Problema 1-1 Un tren pasa por una estación a 30 m/s. Una bola rueda por el piso del tren con una velocidad de 15 m/s dirigida:

(a) En la dirección del movimiento del tren.

(b) En la dirección opuesta.

(c) En dirección perpendicular a la del tren.

Encontrar en cada caso la velocidad de la bola respecto a un observador parado en la plataforma de la estación.

Vamos a considerar dos observadores:

- Observador O situado en la plataforma de la estación y en reposo.
- Observador O' situado en el interior del tren.

La velocidad relativa de O' con respecto a O vendrá dada por la velocidad del tren. Asumiendo que este se mueve a lo largo del eje x hacia la derecha:

$$\vec{v}_{O'O} = 30\,\vec{i} \quad (m/s)$$

La relación entre las velocidades $\vec{v}$ y $\vec{v}\,'$ de la pelota vista por los dos observadores es:

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'O} + \vec{v}\,'$$

con lo que:

(a) $\vec{v} = 30\,\vec{i} + 15\,\vec{i} \ (m/s) = 45\,\vec{i} \ (m/s)$

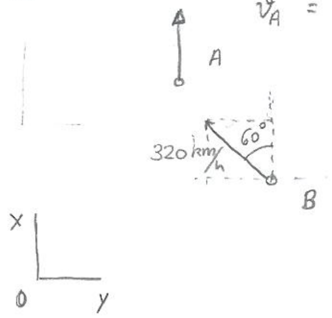
(b) $\vec{v} = 30\,\vec{i} - 15\,\vec{i} \ (m/s) = 15\,\vec{i} \ (m/s)$

(c) $\vec{v} = 30\,\vec{i} + 15\,\vec{j} \ (m/s)$

Problema 2-1 Un aeroplano A vuela hacia el Norte a 480 km/h con respecto a la Tierra. Simultáneamente otro avión vuela en la dirección N 60° O a 320 km/h con respecto a la Tierra. Encontrar la velocidad de A respecto a B y la de B respecto a A.

Con respecto al sistema de referencia en la Tierra podemos expresar las velocidades de los dos aviones en coordenadas cartesianas

$$\vec{v}_A = 480 \ \frac{km}{h} \cdot \vec{j} = 133.33 \ \frac{m}{s} \vec{j}$$



$$|\vec{v}_B| = \frac{320 \ km}{h} = 88.89 \ \frac{m}{s} \vec{j}$$

$$\vec{v}_B = (-88.89 \cdot \operatorname{sen} 60) \ \vec{i} + (88.89 \cdot \cos 60) \ \vec{j}$$

$$= -76.98 \ \vec{i} + 44.44 \ \vec{j}$$

Sistema de referencia en la Tierra.

La velocidad de A con respecto a B valdrá:

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = \left(76.98 \ \frac{m}{s} \vec{i}\right) + (133.33 - 44.44) \ \frac{m}{s} \vec{j}$$

$$= 76.98 \ \frac{m}{s} \vec{i} + 88.89 \ \frac{m}{s} \vec{j}$$

$$= 277 \ \frac{km}{h} \vec{i} + 320 \ \frac{km}{h} \vec{j}$$

La velocidad de B con respecto a A es justo la opuesta

$$\underline{\vec{v}_{BA}} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \underline{-\vec{v}_{AB}}$$

Problema 3-1 Dos nadadores tienen que atravesar un río desde el punto A en una de las orillas hasta el punto B situado en la orilla opuesta, enfrente del primero. Para esto, uno de ellos resolvió atravesar el río según la recta AB, mientras que el otro decidió mantenerse todo el tiempo perpendicularmente a la corriente, y la distancia a la cual ella le desvíe, realizarla por la orilla a pie con una velocidad igual a u. ¿Con qué valor de u ambos nadadores alcanzarán el punto B al mismo tiempo, si la velocidad de la corriente es de 2.0 km/h y la velocidad de cada nadador con respecto al agua es de 2,5 km/h?

