$W = \int_C -2x\,dx + \int_C -4y\,dy$$

$x = t$ $\quad$ $y = t^2 - 2$

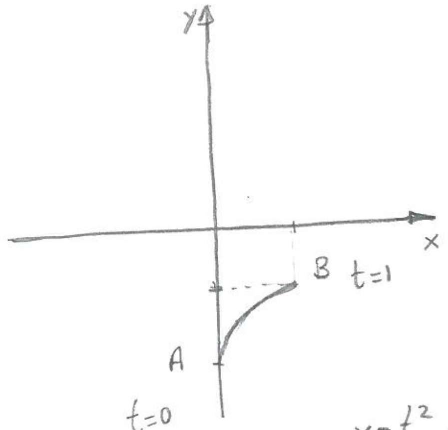
$dx = dt$ $\quad$ $dy = 2t\,dt$

$$= \int_0^1 -2t\,dt + \int_0^1 -4\cdot(t^2-2)\,(2t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 -2t\,dt + \int -4(t^2-2)(2t)\,dt = -\int_0^1 2t\,dt - \int_0^1 8t^3\,dt + \int_0^1 16t\,dt$$

$$= -\frac{2t^2}{2}\Big]_0^1 - \frac{8t^4}{4}\Big]_0^1 + 16\,\frac{t^2}{2}\Big]_0^1 = -1-2+8 = \underline{\underline{5\ J}}$$

Cuánto vale dicho trabajo si seguimos la trayectoria $x=t^2$; $y=-2+t$



$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$W = -\int_C 2x\,dx - \int_C 4y\,dy$$

$x=t^2$;; $dx=2t\,dt$

$$= -\int_0^1 2t^2\,2t\,dt - \int_0^1 4\cdot(-2+t)\,dt$$

$y=-2+t$;; $dy=dt$

$$= -\int_0^1 4t^3\,dt + \int_0^1 8\,dt - \int_0^1 4t\,dt = -\frac{4t^4}{4}\Big]_0^1 + 8t\Big]_0^1 - 4\,\frac{t^2}{2}\Big]_0^1 =$$

$$= -1+8-2 = \underline{\underline{5\ J}}$$

Podría ser una fuerza conservativa ya que, al menos para estas dos trayectorias, el trabajo realizado por la fuerza es independiente de la misma.

c) Determina la función energía potencial asociada a dicha fuerza.
¿Cómo son las curvas equipotenciales?
Dibújalas en el plano xy.

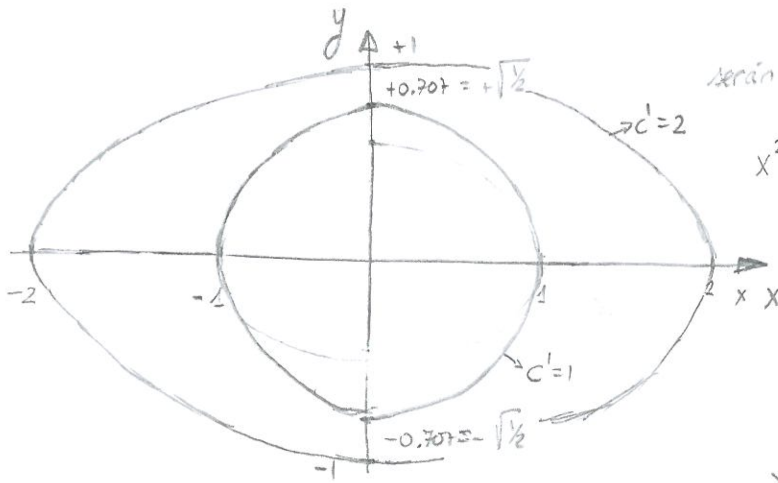
$$\vec{F} = -\nabla \cdot V(x,y) = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}\vec{j}$$

$$\vec{F} = -2x\,\vec{i} - 4y\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x = -\dfrac{\partial V(x,y)}{\partial x} \Rightarrow V(x,y) = \displaystyle\int 2x\,dx = \dfrac{2x^2}{2} + f(y) = x^2 + f(y) \\ -4y = -\dfrac{\partial V(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + f(y)\right) = -\dfrac{\partial f(y)}{\partial y} \end{cases}$$

$$f(y) = \int 4y\,dy = 4\frac{y^2}{2} + C = 2y^2 + C$$

$$\Rightarrow \boxed{V(x,y) = x^2 + 2y^2 + C}$$



Las superficies equipotenciales serán tales que

$$x^2 + 2y^2 + C = \text{constante}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + 2y^2 = \underbrace{\text{constante} - C}_{\text{esto es otra constante}} = C'$$

$$\frac{x^2}{C'} + \frac{2y^2}{C'} = 1$$

$$\frac{x^2}{C'} + \frac{y^2}{C'/2} = 1$$

que es la ecuación de una elipse con centro en el origen y semiejes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a^2 = C' \Rightarrow a = +\sqrt{C'} \\ b^2 = C'/2 \Rightarrow b = \sqrt{C'/2} \end{matrix}$$

d) Haz una gráfica de la E_p en función de la coordenada x cuando tomamos $y=0$

A la vista de esta gráfica explica como será el movimiento de la partícula:

Si $y=0$, la energía potencial como función de x tendrá la forma:

