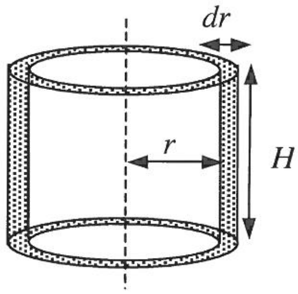
Problema 1: Calcular el momento de inercia con respecto a su eje de simetría de un cilindro homogéneo hueco de radio interior a y radio exterior b. Expresar el resultado en función de la masa del cilindro M, de a y de b.

Solución:



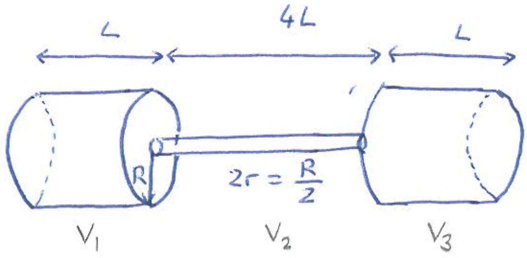
Podemos dividir el cilindro en "corazas" cilíndricas de radio r y espesor dr. Todos los puntos de esta coraza se encuentran a la misma distancia del eje de giro. Llamando H a la altura del cilindro, su momento de inercia vendrá dado por

$$I = \int r^2\, dm = \int r^2 \rho\, dV = \int_a^b r^2 \rho\, 2\pi r H\, dr = \rho\, 2\pi H \frac{1}{4}\left(b^4 - a^4\right)$$

$$= \left(\frac{M}{\pi\left(b^2 - a^2\right)H}\right) 2\pi H \frac{1}{4}\left(b^4 - a^4\right) = \left(\frac{M}{b^2 - a^2}\right)\frac{\left(b^2 + a^2\right)\left(b^2 - a^2\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} M\left(b^2 + a^2\right).$$

Problema 2.-1 Calcular el I del cuerpo de la figura, con respecto a su eje de simetría. El cuerpo es de densidad constante y su masa total es M.



El volumen del cuerpo es:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$= \pi R^2 L + \pi r^2 (4L) + \pi R^2 L$$

$$= 2\pi R^2 L + 4\pi \frac{R^2}{16} L$$

$r = \frac{R}{4}$

$$= 2\pi R^2 L + \pi R^2 L/4$$

$$= \frac{9\pi R^2 L}{4}$$

Por lo que su densidad vale.

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{4M}{9\pi R^2 L}$$

— o — o — o —

El momento de inercia de la parte 1 del volumen es:

$$I_1 = \frac{1}{2} M_1 \cdot R^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot V_1 R^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4M}{9\cancel{\pi R^2 L}}\right)(\cancel{\pi R^2 L}) R^2 = \frac{2}{9} M R^2$$

Del mismo modo para las partes 2 y 3

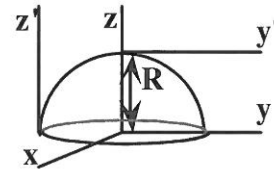
$$I_2 = \frac{1}{2} M_2 r^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4M}{9\pi R^2 L}\right)(\pi r^2 4L) \cdot r^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{4M}{9\cancel{\pi}\cancel{R^2}\cancel{L}} \cdot \cancel{\pi}\,4\cancel{L} \cdot \frac{R^{\cancel{4}\,2}}{256} = \frac{1}{288} M R^2$$

$$I_3 = I_1 = \frac{2}{9} M R^2$$

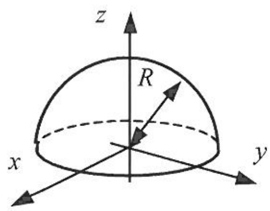
$$\underline{\underline{I}} = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{4}{9} M R^2 + \frac{1}{288} M R^2 = \frac{129}{288} M R^2 = \underline{\underline{\frac{43}{96} M R^2}}$$

Problema 3: Dada la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$. (a) Calcular sus momentos de inercia I_x, I_y e I_z. (b) Calcular el momento de inercia con respecto a los ejes y' y z'.