Vamos a considerar dos observadores:

- Observador O: situado en la ribera del río y quieto respecto de ésta.
- Observador O': situado dentro del agua y dejándose arrastrar por la corriente

Vamos a tomar el eje X en la dirección y sentido de la corriente y el eje Y en la dirección transversal.

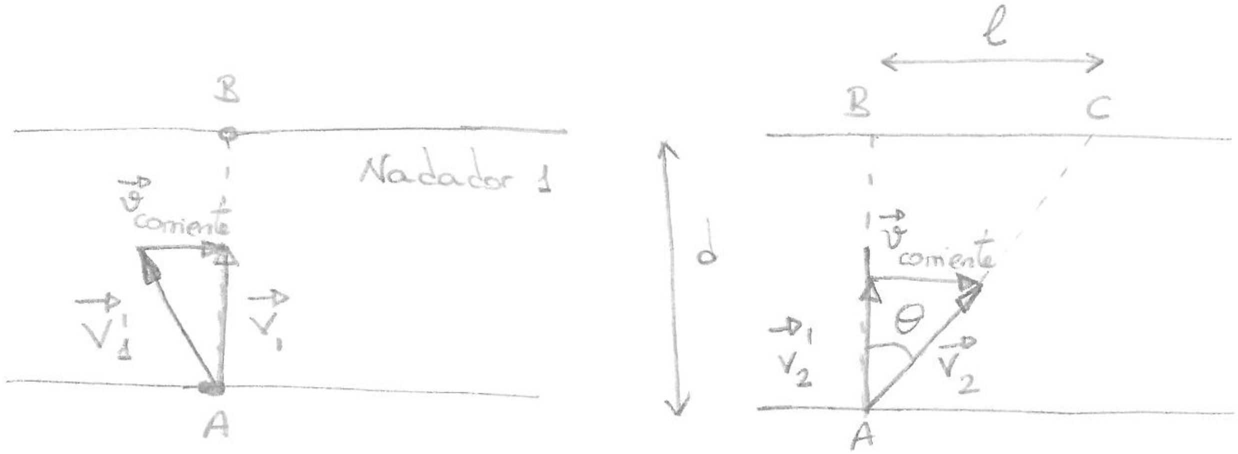
La velocidad relativa de O' con respecto de O vendrá dada por la velocidad de la corriente

$$\vec{v}_{O'O} = \vec{v}_{\text{corriente}}$$

La relación entre las velocidades $\vec{V}_i$ y $\vec{V}_i'$ de los dos nadadores $(i = 1,2)$ vistas por los dos observadores es

$$\vec{V}_i = \vec{V}_i' + \vec{v}_{O'O} = \vec{V}_i' + \vec{v}_{\text{corriente}}$$

El diagrama de velocidades correspondiente para cada nadador será



El tiempo invertido por el nadador 1 para cruzar el río será

$$\Delta t_1 = \frac{d}{V_1} = \frac{d}{\sqrt{V_1'^2 - v_{corriente}^2}}$$

El tiempo invertido por el nadador 2 será:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta t_2 &= \Delta t_{A\to C} + \Delta t_{C\to B} \\
\Delta t_{A\to C} &= \frac{d}{V_2'} \\
\Delta t_{C\to B} &= \frac{\ell}{u} = \frac{v_{corriente}\cdot \Delta t_{A\to C}}{u}
\end{aligned}\right\} \Delta t_2 = \frac{d}{V_2'}\left(1 + \frac{v_{corriente}}{u}\right)$$

$$= \frac{v_{corriente}}{u}\cdot\frac{d}{V_2'}$$

Si imponemos que los dos tiempos son iguales, teniendo en cuenta que $V_1' = V_2'$ tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{V_1'^2 - v_{corriente}^2}} = \frac{1}{V_1'}\left(1 + \frac{v_{corriente}}{u}\right) \Rightarrow 1 + \frac{v_{corriente}}{u} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{corriente}^2}{V_1'^2}}}$$

$$\frac{v_{corriente}}{u} = \left(1 - \frac{v_{corriente}^2}{V_1'^2}\right)^{-1/2} - 1 \Rightarrow u = \frac{v_{corriente}}{\left(1 - \frac{v_{corriente}^2}{V_1'^2}\right)^{-1/2} - 1} = 3.0\ \mathrm{km/h}$$

Problema 4.-1

La nieve cae a una velocidad constante de 8 m/s. ¿Con qué velocidad ve caer los copos de nieve el conductor de un automóvil que se mueve en una carretera recta horizontal con velocidad de 50 km/h.