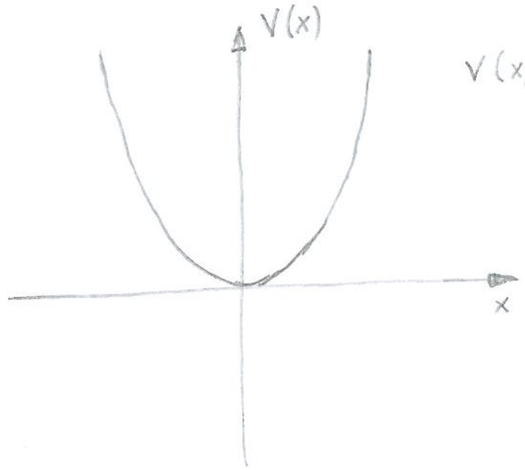
$$V(x, y=0) = x^2 + C$$

Tomamos como origen de potenciales el valor del mismo en $x=0$.

$$V(x=0, y=0) \equiv 0 = C$$

Con lo cuál

$$V(x, y=0) = x^2$$



$$V(x, y=0) = x^2 \Rightarrow \vec{F} = -\nabla V = -2x\,\vec{i}$$

La segunda ley de Newton nos dice que.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

En este caso particular, con un movimiento unidimensional a lo largo de x.

$$4 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 2x = 0 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2}x = 0$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi), \quad \text{con } \omega^2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$ y (A, ϕ) constants de integración.

e) Si dejamos libre la partícula con velocidad inicial cero en la coordenada $(-2,0)$ para un tiempo $t=0$, encontrar la ecuación del movimiento. Determinar su posición al cabo de 5s.

$$x(t=0) = A\cdot\cos\phi = -2$$

$$v(t=0) = -A\omega \operatorname{sen}\phi = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\phi = 0 \Rightarrow \begin{cases}\phi = 0 \\ \text{ó} \\ \phi = \pi\end{cases}$$

ya que la amplitud A
y la frecuencia angular $\neq 0$

Si $\phi = 0 \Rightarrow A\cdot\cos 0 = -2 \Rightarrow A = -2$

Si $\phi = \pi \Rightarrow A\cdot\cos\pi = -2 \Rightarrow A = 2$

Si tomamos la segunda solución

$$x(t) = 2\cos\left(\sqrt{1/2}\,t + \pi\right)$$

En $t = 5s$:

$$x(t=5s) = 2\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot 5 + \pi\right) = 1.84\ m$$

Problema 4.- Calcular la energía potencial gravitatoria y la energía mecánica total de un satélite geosíncrono de masa 1000 kg. (Radio de la Tierra, R = 6370 km)

Un satélite geosíncrono realiza una trayectoria circular tardando 24 h en recorrerla completamente (M masa de la Tierra, m masa del satélite, R radio terrestre, r distancia del satélite al centro de la Tierra)

Por la segunda ley de Newton:

$$\vec{F}_{grav} = m\vec{a} \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v^2 = G\frac{M}{r}$$

Como $g = G\dfrac{M}{R^2} \Rightarrow GM = g \cdot R^2$,

donde $g = 9,80$ m/s² es la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre.

$$\boxed{v^2 = g\frac{R^2}{r}}$$

Por otro lado $\dfrac{2\pi r}{v} = T = 24$ h

$$\Rightarrow r = \frac{v \cdot T}{2\pi} \Rightarrow v^2 = g \cdot \frac{R^2}{\frac{v \cdot T}{2\pi}} \Rightarrow v^3 = \frac{2\pi R^2 g}{T}$$

$$\boxed{v = \left(\frac{2\pi g R^2}{T}\right)^{1/3} = 3.07 \text{ km/s}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{r = \frac{v \cdot T}{2\pi} = 42,2 \cdot 10^3 \text{ km}}$$

La energía potencial gravitatoria del satélite vendrá dada por:

$$E_{pot\ grav} = -G\frac{Mm}{r} = -gm\cdot\frac{R^2}{r} = -9.42 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Para la energía cinética tenemos:

$$K = \frac{1}{2}m \cdot v^2 = \frac{1}{2}mg\frac{R^2}{r}$$

Con lo que la energía mecánica total del satélite será:

$$E_{total} = K + E_{pot.\ grav} = \frac{1}{2} mg \frac{R^2}{r} - mg \frac{R^2}{r} = -\frac{1}{2} mg \frac{R^2}{r}$$

$$= -4.71 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Que es la mitad de lo que valía la energía potencial gravitatoria.

Problema 5.- Una placa de masa m, de la que cuelga un muelle de masa despreciable, se deja caer desde una altura h, siendo K la constante recuperadora del muelle.

a) Hallar la energía cinética del sistema en el instante de contacto del extremo P del muelle con el suelo.