Solución:

(a) Para una esfera completa tenemos que el momento de inercia respecto de cualquier eje que pase por su centro es:



$$I_{x,esfera} = I_{y,esfera} = I_{z,esfera} = \frac{2}{5} M_{esfera} R^2$$

Cada semiesfera contribuye de igual forma al momento de inercia de la esfera completa, por lo tanto:

$$I_{x,semiesfera} = I_{y,semiesfera} = I_{z,semiesfera} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} M_{esfera} R^2\right) = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2} M_{esfera}\right) R^2 = \boxed{\frac{2}{5} M_{semiesfera} R^2}$$

Es decir la expresión matemática resulta ser la misma, dos quintos de la masa por el radio al cuadrado, pero teniendo en cuenta que ahora la masa de nuestra pieza es la de una semiesfera, no la de la esfera completa.

(b) Calculamos el centro de masas de la semiesfera. Por simetría, las coordenadas x e y del centro de masas serán nulas. Solo queda por calcular la coordenada z,

$$z_{\mathrm{CM}} = \frac{\int z\, dm}{\int dm} = \frac{\rho \int_0^R z\left(\pi x^2\right) dz}{\rho\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)\frac{1}{2}} = \frac{\pi\rho \int_0^R z\left[\left(R^2 - z^2\right)\right] dz}{\rho \frac{2\pi R^3}{3}} = \frac{\frac{1}{4}\pi R^4}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{8} R.$$

Por el teorema de Steiner sabemos que

$$I_{y'} = I_{\mathrm{CM}} + M_{\mathrm{semiesfera}} d_1^2,$$
$$I_y = I_{\mathrm{CM}} + M_{\mathrm{semiesfera}} d_2^2,$$

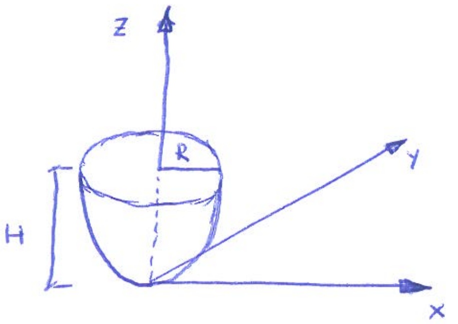
donde d_1 y d_2 son, respectivamente, las distancias entre un eje que pasa por el centro de masas y los ejes y' e y. Como $d_1 = \frac{5}{8} R$, y $d_2 = \frac{3}{8} R$, entonces

$$I_{y'} = I_y + M_{\text{semiesfera}}\left(d_1^2 - d_2^2\right) = \frac{2}{5}M_{\text{semiesfera}}R^2 + M_{\text{semiesfera}}\left(\frac{25}{64} - \frac{9}{64}\right) = \frac{2}{5}M_{\text{semiesfera}}R^2 + \frac{1}{4}M_{\text{semiesfera}}R^2$$

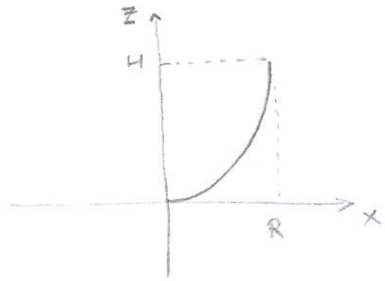
$$= \frac{13}{20}M_{\text{semiesfera}}R^2.$$

(c) Por el teorema de Steiner, $I_{z'} = I_{\text{CM}} + M_{\text{semiesfera}}R^2 = I_z + M_{\text{semiesfera}}R^2 = \frac{7}{5}M_{\text{semiesfera}}R^2$.

Problema 4.- Calcular el momento de inercia de un paraboloide de revolución de altura H y radio de la base R.



Si el paraboloide es de revolución podemos conocer la ecuación de la línea generatriz.



$$z(x) = k\,x^2 \;/\; z(R) = H$$

$$\Downarrow$$

$$H = k \cdot R^2$$

$$\Downarrow$$

$$k = \frac{H}{R^2}$$

$$\Downarrow$$

$$z(x) = \frac{H}{R^2}\,x^2$$

Dividimos el paraboloide en discos de radio x y de espesor dz.