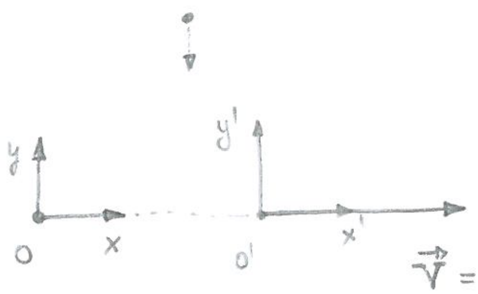
Con respecto a un sistema de referencia en la Tierra, la velocidad con la que caen los copos de nieve es:

$$v_{0x} = 0$$

$$v_{0y} = -8\ m/s$$

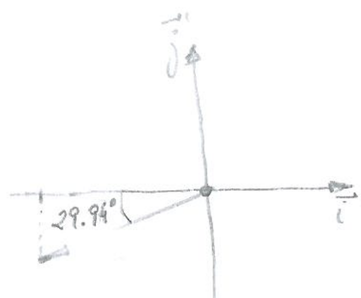
$$\vec{v} = v_{0x}\,\vec{i} + v_{0y}\,\vec{j} = -8\ m/s\ \vec{j}$$

El sistema de referencia del coche se mueve con respecto al sistema de referencia del suelo con una velocidad constante de 50 km/h a lo largo de x



$$\vec{V} = 50\,\vec{i}\ km/h = 13.89\,\vec{i}\ m/s$$

La velocidad del copo con respecto al sistema de referencia en el coche es $\vec{v}'$, y la transformación que relaciona $\vec{v}$ con $\vec{v}'$ es:



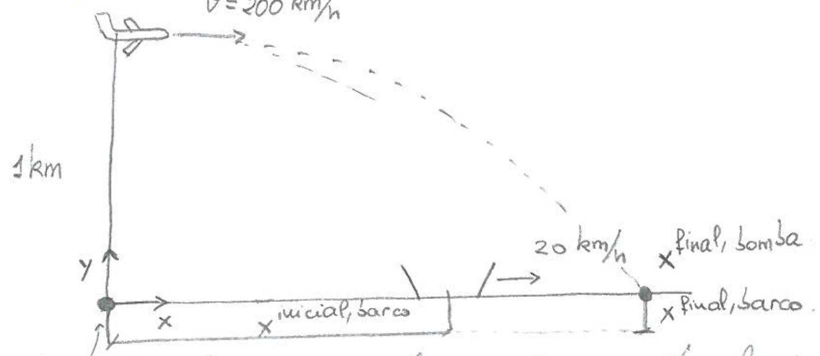
$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} = (-13.89)\,\vec{i}' - 8\,\vec{j}'\ \frac{m}{s}$$

El módulo de $\vec{v}'$ será $|\vec{v}'| = \sqrt{(13.89)^2 + 8^2} = 16.03\ m/s$

y el ángulo con respecto al coche. $tg\ \alpha = \frac{8}{13.89} \Rightarrow \alpha = arc\ tg\left(\frac{8}{13.89}\right) = 29.94°$

Problema 5-1 Un aeroplano vuela horizontalmente a una altura de 1 km y con una velocidad de 200 km/h. Deja caer una bomba que debe dar en un barco que viaja en la misma dirección de 20 km/h. Demostrar que la bomba debe dejarse caer cuando la distancia horizontal entre el aeroplano y el barco es de 715 m. Resolver el mismo problema para el caso en el cual el barco se está moviendo en dirección contrar



$$\left\{ x^{final, bomba} = x^{final, barco} \right.$$

sistema de referencia en el mar. Con respecto al mismo, tanto el avión como el barco se están moviendo con velocidad constante