Energía del muelle en el estado inicial: $E = U_1 = mgh$

Energía del muelle en el estado 2 $E = U_2 + K_2 = mgL + K_2$

Como la energía se conserva. $U_1 = U_2 + K_2$

$$mgh = mgL + K_2$$

$$\underline{\underline{K_2 = mg(h-L)}}$$

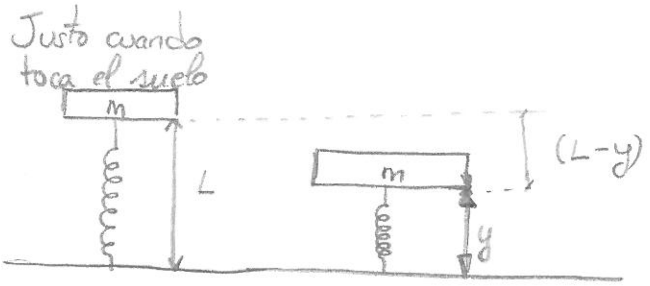
b) Comprobar que se cumplen las condiciones para poder aplicar la ley de la conservación de la energía, y calcular mediante la misma la longitud del muelle en el instante de máxima compresión.

Todas las fuerzas que actúan sobre el sistema son conservativas

$\Rightarrow$ la energía se conserva.

Cuando el muelle empieza a comprimirse, la energía total del sistema masa muelle es:

$$E = K + U + E_{elástica}$$



• Cuando la masa está situada a una altura y, el muelle estará comprimido una longitud (L-y)

$\Rightarrow$ la energía elástica es: $\frac{1}{2}k(L-y)^2 = \frac{1}{2}k(L^2+y^2-2Ly)$

• Cuando la masa está situada a una altura y, la energía potencial vale:

$$U = mgy$$

• Cuando la masa está situada a una altura y, la energía cinética es:

$$K = \frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

En el punto de máxima compresión, y_m, la energía cinética del sistema es nula, con lo que la energía total del sistema vale:

$$\left(U + E_{elástica}\right)_{en\,y_p} = mgy_m + \frac{1}{2}k(L-y)^2$$

Y como la energía se conserva

$$E = \left(U + E_{elástica}\right)_{en\ y_p}$$

$$mgh = mgy_m + \frac{1}{2}k(L-y_m)^2 = mgy_m + \frac{1}{2}kL^2 + \frac{1}{2}ky_m^2 - kLy_m$$

$$\frac{1}{2}ky_m^2 + (mg-kL)y_m + \left(\frac{1}{2}kL^2 - mgh\right) = 0$$

$$y_m^2 + \frac{2}{k}(mg - kL)\, y_m + \frac{2}{k}\left(\frac{1}{2}kL^2 - mgh\right) = 0$$

$$y_m^2 + \left(\frac{2mg}{k} - 2L\right) y_m + \left(L^2 - \frac{2mg}{k}h\right) = 0$$

Si definimos $C = \frac{mg}{k}$

$$y_m^2 + (2C - 2L)\, y_m + (L^2 - 2Ch) = 0$$

$$y_m = \frac{-(2C-2L) \pm \sqrt{(2C-2L)^2 - 4(L^2 - 2Ch)}}{2} =$$

$$= \frac{-2C+2L \pm \sqrt{4C^2 + \cancel{4L^2} - 8CL - \cancel{4L^2} + 8Ch}}{2}$$

$$= \frac{-2C+2L \pm \sqrt{4C^2 + 8C(h-L)}}{2}$$

$$= (L-C) \pm \frac{2\sqrt{C^2 + 2C(h-L)}}{2} =$$

$$= (L-C) \pm \sqrt{C \cdot (C + 2(h-L))}$$

La solución obtenida tomando la suma no tiene sentido físico, ya que resultaría una solución $y > L$, con lo que el muelle no estaría comprimido.

Luego sólo la solución negativa tiene sentido físico.

$$\underline{\underline{y_m = L - C - \sqrt{C \cdot [C + 2(h-L)]}}}$$

c) ¿Permanecerá en equilibrio el sistema a partir de dicho instante?

No, sobre el cuerpo actuará la fuerza recuperadora del muelle y acelerará hacia arriba.

Problema 6.- Un proyectil de 2 g sale de la boca de un fusil con una velocidad de 300 m/s. La fuerza que actúa sobre ella mientras está en el cañón es $F = 400 - \frac{4 \cdot 10^5 t}{3}$ (N) con t en s. Hallar el tiempo necesario para que recorra la longitud del cañón.

La variación del momento lineal de la bala entre el instante inicial cuando se produce el disparo y el instante final, cuando la bala sale por el cañón vale:

$$\Delta p = p_f - p_i = m \cdot v_f = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 300 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 6 \cdot 10^{-1} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Entre esos instantes, el impulso de la fuerza vale:

$$I = \int_0^t F(t')\, dt' = \int_0^t \left(400 - \frac{4 \cdot 10^5 t'}{3}\right) dt' =$$

$$= 400\, t - \frac{4 \cdot 10^5}{3} \frac{t^2}{2}$$

$$= 400\, t - \frac{2 \cdot 10^5}{3} \cdot t^2$$

La variación de la cantidad de movimiento es igual al impulso total de la fuerza neta

$$I = \Delta p$$

$$-\frac{2 \cdot 10^5}{3} t^2 + 400 t = 0.6 \;;\; \frac{2 \cdot 10^5}{3} t^2 - 400 t + 0.6 = 0$$

$$t = \frac{+400 \pm \sqrt{16 \cdot 10^4 - 16 \cdot 10^4}}{\frac{4 \cdot 10^5}{3}} = \frac{3 \cdot 400}{4 \cdot 10^5} = \frac{3 \cdot 10^2}{10^5} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