El volumen de cada uno de los discos vale:

$$dV = \pi x^2 dz = \pi \left(\frac{R^2}{H} z\right) dz$$

Y el volumen total del paraboloide

$$V = \int dV = \int_0^H \pi \left(\frac{R^2}{H} z\right) dz = \frac{\pi R^2}{H} \left.\frac{z^2}{2}\right]_0^H = \frac{\pi R^2 H}{2}$$

La densidad del paraboloide vale:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{2M}{\pi R^2 H}$$

Y la masa de cada pequeño disco

$$dm = \rho \cdot dV = \cancel{\pi} \frac{\cancel{R^2}}{H} z\, dz \cdot \frac{2M}{\cancel{\pi} \cancel{R^2} H} = \frac{2M z\, dz}{H^2}$$

El momento de inercia de cada uno de los discos elementales es

$$\frac{1}{2}\, x^2\, dm$$

El momento de inercia del paraboloide es la suma de los momentos de inercia de todos los discos elementales:

$$I_z = \int \frac{1}{2}\, x^2\, dm = \frac{1}{2}\, \frac{2M}{H^2} \int_{z=0}^{z=H} x^2\, z\, dz = \frac{M}{H^2} \int_0^H \frac{R^2}{H}\, z \cdot z\, dz$$

$$= \frac{R^2 M}{H^3} \int_0^H z^2\, dz = \frac{R^2 M}{H^3} \left. \frac{z^3}{3} \right]_0^H = \frac{1}{3} M R^2$$

Problema 5-1 Un estudiante se encuentra sentado sobre un taburete que puede girar sobre su eje vertical, y mantiene en sus manos ~~sobre~~, en posición vertical, el eje de una rueda de bicicleta. El momento de inercia de la rueda con respecto a su eje es de 0,21 kgm^2, y el momento de inercia del estudiante mas la rueda respecto al taburete es 2,8 kgm^2. La velocidad angular inicial de la rueda alrededor de su eje es de 61 rad/s $\vec{k}$, mientras que la velocidad inicial del estudiante alrededor del taburete es cero. En un instante dado, el estudiante gira 180° el eje de la rueda, de forma que su velocidad angular pasa a ser -61 rad/s $\vec{k}$. Calcular la velocidad angular que adquiere el estudiante alrededor del eje del taburete. Calcular el trabajo realizado por el estudiante. Despreciar el rozamiento.

Como el taburete rota sin rozamiento, no hay momento de fuerza externo sobre el sistema taburete-estudiante-rueda. Por tanto el momento angular de dicho sistema se conserva

$$\vec{L}_{inicial} = I_{rueda} \cdot \vec{\omega}^{\,i}_{rueda} + I_{estudiante} \cdot \vec{\omega}^{\,i}_{estudiante} \underset{\underset{\omega^i_{estudiante}=0}{\uparrow}}{=} I_{rueda} \cdot \vec{\omega}^{\,i}_{rueda}$$

Como ω^i_{rueda} solo tiene componente a lo largo del eje z, $\vec{L}$ solo tendrá componente a lo largo de dicho eje. Y como $\vec{L}$ se conserva, solo tendrá componente a lo largo de $\vec{k}$ en todo instante. Por ello prescindiremos de los vectores a partir de ahora

$$L_{final} = I_{rueda} \cdot \omega^f_{rueda} + I_{estudiante}\, \omega^f_{estudiante}$$

Como el momento angular se conserva.

$$L_{inicial} = L_{final}$$

$$\Downarrow$$

$$I_{rueda}\, \omega^i_{rueda} = I_{rueda}\, \omega^f_{rueda} + I_{estudiante}\, \omega^f_{estudiante}$$

$$\omega^{f}_{estudiante} = \frac{I_{rueda}}{I_{estudiante}} \cdot \left(\omega^{i}_{rueda} - \omega^{f}_{rueda} \right)$$

$$\omega^{f}_{estudiante} = \frac{0{,}21 \ kgm^2}{2{,}8 \ kgm^2} \cdot \left(61 \ rad/s \ \vec{k} - \left(-61 \ rad/s \ \vec{k} \right) \right)$$