① ¿Cuánto tiempo tarda la bomba en llegar al suelo.

$$y_{final} = 0$$

$$y_{inicial} = 1000 \text{ m}$$

$$v_{oy}^{inicial} = 0$$

$$a_y = -g = -9.80 \text{ m/s}^2$$

$$y_{final} = y_{inicial} + v_{oy}^{inicial} \cdot t + \frac{1}{2} a_y \cdot t^2$$

$$0 = 1000 + \frac{1}{2}(-9.80) \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2000}{9.80}} = 14.28 \text{ s}$$

② En este tiempo, con respecto a un sistema de referencia en el mar, la bomba habrá recorrido una distancia horizontal

$$x_{final}^{bomba} = x_{inicial}^{bomba} + v_{ox}^{inicial, bomba} \cdot t = \frac{200 \text{ km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \cdot 14.28 \text{ s}$$

$$= 793.33 \text{ m}$$

③ En ese mismo tiempo, el barco habrá recorrido una distancia horizontal de

$$\left(x_{final}^{barco} - x_{inicial}^{barco}\right) = v_{ox}^{inicial, barco} \cdot t = \frac{20 \text{ km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \cdot 14.28 \text{ s}$$

$$= 79.33 \text{ m}$$

(4) Como la bomba alcanza su objetivo

$$\cancel{X}^{final,\,bomba} = x^{final,\,barco}$$

$$x^{final,\,bomba} = x^{inicial,\,barco} + v_{ox}^{inicial,\,barco} \cdot t$$

$$793.33 = x^{inicial,\,barco} + 79.33$$

$$X^{inicial,\,barco} = 793.33 - 79.33 = 714\,m$$

Resolver el mismo problema para el caso en el cual el barco se está moviendo en dirección opuesta.

En este caso, el desplazamiento del barco será

$$\left(X_{final}^{barco} - X_{inicial}^{barco}\right) = -\,v_{ox}^{inicial,\,barco} \cdot t = -\,79.33\ m$$

$$X_{final}^{barco} = X_{inicial}^{barco} - 79.33 = X_{final}^{bomba} = 793.33$$

$$X_{inicial}^{barco} = 793.33 + 79.33 = 872.66\ m$$

Problema 9.- Calcular el tiempo dilatado que dura un muón que viaja con una velocidad igual a 0,999c teniendo en cuenta que su vida en tiempo propio es de $2,2 \cdot 10^{-6}$ s.
Comparar ésto con el tiempo necesario para recorrer una distancia de 10000 m moviéndose a esa misma velocidad

Los muones son partículas elementales inestables que tienen una carga igual a la del electrón y una masa 207 veces superior a la de éste.

Pueden producirse como resultado de colisiones de rayos cósmicos con átomos situados en la alta atmósfera.

Los muones de movimiento lento en un laboratorio tienen un tiempo de vida que, medido, resulta ser igual al intervalo de tiempo propio

$\Delta t_p = 2,2\ \mu s = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s

Si asumimos que la velocidad de los muones atmosféricos es próxima a la de la luz, 0,999c, encontraríamos que estas partículas pueden viajar una distancia de aproximadamente

$$0,999 \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \frac{m}{s} \cdot 2,2\ 10^{-6}\ s \approx 659\ m$$

antes de desintegrarse.

Por tanto sería bastante poco probable que alcanzaran la superficie de la Tierra desde el punto de la alta atmósfera en el que son generados.

LOS EXPERIMENTOS MUESTRAN QUE UN GRAN NÚMERO DE MUONES SI ALCANZAN LA SUPERFICIE DE LA TIERRA ¿CÓMO ES POSIBLE?