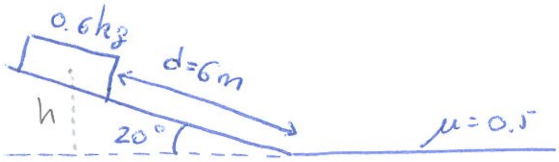
$$\underline{t = 0.003 \text{ s}}$$

Problema 7.-1 Un bloque de 0.6 kg se desliza 6 m por un plano inclinado liso que forma un ángulo de 20° con la horizontal. Después sigue por un plano horizontal rugoso, siendo el coeficiente de rozamiento de 0,5.

a) ¿Cuál es la velocidad del cuerpo al final del plano inclinado?

b) ¿Cuál es la velocidad del cuerpo después de recorrer 1 m sobre el plano horizontal?

c) ¿Qué distancia recorrerá antes de detenerse?



a) Para calcular la velocidad del cuerpo al final del plano inclinado podemos aplicar la ley de conservación de la energía mecánica (en este tramo no hay rozamiento).

La energía inicial es enteramente potencial. Tomando el cero de energías en la base:

$$E_{mec}^{ini} = U^{ini} = mgh = mg \cdot d \cdot \text{sen}\, 20°$$

Al pie del plano inclinado, toda la energía es cinética:

$$E_{mec}^{base} = K^{base} = \frac{1}{2} m \cdot v_{base}^2$$

Como la energía mecánica se conserva en esta parte del recorrido (sin rozamiento):

$$\cancel{m} g d \,\text{sen}\, 20° = \frac{1}{2} \cancel{m} \cdot v_{base}^2$$

$$v_{base} = \sqrt{2 g d \,\text{sen}\, 20°} = 6{,}34 \text{ m/s}$$

b) Cuando se llega a la base y comienza el rozamiento, parte de la energía se disipa. La fuerza de rozamiento realiza un trabajo

$$W_{roz} = -f_r \cdot \Delta x = -\mu \cdot N \cdot \Delta x = -\mu m g \Delta x$$

$$\Delta K = W_{roz}$$

Si $\Delta x = 1\,m$, entonces

$$\boxed{W_{roz} = -0.5 \cdot 0.6 \cdot 9.80 \cdot 1 \ J = -2.94 \ J}$$

En ese momento, tras recorrer 1 m, la energía cinética del bloque vale.

$$K_{(1m)} = K^{inicial} + W_{roz}$$

$$\frac{1}{2} m v^2_{(1m)} = \frac{1}{2} m v^2_{inicial} + W_{roz}$$

$$\boxed{v_{(1m)} = \sqrt{v^2_{inicial} + \frac{2W_{roz}}{m}} = 5,51 \ m/s}$$

c) Para que el objeto se detenga, toda la energía cinética tiene que haberse disipado:

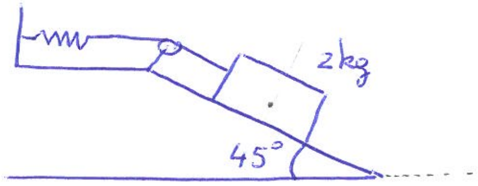
$$\Delta K = \underset{\uparrow}{0} - K_{inicial} = -\mu m g \cdot \Delta x$$

En el instante final no hay energía cinética

$$\Delta x = \frac{K_{inicial}}{\mu m g} = \frac{\frac{1}{2} \cancel{m} v^2_{inicial}}{\mu \cancel{m} g} = \frac{v^2_{inicial}}{2 g \mu}$$

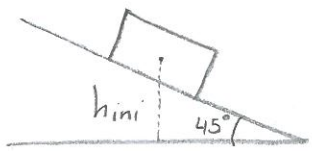
$$\boxed{\Delta x = 4,102 \ m}$$

Problema 8.- Un bloque de 2 kg situado sobre un plano inclinado áspero se conecta a un resorte ligero que tiene una constante $k = 100$ N/m. El bloque se libera a partir del reposo cuando el resorte no está estirado y la polea carece de fricción. El bloque se mueve 20 cm hacia abajo antes de quedar en reposo. Hallar el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano.



- Calculamos la energía mecánica del sistema en la situación inicial.

  - Como el muelle no está inicialmente estirado, la energía elástica es nula
  - El muelle carece de masa, luego su energía cinética es nula
  - El bloque parte del reposo, luego su energía cinética también se anula
  - Tomando como origen de energía potencial el suelo, la energía potencial gravitatoria será mgh_{ini}



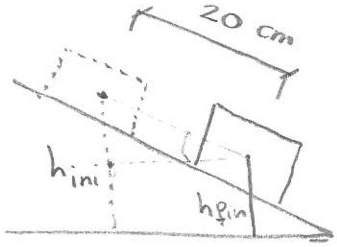
luego:

$$E_{mec}^{ini} = mgh_{ini}$$

- En la situación final tampoco hay energía cinética, pero el muelle se estira 20 cm, por lo que hay una energía potencial elástica:

$$E_{pot\ elástica} = \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

· Al bajar 20 cm, la altura del objeto también disminuye.



$$\Delta h = h_{ini} - h_{fin}$$

$$\text{sen } 45 = \frac{\Delta h}{0.2}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta h = 0.2 \cdot \text{sen } 45^\circ$$