$$= 9.15 \ rad/s$$

(b) Podemos calcular el trabajo realizado sobre el estudiante por el teorema de las fuerzas vivas para rotaciones:

$$W = \Delta K_R = \frac{1}{2} I_{estudiante} \, \omega^{f\,2}_{estudiante} - \frac{1}{2} I_{estudiante} \, \omega^{i\,2}_{estudiante}$$

$$= \frac{1}{2} I_{estudiante} \, \omega^{f\,2}_{estudiante}$$

$$= \frac{1}{2} \ 2{,}8 \ kgm^2 \cdot \left(9{,}15 \ rad/s \right)^2$$

$$= 117{,}21 \ J$$

Problema 8.-1 Un disco está girando libremente a 1800 rev/min alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Un segundo disco, montado en el mismo eje que el anterior, está inicialmente en reposo. El momento de inercia del segundo disco es doble que el primero. Se deja caer el segundo disco sobre el primero y finalmente los dos giran juntos a la misma velocidad. Calcular la velocidad común y la energía perdida en el acoplamiento.

(a) Como no hay fuerzas externas al sistema formado por los dos discos, el momento angular total del sistema antes y después del acoplamiento tiene que ser el mismo:

ANTES.

$$L_{total}^{antes} = I_{disco\,1}\,\omega_{disco\,1}^{antes} + I_{disco\,2}\,\underbrace{\cancel{\omega_{disco\,2}^{antes}}}_{0}$$

$$= I_{disco\,1}\cdot\omega_{disco\,1}^{antes}$$

DESPUES

$$L_{total}^{después} = I_{disco\,1}\cdot\omega_{disco\,1+2} + I_{disco\,2}\cdot\omega_{disco\,1+2}$$

Por lo que

$$I_{disco\,1}\cdot\omega_{disco\,1}^{antes} = I_{disco\,1}\cdot\omega_{disco\,1+2} + I_{disco\,2}\,\omega_{disco\,1+2}$$

$$= \left(I_{disco\,1} + 2\,I_{disco\,1}\right)\omega_{disco\,1+2}$$

$$\omega_{disco\,1+2} = \frac{I_{disco\,1}}{3\,I_{disco\,1}}\cdot\omega_{disco\,1}^{antes} = \frac{1}{3}\cdot 1800\cdot\frac{2\pi}{60}\ \mathrm{rad/s} = 20\pi\ \mathrm{rad/s}$$

(b) La energía perdida en el choque será la variación de la energía cinética de rotación:

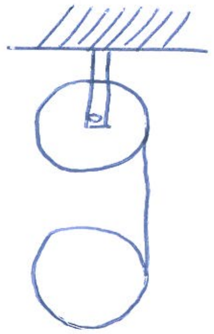
$$\Delta K = K_R^{final} - K_R^{inicial} = \frac{1}{2}\left(I_{disco1} + I_{disco\,2}\right)\omega_{disco\,1+2}^{2} - \frac{1}{2}\,I_{disco\,1}\,\omega_{disco\,1}^{antes\,2}$$

$$= \frac{3}{2}\,I_{disco\,1}\left(\frac{\cancel{I_{disco\,1}^{2}}}{9\,\cancel{I_{disco\,1}^{2}}}\cdot\omega_{disco\,1}^{antes\,2}\right) - \frac{1}{2}\,I_{disco\,1}\cdot\omega_{disco\,1}^{antes\,2}$$

$\Rightarrow$ Se pierden $\frac{2}{3}$ de la energía inicial.