El efecto de la dilatación temporal explica este fenómeno

Desde un punto de vista de un observador situado en la Tierra, los muones tienen un tiempo de vida dilatado igual a

$$\Delta t = \frac{\Delta t_p}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \cdot \Delta t_p$$

Para $v = 0.999\,c$, $\gamma \approx 22,37$ y $\underline{\underline{\Delta t = 49,21\ \mu s}}$

De aquí, la distancia media recorrida por los muones en ese tiempo, medida por un observador situado en la Tierra, es de

$$0.999 \cdot 3 \cdot 10^8\ m/s \cdot 49,21\ 10^{-6}\ s \approx 14794\ m$$

El muón perdura lo suficiente como para llegar a la Tierra.

Suponiendo que el muón se origina a 10 000 m de altura y se mueve con una celeridad de 0,999 c, tardaría en llegar a la superficie de la Tierra.

$$\frac{10^4\ m}{0.999\ 3\ 10^8\ m/s} = \underline{\underline{33,37\ \mu s}}$$

Problema 10.-1 Dos naves espaciales, cada una de las cuales mide 100 m en su propio sistema en reposo, se cruzan entre sí. Los instrumentos de medida situados en la nave A señalan que la parte delantera de la nave B invierten $5{,}00 \cdot 10^{-6}$ s en recorrer toda la longitud de A.

(a) ¿Cuál es la velocidad relativa de ambas naves?

Para el observador situado en A, la velocidad de la nave B será la longitud recorrida entre el tiempo tardado en recorrerla, todo ello medido por los aparatos de A:

$$\underline{v_A} = \frac{L_p}{\Delta t} = \frac{100 \text{ m}}{5 \cdot 10^{-6} \text{ s}} = 20 \cdot 10^{6} \text{ m/s} = \underline{2 \cdot 10^{7} \text{ m/s}}$$

(b) ¿Cuál es la longitud de una nave desde el punto de vista de la otra?

Para el observador situado en A, la nave B está contraída en la dirección del movimiento y tendrá una longitud L

$$\underline{L} = \frac{L_p}{\gamma} = L_p \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 100 \cdot \sqrt{1 - \frac{(2 \cdot 10^7)^2}{(3 \cdot 10^8)^2}} = \underline{99{,}78 \text{ m}}$$

(c) Un reloj situado en el extremo frontal de B señala exactamente la una al pasar por el extremo frontal de A. ¿Cuál será la lectura del reloj al pasar por el extremo posterior de A?

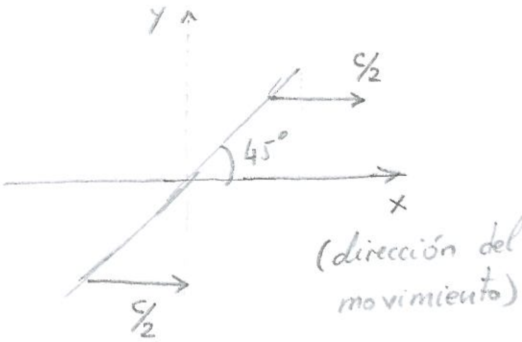
El tiempo propio es el medido por la nave B, ya que los dos sucesos tienen lugar en el mismo punto del espacio luego podemos conocer Δt_p a partir del tiempo medido en la nave A, Δt

$$\Delta t = \gamma \Delta t_p = \frac{\Delta t_p}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\underline{\Delta t_p} = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 5 \cdot 10^{-6} \sqrt{1 - \frac{(2 \cdot 10^7)^2}{(3 \cdot 10^8)^2}}$$

$$= \underline{4{,}99 \cdot 10^{-6} \text{ s}}$$

Problema 11.-1 Determinar la longitud propia de una barra, si en un sistema de referencia de laboratorio su velocidad es $c/2$, su longitud 1,00 m y el ángulo entre la barra y la dirección del movimiento es de 45°.