La energía potencial gravitatoria en la situación final vale

$$E_{pot\ gra} = mgh_{fin}$$

Luego la energía mecánica del sistema en la situación final vale:

$$E_{mec}^{final} = \frac{1}{2} k \Delta x^2 + mgh_{fin}$$

La variación en la energía mecánica es el trabajo disipado por la fuerza de rozamiento:

$$\Delta E_{mec} = E_{mec}^{final} - E_{mec}^{inicial} = \frac{1}{2} k \Delta x^2 + mgh_{fin} - mgh_{ini}$$

$$= \frac{1}{2} k \Delta x^2 + mg(h_{fin} - h_{ini})$$

$$= \frac{1}{2} k \Delta x^2 - mg \Delta h$$

$$= \frac{1}{2} k \Delta x^2 - mg(0.2 \text{ sen } 45^\circ)$$

$$= (2 - 2.772) \text{ J} = \underline{-0.772 \text{ J}. = W_{roz}}$$

Por definición de trabajo.

$$W_{roz} = \vec{f}_{roz} \cdot \Delta \vec{r} = f_{roz} \cdot \Delta r \cdot \cos 180^\circ = -f_r \cdot \Delta r$$

En este caso Δr es 20 cm a lo largo de la rampa.

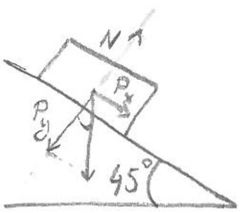
$$-f_r \cdot (0.2) = -0.772 \text{ J}$$

$$\Downarrow$$

$$f_r = \frac{0.772 \text{ J}}{0.2 \text{ m}} = 3.859 \text{ N}$$

Pero el módulo de la fuerza de rozamiento se puede calcular como.

$$f_r = \mu \cdot N$$



Como la aceleración en la dirección perpendicular al plano es nula,

$$N = P_y = mg \cdot \text{sen } 45 = 1.386 \text{ N}$$

Luego $\boxed{\mu = \frac{f_r}{N} = \frac{3.859 \text{ N}}{1.386 \text{ N}} = 0.278}$

9.- La energía potencial de una partícula en cierto campo de fuerzas centrales se expresa $U = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$, donde a y b son constants positivas y r es la distancia al centro de fuerzas.

a) El valor de r_0 correspondiente a la posición de equilibrio de la partícula, y razonar si corresponde a un equilibrio estable o inestable.

$$U = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$$

En la posición de equilibrio la energía potencial será mínima.

$$\frac{dU}{dr} = 0$$

$$\frac{dU}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}\right) = \frac{d}{dr}\left(ar^{-2} - b \cdot r^{-1}\right)$$

$$= (-2)\, ar^{-3} - (-1) \cdot b\, r^{-2}$$

$$= -\frac{2a}{r^3} + \frac{b}{r^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{2a}{r_0} + b = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2a}{r_0} = b \Rightarrow \quad \underline{\underline{r_0 = \frac{2a}{b}}}$$

Para saber si es un punto de equilibrio estable ó inestable tenemos que saber si éste punto corresponde con un máximo ó un mínimo local del potencial.

$$\frac{d^2U}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left(-\frac{2a}{r^3} + \frac{b}{r^2}\right) = \frac{d}{dr}\left(-2ar^{-3} + br^{-2}\right)$$

$$= 6ar^{-4} - 2br^{-3} = \frac{6a}{r^4} - \frac{2b}{r^3}$$

Evaluando la derivada segunda en r_0:

a y b son positivas

$$\frac{6a}{r_0^4} - \frac{2b}{r_0^3} = \frac{6a}{\frac{16a^4}{b^4}} - \frac{2b}{\frac{8a^3}{b^3}} = \frac{3b^4}{8a^3} - \frac{2b^4}{8a^3} = \frac{b^4}{8a^3} > 0$$

$\Downarrow$

r_0 es un mínimo local $\Rightarrow$ ESTABLE

b) El valor máximo de la fuerza de atracción:

La fuerza de atracción vale:

$$F = -\frac{du}{dr} = -\left(-\frac{2a}{r^3} + \frac{b}{r^2}\right) = \frac{2a}{r^3} - \frac{b}{r^2}$$

Para calcular el punto en el cual la fuerza de atracción es máxima:

$$\frac{dF}{dr} = 0$$

$$\frac{dF}{dr} = \frac{d}{dr}\left(2a\,r^{-3} - b\,r^{-2}\right) = -6a\,r^{-4} + 2b\,r^{-3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{6a}{r_0^4} + \frac{2b}{r_0^3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{6a}{r_0} + 2b = 0 \quad ;; \quad -\frac{3a}{r_0} + b = 0$$

$$\frac{3a}{r_0} = b \quad ;; \quad r_0 = \frac{3a}{b}$$

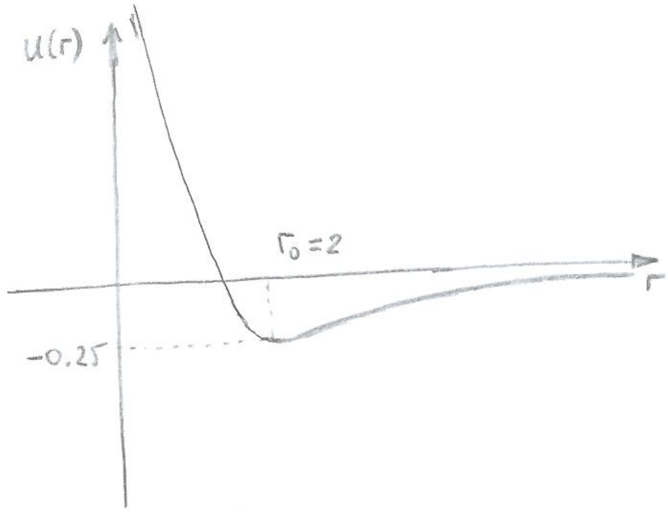
En este punto, la fuerza vale:

$$F = \frac{2a}{\left(\frac{3a}{b}\right)^3} - \frac{b}{\left(\frac{3a}{b}\right)^2} = \frac{2a}{\frac{27a^3}{b^3}} - \frac{b}{\frac{9a^2}{b^2}}$$

$$= \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{1b^3}{9a^2} = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{3b^3}{27a^2} = -\frac{b^3}{27a^2}$$

c) Representar gráficamente $U(r)$ y $F(r)$ y discutir los posibles movimientos de la partícula en ese campo

Tomemos $a=1$ y $b=1$ para la representación gráfica:



$$U(r) = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}$$

$r_0 = 2$ $\quad U(r_0) = -0.25$

$$F(r) = \frac{2}{r^3} - \frac{1}{r^2}$$

$r_0 = 3$ $\quad F(r_0) = -\frac{1}{27}$

Problema 10.- Tres esferas idénticas A, B y C están en línea recta sobre un plano horizontal: se lanza A contra B con una velocidad de 40 m/s. Determinar la velocidad de las tres esferas después de chocar A con B, luego B con C y después A con B por segunda vez. El coeficiente de restitución es de 0.5. ¿Habrá más choques?

Choque 1: A choca con B

Velocidades iniciales	Velocidades finales
$v_A = 40$ m/s	v'_A ?
$v_B = 0$	v'_B ?

$m_A = m_B$

Tenemos dos incógnitas, que pueden conocerse a partir de las dos condiciones:

① Conservación del momento lineal:

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$$

② Coeficiente de restitución:

$$e = -\frac{v'_B - v'_A}{v_B - v_A}$$

En nuestro problema particular:

$$v_A = v'_A + v'_B \qquad\qquad v_A = v'_B + v'_A$$

$$e = -\frac{v'_B - v'_A}{-v_A} = \frac{v'_B - v'_A}{v_A} \implies v_A \cdot e = v'_B - v'_A$$

$$(1+e)\, v_A = 2 v'_B$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{v'_A}} = v_A - v'_B = \underline{\underline{10 \text{ m/s}}} \quad \Leftarrow \quad \underline{\underline{v'_B}} = \frac{(1+e) v_A}{2} = \frac{1.5 \cdot 40}{2} = \underline{\underline{30 \text{ m/s}}}$$

Choque 2: B choca contra C

Veloc. Iniciales	Veloc. Finales
$v'_B = 30\ m/s$	v''_B
$v'_C = 0\ m/s$	v''_C

$m_B = m_C$

$$m_B v'_B + m_C v'_C = m_B v''_B + m_C v''_C \Rightarrow v'_B + v'_C = v''_B + v''_C$$

$$e = -\frac{v''_C - v''_B}{v'_C - v'_B}$$

En nuestro problema particular:

$$v'_B = v''_B + v''_C \qquad\qquad v'_B = v''_C + v''_B$$

$$e = \frac{v''_C - v''_B}{v'_B} \Rightarrow \qquad v'_B\, e = v''_C - v''_B$$

$$(1+e)\, v'_B = 2 v''_C$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{v''_C}} = \frac{(1+e)\, v'_B}{2} = \frac{1.5 \cdot 30}{2} = \underline{\underline{22.5\ m/s}}$$

$$v''_B = v'_B - v''_C = 30 - 22.5 = 7.5\ m/s$$

Choque 3: A choca contra B por segunda vez

Velocidades iniciales	Velocidades finales.
$v''_A = 10\ m/s$	$v'''_A = ?$
$v''_B = 7.5\ m/s$	$v'''_B = ?$

$$m_A v''_A + m_B v''_B = m_A v'''_A + m_B v'''_B \Longrightarrow v''_A + v''_B = v'''_A + v'''_B$$

$$e = -\frac{v'''_B - v'''_A}{v''_B - v''_A}$$

En nuestro problema particular:

$$v''_A + v''_B = v'''_B + v'''_A$$
$$(v''_A - v''_B) \cdot e = v'''_B - v'''_A$$

$$(v''_A + v''_B) + (v''_A - v''_B) \cdot e = 2v'''_B$$

$$v'''_B = \frac{1}{2}\left[(v''_A + v''_B) + (v''_A - v''_B) \cdot e\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[17.5 + 2.5 \cdot 0.5\right] m/s$$

$$= 9.375\ m/s$$

$$\Rightarrow v'''_A = v''_A + v''_B - v'''_B = (17.5 - 9.375)\ m/s = 8.125\ m/s$$

No habrá más choques.