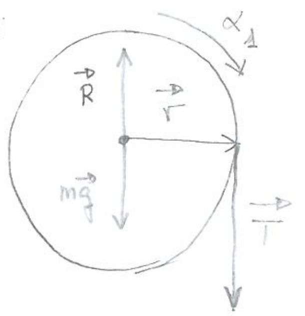
$$= \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) I_{disco\,1}\,\omega_{disco\,1}^{antes\,2} = \frac{1-3}{6}\,I_{disco1}\,\omega_{disco1}^{antes\,2} = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}I\cdot\omega^{2}\right.$$

Problema 9-1 Los discos de la figura tienen su masa (m) y su radio (r) son iguales. El disco de la parte superior puede girar libremente alrededor de un eje perpendicular al plano del papel que pasa por su centro. Una cuerda está enrollada alrededor de ambos discos y se permite al disco de abajo que caiga. (a) ¿Cuál es el sentido de giro de los discos? Razónalo. Hallar en función de $m, r, y\ g$ (b) la tensión de la cuerda. (c) La aceleración angular de cada disco respecto al centro de masas. (d) La aceleración del centro del disco inferior. (e) Si parte del reposo, qué espacio recorrerá el centro del disco inferior.



(a) Dibujamos el diagrama de cuerpo aislado para los dos discos:

disco 1.

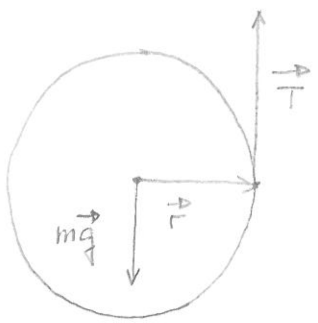


El disco 1 solo rota.

El momento neto que actúa sobre el disco, debido a la tensión de la cuerda, apunta hacia dentro del papel (sentido negativo), luego la aceleración angular también tendrá signo negativo y por lo tanto el disco rotará en el sentido horario.

$$-T \cdot r = I \cdot \alpha_1 \qquad (1)$$

disco 2.



El disco 2 sufre un movimiento de traslación de su centro de masas y un movimiento de rotación en torno al centro de masas.

El momento neto que actúa sobre el disco sale del plano del papel (sentido positivo) luego la aceleración angular también tendrá signo positivo y el disco rotará en sentido antihorario.

Notad como en los dos casos el momento debido al peso es nulo, ya que el brazo del peso con respecto a un eje que pasa por el centro del disco se anula

$$Tr = I\alpha_2 \qquad (2)$$

$$T - mg = m \cdot a \qquad (3)$$

Como la tensión, el radio y el momento de inercia de los dos discos es el mismo, y atendiendo a las ecuaciones (1) y (2) llegamos a la condición

$$\alpha_1 = -\alpha_2$$

es decir, tienen el mismo módulo pero sentido opuesto. Llamaremos al módulo α

— o — o —

(5) Por otra parte la cuerda desciende con una aceleración $a_c = r \cdot \alpha$, y el disco 2 se mueve con respecto a la cuerda con otra aceleración $a_{r.c.} = r \cdot \alpha$. Por lo tanto, el disco 2 desciende con una aceleración total $a = a_c + a_{r.c} = 2\alpha r$. Como la aceleración apunta hacia abajo, tendrá signo negativo.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, las ecuaciones (2) y (3) se transforman en

(2) $\quad T - mg = ma \quad \Rightarrow \quad T - mg = -m \cdot 2\alpha r \quad \Rightarrow \quad mg = T + 2m\alpha r$

(3) $\quad T \cdot r = I\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{T \cdot r}{I}$

$$mg = T + 2m\alpha r = T + 2m\,\frac{Tr}{I}\cdot r = T + T\,\frac{2mr^2}{I}$$

Como $\quad I = \frac{1}{2} m r^2$

$$mg = T + T\,\frac{2\cancel{m}\cancel{r^2}}{\frac{1}{2}\cancel{m}\cancel{r^2}} = T + 4T = 5T$$

Luego $\boxed{T = \dfrac{mg}{5}}$

(c) $\quad \alpha = \dfrac{Tr}{I} = \dfrac{\frac{\cancel{m}g}{5}\,\cancel{r}}{\frac{1}{2}\cancel{m}\,\cancel{r^2}} = \dfrac{2}{5}\,\dfrac{g}{r}$

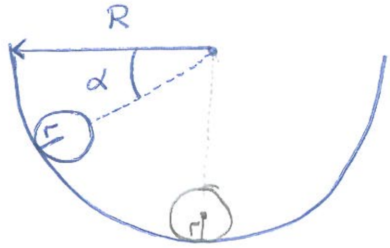
(d)

$$a = 2\alpha r = \frac{4}{5} g$$

(e) el espacio recorrido vendrá dado por: (recordad que la aceleración apunta hacia abajo, luego el disco 2 desciende y el espacio tiene signo negativo)