En un sistema de referencia de laboratorio, la longitud de la barra es 1m, con lo que su anchura Δy y su longitud a lo largo de x Δx son:

$$\Delta y = 1\,m \cdot \operatorname{sen} 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ m$$

$$\Delta x = 1\,m \ \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ m$$

La longitud propia es la longitud de la barra en un sistema de referencia en reposo con respecto de la barra. En este sistema de referencia

$$\Delta y_p = \Delta y$$ (no hay contracción de longitudes en direcciones perpendiculares al movimiento).

$$\Delta x = \frac{\Delta x_p}{\gamma} \Rightarrow \Delta x_p = \gamma \Delta x = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta x_p = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{1-\frac{c^2/4}{c^2}}}\,m = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}\ m = \frac{0,707}{0,866}\ m = 0,816\ m$$

Por lo tanto, la longitud total de la barra es:

$$\underline{L_p} = \sqrt{\Delta x_p^2 + \Delta y_p^2} = \underline{1,08\ m}$$

Problema 12-1 Un cohete espacial de 100 m de longitud lleva un receptor de radio en la punta. Se emite una señal de radio desde una estación espacial en el momento en el que pasa frente a ella la cola del cohete con velocidad $v = 0,6\,c$

(a) ¿a qué distancia de la estación espacial se encuentra la cabeza del cohete cuando la señal de radio llega hasta ella?

(b) medido desde la estación espacial, ¿cuánto tiempo transcurre entre la llegada de esta señal y su emisión desde la estación? ¿Y si lo medimos desde el cohete?

Supongamos un observador situado en la nave y dos sucesos.

① Suceso 1: la punta de la nave pasa por el receptor.

② Suceso 2: la señal de radio llega a la punta de la nave.

Como los dos sucesos tienen lugar en el mismo punto para el observador de la nave, el intervalo de tiempo entre ellos es el tiempo propio, Δt_p. Este intervalo de tiempo es la suma de:

- tiempo que tarda la nave en pasar por delante de la estación, Δt^1_{nave}. Como para el observador de la nave los dos extremos de la misma están en reposo, la longitud medida por el observador de la nave es la longitud propia L_0, por lo que $\Delta t^1_{nave} = \frac{L_0}{v}$

- tiempo que tarda la señal radio en atravesar la nave. Para el observador de la nave, la señal de radio viaja a la velocidad de la luz (postulado de la relatividad)

$$\Delta t^2_{nave} = \frac{L_0}{c} \quad ;; \quad \boxed{\Delta t^2_{nave} = 3,33 \cdot 10^{-7}\,s}$$

$$\Delta t_p = \Delta t^{1}_{nave} + \Delta t^{2}_{nave} = \frac{L_0}{v} + \frac{L_0}{c} = \frac{L_0}{0,6c} + \frac{L_0}{c} = \frac{L_0}{c}\left(1+\frac{1}{0,6}\right)$$

$$\underline{\underline{\Delta t_p = 8,88 \cdot 10^{-7}\, s}}$$

· Para el observador situado en la estación el intervalo de tiempo entre los dos sucesos es

$$\Delta t = \Delta t_p \gamma = \frac{\Delta t_p}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{8,88\cdot 10^{-7}\, s}{\sqrt{1-\frac{(0,6)^2 \cdot \cancel{c^2}}{\cancel{c^2}}}} = 1,11 \cdot 10^{-6}\, s$$

· Para el observador situado en la estación la longitud de la nave se ha contraído

$$\underline{\underline{L}} = \frac{L_p}{\gamma} = L_p \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 100 \cdot \sqrt{1-(0,6)^2} = \underline{\underline{80\ m}}$$

Para el observador en la estación, la nave tarda en pasar por delante de él:

$$\Delta t^{1}_{estación} = \frac{L}{v} = \frac{80}{0,6c} = 4,44 \cdot 10^{-7}\, s$$

La diferencia entre Δt y $\Delta t^{1}_{estación}$ es el tiempo que tarda la señal de radio en llegar a la punta de la nave

$$\boxed{\Delta t^{2}_{estación} = \Delta t - \Delta t^{1}_{estación} = (1,11\cdot 10^{-6} - 4,44\cdot 10^{-7})\, s = \underline{6,67\ s}}$$

Para el observador en la estación la señal de radio, que se mueve a la velocidad de la luz, ha viajado una distancia

$$\boxed{\Delta x = c \cdot \Delta t^{2}_{estación} = \boxed{200\, m}}$$