Y por lo tanto v_1^f toma el valor:

$$v_1^f = v_1^i - \frac{m_2}{\cancel{m_1}} \frac{\cancel{m_1}(1+e)}{m_1+m_2} v_1^i$$

$$= \left(1 - \frac{m_2(1+e)}{m_1+m_2}\right) v_1^i$$

$$= \frac{m_1 + \cancel{m_2} - \cancel{m_2} - m_2 e}{m_1+m_2} v_1^i$$

$$= \frac{m_1 - m_2 e}{m_1+m_2} v_1^i$$

$$\boxed{v_1^f = -\left(\frac{m_1 - m_2 e}{m_1+m_2}\right)\sqrt{2gd}}$$

- - - - - - - -

Justo después del choque, toda la energía de las dos partículas es energía cinética. De nuevo por conservación de la energía podemos calcular cuál será la altura máxima que alcanzarán (en ese punto la velocidad se anula):

$$\cancel{m}g\, d_{max} = \frac{1}{2}\cancel{m}\cdot v^2 \Rightarrow d_{max} = \frac{v^2}{2g}$$

Así, para la partícula 2 después del choque:

$$d_{max,2} = \frac{(v_2^f)^2}{2g} = \frac{m_1^2(1+e)^2}{(m_1+m_2)^2}\cdot(\cancel{2g}d)\cdot\frac{1}{\cancel{2g}} = \frac{m_1^2(1+e)^2}{(m_1+m_2)^2}\cdot d$$

$$d_{max,1} = \frac{(v_1^f)^2}{2g} = \frac{(m_1 - m_2 e)^2}{(m_1+m_2)^2}\cdot d$$

b) Sustituyendo los datos del problema:

$m_1 = 0.1$

$m_2 = 0.2$

$d = 0.2$

- Si choque perfectamente elástico, $e = 1$

$$\boxed{d_{max,2}} = \frac{(0.1)^2 \cdot 2^2}{(0.3)^2} \times 0.2 = \frac{0.04}{0.09} \times 0.2 = 0.0888 m = \boxed{8.8 \text{ cm}}$$

$$\boxed{d_{max,1}} = \frac{(0.1 - 0.2)^2}{(0.3)^2} \times 0.2 = \frac{0.01}{0.09} \times 0.2 = 0.0222 m = \boxed{2.2 \text{ cm}}$$

- Si choque perfectamente inelástico, $e = 0$

$$\boxed{d_{max,2} = \frac{(0.1)^2}{(0.3)^2} \times 0.2 = 2.22 \text{ cm}}$$

$$\boxed{d_{max,1} = \frac{(0.1)^2}{(0.3)^2} \times 0.2 = 2.22 \text{ cm}}$$

- Si choque es parcialmente elástico con $e = 0.9$

$$\boxed{d_{max,2} = 7{,}96 \text{ cm}}$$

$$\boxed{d_{max,1} = 1{,}43 \text{ cm}}$$

c) El apartado c se realiza de manera análoga al anterior, pero intercambiando el papel que juegan las masas.

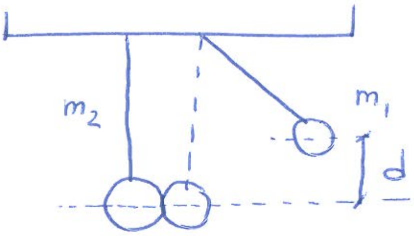
Problema 11-1 En el esquema adjunto, si se suelta m_1 desde la distancia d y choca con m_2 con coeficiente de restitución e calcular:

a) Las alturas alcanzadas después del choque por cada una de las masas, en función de m_1, m_2, e y d.

b) Si $m_1 = 0.1$ kg, $m_2 = 0.2$ kg y $d = 0.2$ m calcular las alturas de las dos masas después del choque si éste es:

- perfectamente elástico.
- perfectamente inelástico
- parcialmente elástico con $e = 0.9$

c) Resolver el apartado anterior también para el caso en que la masa m_2 es elevada y soltada contra la masa m_1.



a) Podemos calcular la velocidad con la que la partícula 1 llega a contactar con la partícula 2 aplicando el principio de conservación de la energía.

Inicialmente, toda su energía es potencial gravitatoria. Tomando como origen de energías potenciales la posición inicial de la partícula 2 (línea discontinua larga en el dibujo) esta vale:

$$U_p^1 = mg \cdot d$$

Cuando la partícula 1 contacta con la 2, toda la energía es cinética:

$$K = \frac{1}{2} m v_1^2$$

Igualando las dos expresiones $\cancel{m} g \cdot d = \frac{1}{2} \cancel{m} v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gd}$

En el momento en el que la partícula 1 contacta con la 2 se produce un choque:

$V_2^{inicial} = 0 \quad V_1^{inicial} = -\sqrt{2gd}$

El signo menos se debe a que la partícula 1 se mueve hacia la izquierda

Podemos calcular las velocidades finales de las dos partículas a través de:

① Conservación de la cantidad de movimiento.

$$m_1 \cdot V_1^{inicial} + m_2 \cancel{V_2^{inicial}} = m_1 V_1^{final} + m_2 V_2^{final} \qquad (1)$$

(la partícula 2 está inicialmente en reposo)

② El coeficiente de restitución:

$$e = -\frac{v_2^{final} - v_1^{final}}{\cancel{v_2^{inicial}} - v_1^{inicial}} = \frac{v_2^f - v_1^f}{v_1^i} \qquad (2)$$