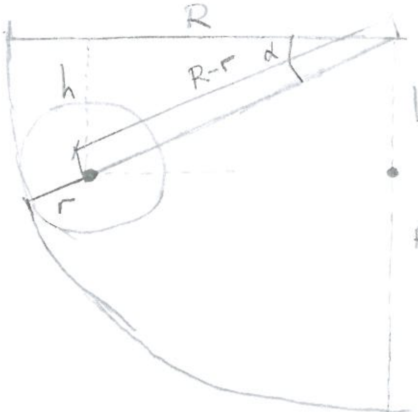
$$e = \cancel{v_0 t} + \frac{1}{2} a t^2 = -\frac{1}{2}\,\frac{4}{5}\,g\,t^2 = -\frac{2}{5}\,g\,(1)^2 = -3{,}92 \text{ m}$$

Problema 11.- Se coloca una esfera sólida uniforme de radio r sobre la superficie interior de un tazón semiesférico de radio R. La esfera se libera desde el reposo formando un ángulo α con la horizontal y rueda sin resbalar. Determinar la velocidad angular de la rueda al llegar al fondo del tazón



Si no hay rozamiento, la energía mecánica del sistema se conserva. A la hora de calcular la energía en una configuración dada, tenemos que sumar la energía cinética traslacional, rotacional y la energía potencial gravitatoria calculada tomando la altura del centro de masas.

En la configuración inicial no hay energía cinética y el c.d.m. se encuentra a una altura con respecto al fondo del tazón de:



$$h = (R-r)\cdot \operatorname{sen}\alpha$$

luego la altura con respecto al fondo del tazón es:

$$R-h = R-(R-r)\cdot \operatorname{sen}\alpha$$
$$= R\,(1-\operatorname{sen}\alpha)+r\operatorname{sen}\alpha$$

$$E_{mec}^{ini} = mg\,(R-h) = mgR\,(1-\operatorname{sen}\alpha)+mgr\operatorname{sen}\alpha$$

En la configuración final habrá energía cinética de traslación del c.d.m., de rotación en torno al c.d.m. y potencial gravitatoria (el c.d.m. estará a una altura r del punto más bajo. Luego:

$$E_{mec}^{final} = mgr + \frac{1}{2} m v_{c.m.}^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

Como $v_{c.m.} = \omega \cdot r$

$$E_{mec}^{final} = mgr + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

El momento de inercia de una esfera es $I = \frac{2}{5} m r^2$

$$E_{mec.}^{final} = mgr + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} m \omega^2 r^2$$

$$= mgr + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + \frac{1}{5} m \omega^2 r^2$$

$$= mgr + \frac{7}{10} m \omega^2 r^2$$

Como la energía mecánica se conserva

$$\cancel{m} g R (1 - \operatorname{sen}\alpha) + \cancel{m} g r \operatorname{sen}\alpha = \cancel{m} g r + \frac{7}{10} \cancel{m} \omega^2 r^2$$

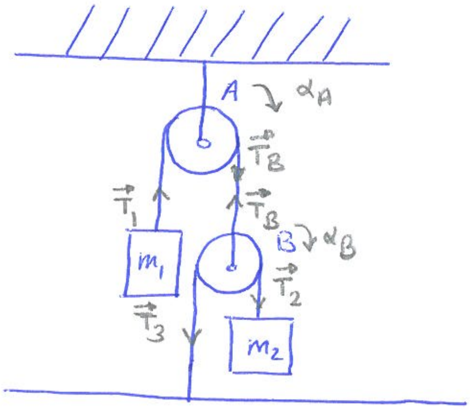
$$g R (1 - \operatorname{sen}\alpha) - g r (1 - \operatorname{sen}\alpha) = \frac{7}{10} \omega^2 r^2$$

$$g (R - r)(1 - \operatorname{sen}\alpha) = \frac{7}{10} \omega^2 r^2$$

$$\Downarrow$$

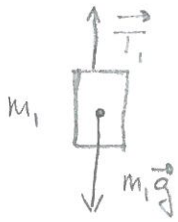
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{10 g (R - r)(1 - \operatorname{sen}\alpha)}{7 r^2}}}$$

Problema 15.-] En el sistema de la figura, determinar las aceleraciones de los cuerpos y las tensiones de las cuerdas, considerando las poleas como cilindros uniformes de masa m_A y m_B. Resolver para $m_1 = 10$ kg, $m_2 = 8$ kg, $m_A = 1$ kg, $m_B = 2$ kg.



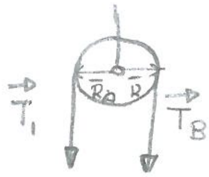
Dibujamos los diagramas de cuerpo aislado para los distintos cuerpos del sistema.

- Para el objeto de masa m_1 (tomando dirección positiva del eje y hacia arriba).



$$\sum F_y^1 = T_1 - m_1 g = m_1 \cdot a_1$$

- Para la polea A:



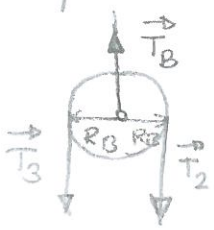
$$\sum \tau_z^A = I_A \alpha_z^A$$

$$+\cancel{R_A} \cdot T_1 \mp \cancel{R_A} T_B = I_A \cdot \alpha^A = \frac{1}{2} m_A \cancel{R_A^2} \cdot \frac{a_1}{\cancel{R}} \Rightarrow T_1 - T_B = -\frac{1}{2} m_A a_1$$

$$I_A = \frac{1}{2} m_A R_A^2$$

En la periferia, la aceleración tangencial de la polea también es a, con lo que la aceleración angular es $\alpha^A = -\frac{a_1}{R_A}$ (el signo menos viene de que el sentido de α^A es el antihorario positivo)

- Para la polea B.



La polea B experimenta un movimiento de traslación del centro de masas y otro de rotación alrededor de un eje perpendicular al plano del papel y que pasa por el centro de masas.

Para el cálculo de la aceleración lineal del c.d.m. aplicamos la 2ª ley de Newton (tomando sentido positivo del eje y hacia abajo).

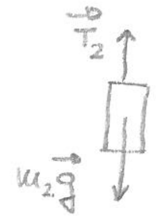
$$\sum F_2^y = T_2 + T_3 - T_B + m_B g = m_B \cdot a_B \Rightarrow T_2 + T_3 + m_B g - T_B = m_B \cdot a_1$$

Hemos aplicado que las cuerdas son inextensibles, por lo tanto lo que sube 1 baja B, $a_1 = a_B$

Para el movimiento de rotación, aplicamos la segunda ley de Newton de las rotaciones: (si tenemos en cuenta que hemos escogido que el eje y crece hacia abajo:

$$-\cancel{R_B}T_3 + \cancel{R_B}T_2 = I_B \cdot \alpha_B = \frac{1}{2} M_B \cancel{R_B}^{2} \cdot \frac{a_1}{\cancel{R_B}} \Rightarrow T_2 - T_3 = \frac{1}{2} m_B \cdot a_1$$

- Para el cuerpo 2.



$$\Sigma F_y^2 = m_2 g - T_2 = m_2 \cdot a_2 \underset{\uparrow}{=} 2 m_2 a_1$$

$$a_2 = 2a_1$$

En resumen, nos queda un sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas: (T_1, T_2, T_3, T_B y a_1)

$$\left.\begin{aligned}
T_1 - m_1 g &= m_1 \cdot a_1 \\
T_B - T_1 &= \frac{1}{2} m_A \cdot a_1 \\
T_2 + T_3 + m_B g - T_B &= m_B \cdot a_1 \\
T_2 - T_3 &= \frac{1}{2} m_B \cdot a_1 \\
m_2 g - T_2 &= 2 m_2 \cdot a_1
\end{aligned}\right\}$$

Sumando las cuatro primeras ecuaciones:

$$2T_2 - m_1 g + m_B g = \left(m_1 + \frac{m_A}{2} + m_B + \frac{m_B}{2}\right) a_1$$

De la 5ª ecuación podemos despejar T_2.

$$T_2 = m_2 g - 2m_2 a_1$$

Sustituyendo en la ecuación anterior

$$2m_2 g - 4m_2 a_1 - m_1 g + m_B g = \left(m_1 + \frac{m_A}{2} + \frac{3m_B}{2}\right) a_1$$

$$a_1 \cdot \left(m_1 + \frac{m_A}{2} + \frac{3m_B}{2} + 4m_2\right) = (2m_2 + m_B - m_1)\, g$$

de donde:

$$\boxed{a_1 = \frac{2m_2 + m_B - m_1}{m_1 + 4m_2 + \frac{m_A}{2} + \frac{3m_B}{2}}\, g}$$

Inmediatamente también conocemos a_2

$$\boxed{a_2 = 2a_1}$$

De la primera de las ecuaciones deducimos T_1:

$$T_1 = m_1 g + m_1 a_1 = m_1 g \cdot \left[1 + \frac{2m_2 + m_B - m_1}{m_1 + 4m_2 + \frac{m_A}{2} + \frac{3m_B}{2}}\right]$$

$$= m_1 \cdot g \left(\frac{6m_2 + \frac{5}{2}m_B + \frac{m_A}{2}}{m_1 + 4m_2 + \frac{m_A}{2} + \frac{3m_B}{2}}\right)$$

Conocidos T_1 y a_1, podemos conocer T_B de la segunda ecuación:

$$T_B = T_1 + \frac{1}{2}m_A \cdot a_1$$

$$T_B = \left(\frac{6m_2 m_1 + \cancel{\frac{m_1 m_A}{2}} + \frac{5}{2}m_B m_1 + \frac{1}{2}m_A 2m_2 + \frac{1}{2}m_A \cdot m_B - \cancel{\frac{1}{2}m_A m_1}}{m_1 + 4m_2 + \frac{m_A}{2} + \frac{3m_B}{2}}\right) g$$

$$= \frac{6m_2 m_1 + \frac{5}{2}m_B m_1 + m_2 m_A + \frac{1}{2}m_A m_B}{m_1 + 4m_2 + \frac{m_A}{2} + \frac{3m_B}{2}}$$

De la quinta ecuación deducimos T_2

$$T_2 = m_2 g - 2m_2 a_1 = m_2 g \left(1 - 2\frac{2m_2 + m_B - m_1}{m_1 + 4m_2 + \frac{m_A}{2} + \frac{3m_B}{2}}\right)$$

$$= m_2 g \left(\frac{3m_1 + \frac{m_A}{2} - \frac{m_B}{2}}{m_1 + 4m_2 + \frac{m_A}{2} + \frac{3m_B}{2}}\right)$$

Finalmente de la cuarta ecuación sacamos T_3

$$T_3 = T_2 - \frac{1}{2} m_B a_1$$

$$= \left(\frac{3 m_1 m_2 + \frac{m_A m_2}{2} - \frac{m_B m_2}{2} - m_2 m_B - \frac{1}{2} m_B^2 + \frac{m_1 m_B}{2}}{m + 4 m_2 + \frac{m_A}{2} + \frac{3 m_B}{2}} \right) g$$

$$= \left(\frac{3 m_1 m_2 + \frac{m_A m_2}{2} - \frac{3}{2} m_2 m_B - \frac{1}{2} m_B^2}{m + 4 m_2 + \frac{m_A}{2} + \frac{3 m_B}{2}} \right) g$$

Sustituyendo los datos del problema:

$$\left. \begin{array}{l} m_1 = 10 \text{ kg} \\ m_2 = 8 \text{ kg} \\ m_A = 1 \text{ kg} \\ m_2 = 2 \text{ kg} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = 1{,}725 \ m/s^2 \\ a_2 = 3{,}45 \ m/s^2 \\ T_1 = 115{,}35 \text{ N} \\ T_B = 116{,}2 \text{ N} \\ T_2 = 50{,}88 \text{ N} \\ T_3 = 49{,}15 \text{ N} \end{array}$$