De la ecuación (1):

$$v_1^f = \frac{m_1 v_1^i - m_2 v_2^f}{m_1} = v_1^i - \frac{m_2}{m_1} v_2^f$$

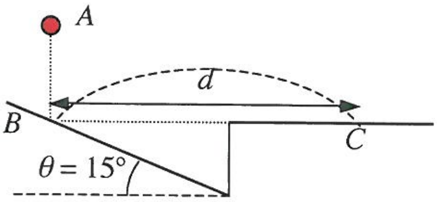
Sustituyendo en (2):

$$v_2^f = e v_1^i + v_1^f = e v_1^i + v_1^i - \frac{m_2}{m_1} v_2^f$$

$$\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) v_2^f = (1+e)\, v_1^i$$

$$\boxed{v_2^f = \frac{m_1 (1+e)}{m_1 + m_2} v_1^i = -\frac{m_1 (1+e)}{m_1 + m_2} \sqrt{2gd}}$$

Una bola de acero A cae desde una altura h = 1.2m para chocar con una placa B también de acero y rebotar al punto C. Sabiendo que el coeficiente de restitución es $e = 0.8$, calcular la distancia d.



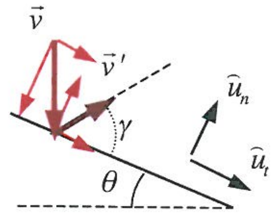
Solución: I.T.I. 01, 02, 04, 05, I.T.T. 01, 04

Primeramente aplicaremos el principio de conservación de la energía para calcular el módulo de la velocidad con la que la bola impacta con la placa B (tomamos el nivel nulo de energía potencial gravitatoria a la altura del impacto):

$$\left.\begin{array}{l} E_{inicial} = mgh \\ \\ E_{final} = \dfrac{1}{2}mv^2 \end{array}\right\} \qquad E_{inicial} = E_{final} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}$$

En el choque la componente tangencial de la velocidad permanece constante:

$$v'_t = v_t = \sqrt{2gh}\,\mathrm{sen}\theta$$



Para la componente normal utilizamos la expresión del coeficiente de restitución:

$$e = -\frac{v'_n}{v_n} \quad \Rightarrow \quad v'_n = -e\,v_n = e\sqrt{2gh}\cos\theta$$

El módulo de la velocidad a la salida del choque será:

$$v' = \sqrt{v_t'^2 + v_n'^2} = \sqrt{2gh}\sqrt{\mathrm{sen}^2\theta + e^2\cos^2\theta} = 3.95\,\mathrm{m/s}$$

El ángulo γ que forma dicha velocidad con el plano inclinado será:

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{v'_n}{v'_t} = e\,\mathrm{ctg}\theta \quad \Rightarrow \quad \gamma = 71.48°$$

El ángulo β que formará dicha velocidad con la horizontal será: $\beta = \gamma - \theta = 56.48°$

Después del choque la bola realizará un movimiento parabólico con velocidad inicial v' formando un ángulo β con la horizontal. Si tomamos el origen de coordenadas en el punto de impacto, ponemos a cero el cronómetro en el instante del choque, y orientamos los ejes X e Y horizontal y verticalmente, las ecuaciones del movimiento serán:

$$x(t) = v'\cos\beta\, t \qquad y(t) = v'\,\mathrm{sen}\beta\, t - \frac{1}{2}gt^2$$

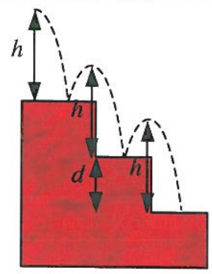
Si la bola golpea en el punto C en el instante $t = t_c$:

$$y(t_c) = 0 \quad \Rightarrow \quad v'\,\text{sen}\beta\, t_c - \frac{1}{2} g t_c^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_c = \frac{2v'\,\text{sen}\beta}{g}$$

La distancia d que nos piden será la coordenada x de la bola en ese instante:

$$d = x(t_c) = v'\cos\beta\, t_c = \frac{2v'^2\cos\beta\,\text{sen}\beta}{g} = \frac{v'^2\,\text{sen}(2\beta)}{g} = \boxed{1.47\,\text{m}}$$

Una bola se deja caer desde una altura h sobre el rellano de una escalera y desciende rebotando como se muestra en la figura. ¿cuál será el valor del coeficiente de restitución e para el cual la pelota rebotará a la misma altura sobre cada escalón?



Solución: I.T.I. 01, I.T.T. 01

Primeramente aplicaremos el principio de conservación de la energía para calcular la velocidad con la que la bola impacta con el escalón superior. Tomando el nivel nulo de energía potencial gravitatoria a la altura del impacto, los ejes X e Y horizontal y vertical respectivamente, y teniendo en cuenta que la componente x de la velocidad no cambia en el movimiento parabólico de la bola:

$$\left.\begin{array}{l} E_{inicial} = mgh + \frac{1}{2} m v_x^2 \\ \\ E_{final} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\left(v_x^2 + v_y^2\right) \end{array}\right\} \qquad E_{inicial} = E_{final} \quad \Rightarrow \quad v_y = -\sqrt{2gh}$$

La componente x de la velocidad no cambia en el choque. Para hallar la componente y aplicamos la ecuación del coeficiente de restitución:

$$e = -\frac{v_y'}{v_y} \quad \Rightarrow \quad v_y' = -e\, v_y = e\sqrt{2gh}$$

Aplicando de nuevo el principio de la energía para calcular la altura h' hasta la que rebota: