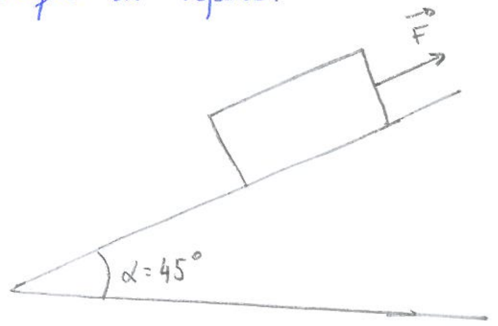
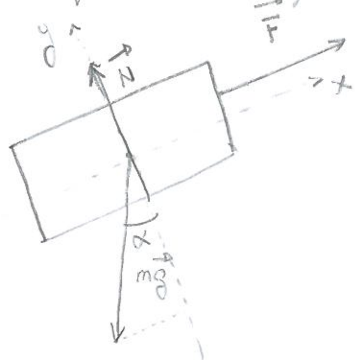
Un bloque de 100 kg se encuentra sobre un plano inclinado 45°; si la fuerza de rozamiento entre el bloque y el plano inclinado es despreciable, calcular:

(a) Fuerza mínima paralela al plano inclinado capaz de mantener al bloque en reposo.



Dibujamos el diagrama de cuerpo aislado para el bloque:



Proyectamos las fuerzas en las direcciones de los ejes.

$$\sum F_x = F - mg \operatorname{sen}\alpha = m \cdot a_x = 0$$

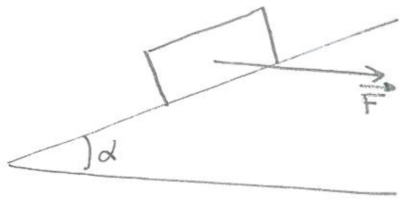
$$\sum F_y = N - mg \cdot \cos\alpha = m \cdot a_y = 0$$

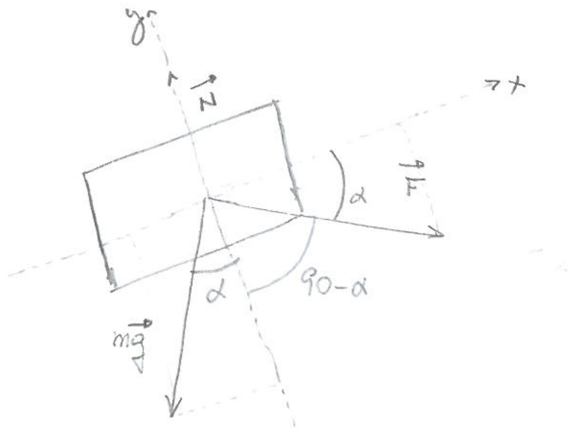
El bloque está en reposo.

$$\Longrightarrow \boxed{F = mg \operatorname{sen}\alpha = 100 \cdot 9{,}8 \operatorname{sen} 45 = 692{,}96\,N}$$

(b) fuerza mínima horizontal capaz de mantener el bloque en reposo.

Seguimos los mismos pasos que en el apartado anterior.





$$\sum F_x = -mg\,\text{sen}\,\alpha + F\cos\alpha = m\cdot a_x = 0$$

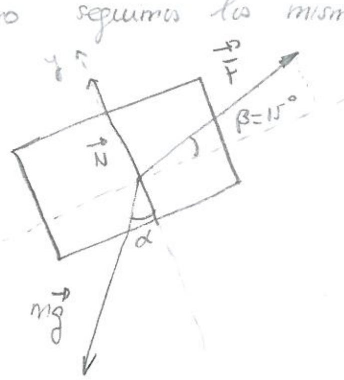
$$\sum F_y = N - mg\cos\alpha - F\cdot\text{sen}\,\alpha = m\cdot a_y = 0$$

El bloque está en reposo

$$F\cos\alpha - mg\,\text{sen}\,\alpha = 0 \Rightarrow \underline{F} = mg\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = mg\tan\alpha = 100\cdot 9{,}8 = \underline{980\,N}$$

(c) Fuerza mínima que forma un ángulo de 15° con ~~la horizontal~~ el plano inclinado capaz de mantener al bloque en reposo y el valor de la reacción normal del plano inclinado sobre el objeto.

De nuevo seguimos los mismos pasos:



$$\sum F_x = -mg\,\text{sen}\,\alpha + F\cos\beta = m\,a_x = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = N - mg\cos\alpha + F\,\text{sen}\,\beta = m\,a_y = 0 \quad (2)$$

De (1): $F = \dfrac{mg\,\text{sen}\,\alpha}{\cos\beta} = 717{,}41\,N$

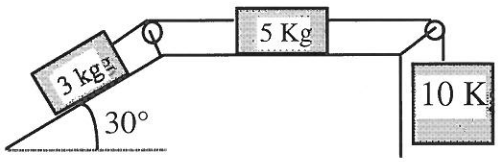
De (2): $N = mg\cos\alpha - F\,\text{sen}\,\beta = 507{,}28\,N$

Los tres bloques de la figura están conectados por media de cuerdas ligeras que pasan por poleas sin rozamiento. La aceleración del sistema es de 2 m/s^2 y las superficies son rugosas. Calcular:

(a) Las tensiones de las cuerdas.

(b) El coeficiente de rozamiento entre los bloques y la superficie (suponiendo μ igual para los dos bloques).

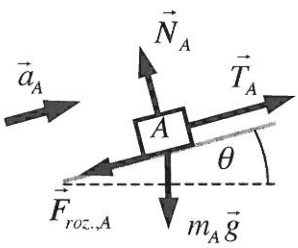
(Tomad $g = 10 \text{ m/s}^2$**)**



Solución:

Comenzamos la resolución del problema dibujando los diagramas de cuerpo aislado para cada uno de los tres cuerpos.

Para el bloque A tendremos:



Si escogemos un sistema de coordenadas en el cuál el eje x sea paralelo al plano inclinado y el eje y perpendicular al mismo, podemos proyectar las fuerzas sobre cada uno de estos ejes y plantear la segunda ley de Newton.

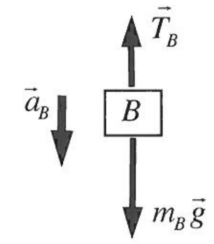
A lo largo del eje y:

$$N_A - m_A g \cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A = m_A g \cos\theta.$$

A lo largo del eje x:

$$T_A - F_{roz,A} - m_A g \sin\theta = m_A a_A \quad \Rightarrow$$
$$T_A - \mu N_A - m_A g \sin\theta = m_A a_A \quad \Rightarrow$$
$$T_A - \mu\, m_A g \cos\theta - m_A g \sin\theta = m_A a_A. \qquad (1)$$

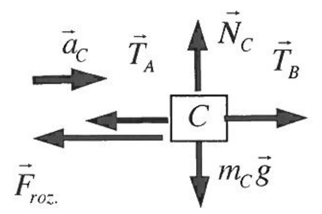
Para el bloque B tendremos:



Para este bloque elegimos un sistema de coordenadas en el cuál el eje y sea vertical, y cuyo sentido positivo apunte hacia abajo. La segunda ley de Newton en este caso se transforma en:

$$m_B g - T_B = m_B a_B. \qquad (2)$$

Por último, para el bloque C, tendremos:



Para este bloque elegimos un sistema de coordenadas en el cuál el eje x sea horizontal (paralelo al plano), y eje y sea vertical (perpendicular al plano). En este caso, las ecuaciones de Newton toman la forma

A lo largo del eje y:

$$N_C - m_C g = 0 \quad \Rightarrow \quad N_C = m_C g.$$

A lo largo del eje x:

$$T_B - T_A - F_{roz,C} = m_C a_C \quad \Rightarrow$$
$$T_B - T_A - \mu N_C = m_C a_C \quad \Rightarrow$$
$$T_B - T_A - \mu\, m_C g = m_C a_C. \qquad (3)$$

Por último, sabemos que el módulo de la aceleración de los tres cuerpos es el mismo:

$$a_A = a_B = a_C \equiv a. \qquad (4)$$

Así pues, tenemos que resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (las tensiones de las cuerdas y el coeficiente de rozamiento):

$$\begin{cases} T_A - \mu\, m_A g \cos\theta - m_A g \sin\theta = m_A a, \\ m_B g - T_B = m_B a, \\ T_B - T_A - \mu m_C g = m_C a. \end{cases}$$

De la segunda ecuación deducimos que

$$T_B = m_B (g - a).$$

Sustituyendo en la tercera,

$$T_A = m_B (g - a) - m_C(\mu g + a).$$

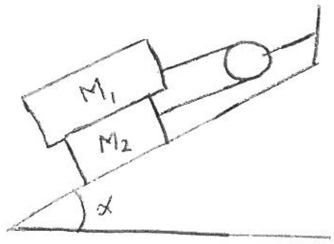
Y finalmente, llevando esta expresión a la primera y despejando μ

$$\mu = \frac{(m_B - m_A \sin\theta) - (m_A + m_B + m_C)\dfrac{a}{g}}{m_A \cos\theta + m_C}.$$

Sustituyendo los datos del problema:

$$\begin{aligned} &\mu = 0{,}645 \\ &T_A = 37{,}75 \text{ N} \\ &\mathrm{T}_B = 80{,}0 \text{ N} \end{aligned}$$

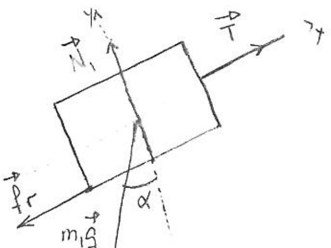
Problema 3| Suponed un sistema de 2 bloques M_1 y M_2 de masas 2 y 10 kg respectivamente, unidos por cuerdas sin masa a través de una polea fija y sin rozamiento, como se muestra en la figura.



El coeficiente de rozamiento entre el bloque M_1 y M_2 es μ_1 y el de rozamiento entre M_2 y el plano es μ_2. Dibujar las fuerzas que intervienen y plantear las ecuaciones de equilibrio. Obtened para qué ángulo ($\tan\alpha$) el dispositivo comenzará a moverse, escribiendo claramente la expresión analítica. Suponed que $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}2$. Obtener la expresión anterior para este caso particular y calcular el ángulo. Obtener el valor de la tensión en estas condiciones.

Dibujamos los diagramas de cuerpo aislado para las dos masas.

Cuerpo 1.



$$\sum F'_x = T - f_r - M_1 g \operatorname{sen}\alpha = M_1 \cdot a_{1x}$$

$$\sum F'_y = N_1 - m_1 g \cos\alpha = M_1 \cdot a_{1y} = 0$$

$$\Downarrow$$

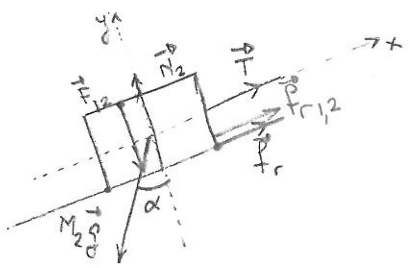
$$N_1 = m_1 g \cos\alpha$$

Como $f_r = \mu_1 \cdot N_1 = \mu_1 m_1 g \cos\alpha$

$$\sum F'_x = T - \mu_1 M_1 g \cos\alpha - M_1 g \operatorname{sen}\alpha = M_1 \cdot a_{1x}$$

$$T - M_1 g \left(\mu_1 \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\right) = M_1 \cdot a_{1x} \qquad (1)$$

Cuerpo 2:



Para el cuerpo 2 tengo que considerar dos fuerzas de reacción que el cuerpo 1 ejerce sobre el 2
- la reacción a la fuerza de rozamiento, $f_{r1\text{-}2}$
- la reacción a la normal,

$$\sum F_x^2 = T + f_r - M_2 g \operatorname{sen}\alpha + f_{r_{1,2}} = M_2 a_{2x}$$

$$\sum F_y^2 = N_2 - M_2 g\cos\alpha - F_{12} = M_2 a_{2y} = 0$$

Por el principio de acción y reacción, $|F_{12}| = |N_1| = M_1 g\cos\alpha$, luego

$$N_2 - M_2 g\cos\alpha - M_1 g\cos\alpha = 0$$

$$N_2 = (M_1 + M_2) g\cos\alpha$$

y como $f_r = \mu_2 \cdot N_2 = \mu_2 (M_1 + M_2) g\cos\alpha$, entonces

$$T + \mu_2 (M_1 + M_2) g\cos\alpha - M_2 g \operatorname{sen}\alpha + f_{r_{1\text{-}2}} = M_2 a_{2x}$$

$$T + \mu_2 (M_1 + M_2) g\cos\alpha - M_2 g \operatorname{sen}\alpha + \mu_1 M_1 g\cos\alpha = M_2 a_{2x} \qquad (2)$$

Así las dos ecuaciones que tengo que resolver son la (1) y (2).

Además, como las cuerdas son inextensibles. $a_1 = -a_2$, luego

$$\begin{cases} M_1 g (\mu_1 \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) - T = M_1 a_{2x} \\ T + \mu_2 (M_1 + M_2) g\cos\alpha - M_2 g \operatorname{sen}\alpha + \mu_1 M_1 g\cos\alpha = M_2 a_{2x} \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones.

$$\mu_1 M_1 g\cos\alpha + M_1 g \operatorname{sen}\alpha + \mu_2 (M_1 + M_2) g\cos\alpha - M_2 g \operatorname{sen}\alpha + \mu_1 M_1 g\cos\alpha = (M_1 + M_2) a$$

$$(M_1 - M_2) g \operatorname{sen}\alpha + \left[2\mu_1 M_1 + \mu_2 (M_1 + M_2)\right] g\cos\alpha = (M_1 + M_2) a$$

En equilibrio, $a_2 = 0$, luego

$$(M_1 - M_2)\,\cancel{g}\,\text{sen}\,\alpha + \left[2\mu_1 M_1 + \mu_2 (M_1 + M_2)\right]\cancel{g}\,\cos\alpha = 0$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\mu_1 M_1 + \mu_2 (M_1 + M_2)}{M_2 - M_1}}$$

Por debajo de este ángulo las fuerzas de rozamiento estáticas son lo suficientemente fuertes como para que el sistema no se mueva.

Por encima de este ángulo, el conjunto se comenzará a mover.

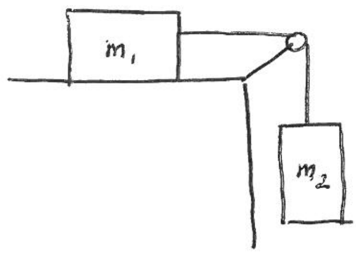
Sustituyendo los datos del problema.

$$\boxed{\alpha = 21{,}8^{\circ}}$$

$$\boxed{T = 10{,}9\,N}$$

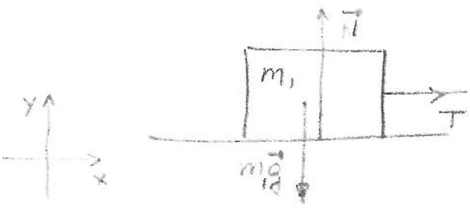
Problema 4. Calcular las aceleraciones de m_1 y m_2 y la tensión de las cuerdas en los tres casos representados. Todas las poleas tienen peso despreciable y fricción nula. ¿Qué dispositivo acelera m_1 más rápidamente en caída libre?

a)



Dibujamos el diagrama de cuerpo aislado para cada uno de los dos objetos

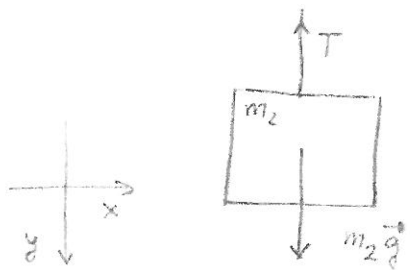
Para el cuerpo 1.



$$\sum F_y = N - m_1 g = 0 \Rightarrow N = m_1 g$$

$$\sum F_x = T = m_1 a_1$$

Para el cuerpo 2.



$$\sum F_y = m_2 g - T = m_2 a_2$$

Como la cuerda es inextensible, la aceleración tiene que ser la misma.

$$a_1 = a_2$$

Luego:

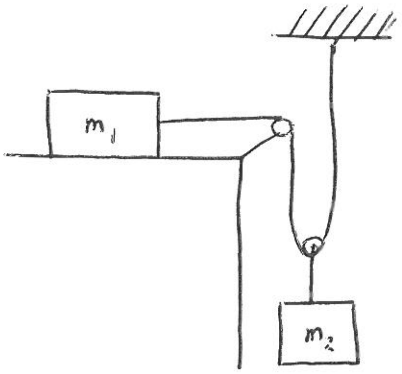
$$T = m_1 a$$

$$m_2 g - T = m_2 a \Rightarrow T = m_2 (g - a)$$

$$m_2 g - m_2 a = m_1 a \Rightarrow \boxed{a = \frac{m_2 g}{(m_1 + m_2)}}$$

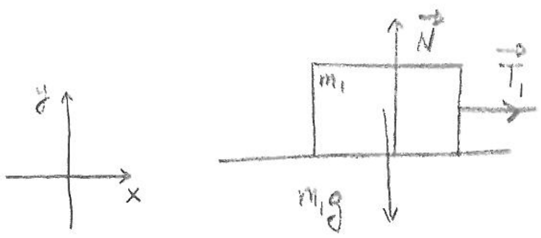
$$\boxed{T = m_2 g - \frac{m_2^2 g}{(m_1+m_2)} = \frac{m_1 m_2 g}{(m_1 + m_2)}}$$

b)



Dibujamos el diagrama de los dos objetos y de la polea móvil

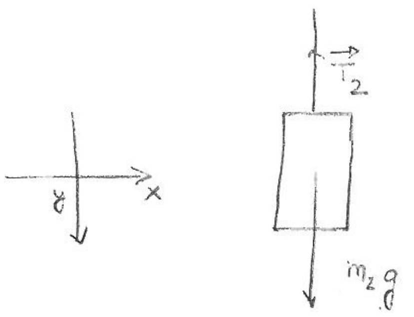
Para el cuerpo 1



$$\sum F_y = N - m_1 g = 0 \Rightarrow N = m_1 g$$

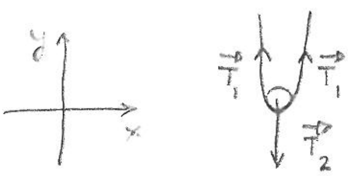
$$\sum F_x = T_1 = m_1 a_1$$

Para el cuerpo 2.



$$\sum F_y = -T_2 + m_2 g = m_2 a_2$$

Para la polea móvil



$$\sum F_y = 2T_1 - T_2 = 0 \Rightarrow T_2 = 2T_1$$

se supone que la polea carece de masa

Como la cuerda es inextensible, $a_2 = \frac{a_1}{2}$

Dicho de otra manera, si el objeto 1 se desplaza hacia la derecha una distancia Δx, el cuerpo 2 desciende $\frac{\Delta x}{2}$ en el mismo tiempo. (la parte de la cuerda 1 a la izquierda y a la derecha de la polea móvil aumenta $\frac{\Delta x}{2}$)

Así pues las 4 ecuaciones a resolver son:

$$T_1 = m_1 a_1 \qquad (1)$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \qquad (2)$$

$$T_2 = 2T_1 \qquad (3)$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2} \qquad (4)$$

Reemplazando (3) y (4) en (2):

$$m_2 g - 2T_1 = m_2 \frac{a_1}{2} \Rightarrow 2T_1 = m_2 g + \frac{m_2}{2} a_1$$

Y reemplazando en esta última ecuación T_1 (de la ecuación (1)).

$$2 m_1 a_1 = m_2 g + \frac{m_2}{2} a_1$$

$$4 m_1 a_1 = 2 m_2 g + m_2 a_1$$

$$(4m_1 + m_2) a_1 = 2 m_2 g$$

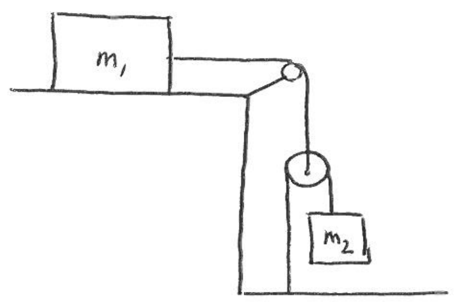
$$\boxed{a_1 = \frac{2 m_2 g}{(4 m_1 + m_2)}}$$

$$\boxed{a_2 = \frac{a_1}{2}}$$

$$\boxed{T_1 = \frac{2 m_1 m_2 g}{(4 m_1 + m_2)}}$$

$$\boxed{T_2 = 2T_1}$$

c)

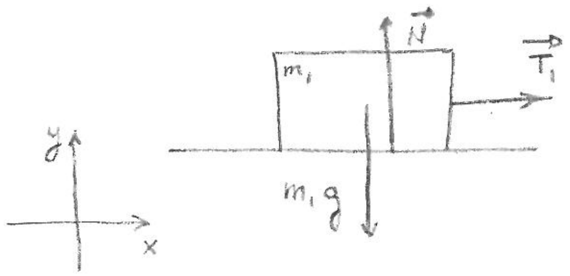


Dibujamos el diagrama de cuerpo aislado para cada uno de los dos objetos y para la polea móvil

Para el cuerpo 1

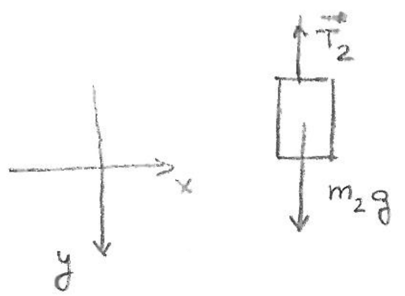
$$\sum F_y = N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$$

$$\sum F_x = T_1 = m_1 a_1$$



Para el cuerpo 2

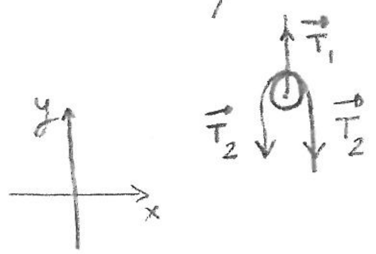
$$\sum F_y = -T_2 + m_2 g = m_2 a_2$$



Para la polea móvil:

$$\sum F_y = T_1 - 2T_2 = 0$$

se supone que la polea carece de masa



Como las cuerdas son inextensibles, $a_2 = 2a_1$

(ver el argumento del apartado b)

Así las cuatro ecuaciones a resolver son:

$$T_1 = m_1 a_1 \qquad (1)$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \qquad (2)$$

$$T_1 = 2T_2 \qquad (3)$$

$$a_2 = 2a_1 \qquad (4)$$

Reemplazando (3) y (4) en (2)

$$m_2 g - \frac{T_1}{2} = 2 m_2 a_1$$

$$m_2 g - \frac{m_1 a_1}{2} = 2 m_2 a_1$$

$$2 m_2 g - m_1 a_1 = 4 m_2 a_1$$

$$2 m_2 g = (4 m_2 + m_1) a_1$$

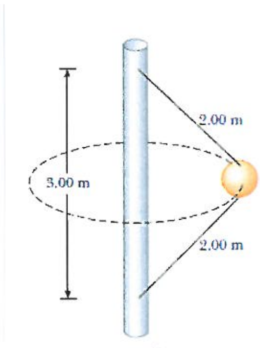
$$\boxed{a_1 = \frac{2 m_2 g}{4 m_2 + m_1}}$$

$$\boxed{a_2 = 2 a_1}$$

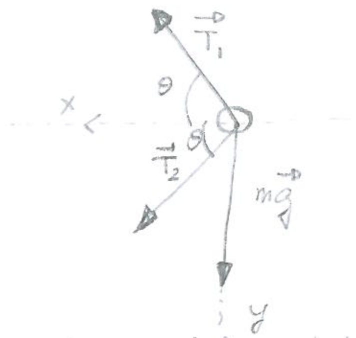
$$\boxed{T_1 = \frac{2 m_1 m_2 g}{4 m_2 + m_1}}$$

$$\boxed{T_1 = 2 T_2}$$

Un objeto de 4 kg está unido a una varilla vertical por medio de dos cuerdas, como indica la figura. El objeto gira en un plano horizontal con velocidad constante de 6 m/s. Calcular la tensión en ambas cuerdas.



Dibujamos el diagrama de cuerpo aislado para la partícula de masa m



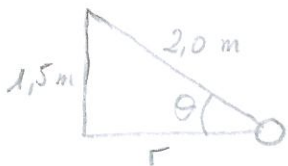
Elegimos el eje x horizontal, sentido positivo hacia la izquierda y el eje y vertical, sentido positivo hacia abajo.

Proyectamos las fuerzas sobre los ejes.

$$\sum F_x = T_1 \cdot \cos\theta + T_2 \cos\theta = T_{1x} + T_{2x} = m\frac{v^2}{r} \quad (1)$$

$$\sum F_y = -T_1 \cdot \operatorname{sen}\theta + T_2 \operatorname{sen}\theta + mg = -T_{1y} + T_{2y} + mg = 0 \quad (2)$$ (la bola está en equilibrio en la dirección vertical).

El radio de giro se puede calcular por medio del teorema de Pitágoras



$$r = \sqrt{(2{,}0)^2 - (1{,}5)^2} = 1{,}32\ m$$

Y el ángulo θ toma el valor

$$\theta = \operatorname{arc\,sen} \frac{1{,}5}{2{,}0} = 48{,}59°$$

Como la tensión tiene que llevar la dirección de la cuerda.

$$\tan\theta = \frac{T_{1y}}{T_{1x}} \Rightarrow T_{1y} = T_{1x} \cdot \tan\theta$$

$$\tan\theta = \frac{T_{2y}}{T_{2x}} \Rightarrow T_{2y} = T_{2x} \cdot \tan\theta$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en (2)

$$-T_{1x} \cdot \tan\theta + T_{2x} \tan\theta + mg = 0$$

Además, tenemos la ecuación (1) que puede ser multiplicada por $\tan\theta$

$$T_{1x} \tan\theta + T_{2x} \tan\theta = m \frac{v^2}{r} \tan\theta$$

Sumando estas dos últimas ecuaciones

$$2 T_{2x} \tan\theta + mg = m \frac{v^2}{r} \tan\theta$$

Despejando T_{2x}

$$2 T_{2x} \tan\theta = m \left(\frac{v^2}{r} \tan\theta - g \right)$$

$$T_{2x} = \frac{m}{2 \tan\theta} \left(\frac{v^2}{r} \tan\theta - g \right) = \frac{m v^2}{2r} - \frac{m g}{2 \tan\theta}$$

Sustituyendo los datos del problema:

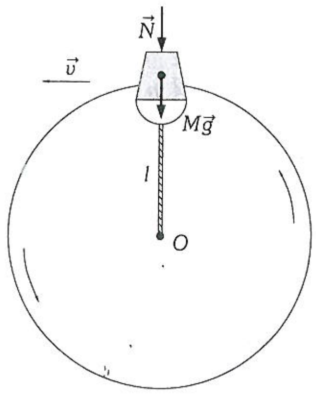
$$T_{2x} = 37,26 \text{ N} \Rightarrow T_{2y} = T_{2x} \cdot \tan\theta = 42,25 \text{ N} \Rightarrow \underline{T_2} = \sqrt{T_{2x}^2 + T_{2y}^2} = \underline{56,3 \text{ N}}$$

De la ecuación (2)

$$T_{1y} = T_{2y} + mg = 81,45 \text{ N} \Rightarrow T_{1x} = \frac{T_{1y}}{\tan\theta} = 71,83 \text{ N}$$

$$\Rightarrow \underline{T_1} = \sqrt{T_{1x}^2 + T_{1y}^2} = \underline{108,6 \text{ N}}$$

En un plano vertical damos vueltas a una cuerda de 1m de longitud en cuyo extremo tenemos un cubo con agua. ¿Cuál será la mínima velocidad que debe llevar el cubo en la parte superior de la trayectoria para que el agua no se derrame cuando está el cubo con la boca hacia el suelo? Si la velocidad del cubo en la parte más baja de la trayectoria es de 6,98 m/s, ¿cuál es la tensión de la cuerda en función del peso total del cubo?



Por el principio de inercia, cuando el agua se encuentra en la parte superior tendería a seguir en la dirección horizontal.

Para cambiar el sentido de la velocidad y para que siga un movimiento circular es necesario que sobre el agua actúe una fuerza neta que apunte hacia el centro del círculo.

Existen dos fuerzas que actúan en esta dirección:

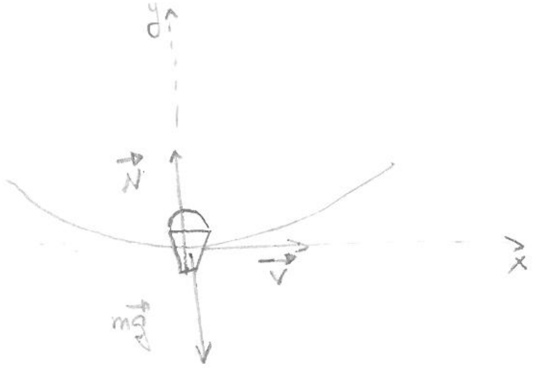
- el peso $M\vec{g}$
- la fuerza normal ejercida por el fondo del cubo sobre ella

Aplicando la segunda ley de Newton y tomando como sistema inercial al observador que da vueltas al cubo:

$$\Sigma \vec{F} = M\vec{g} + \vec{N} = m\,\vec{a}$$

En el caso límite (velocidad mínima), $\vec{N} = 0$ y además, la única aceleración existente es la normal que tiene la misma dirección y sentido que las fuerzas $\Rightarrow$ $Mg = M\dfrac{v^2}{l}$ $\Rightarrow$ $v = \sqrt{gl} = 3,1$ m/s

Cuando el cubo se encuentre en la parte más baja de la trayectoria.



$$\Sigma F_y = N - mg = m \cdot a_y = m \cdot \frac{v^2}{l}$$

$$\Downarrow$$

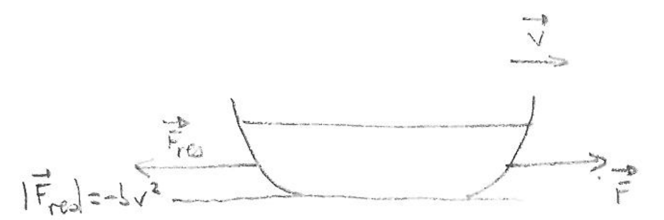
$$N = mg + m\frac{v^2}{l} = mg + mg\frac{v^2}{gl}$$

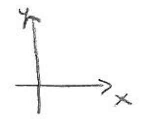
$$N = mg\left(1 + \frac{v^2}{gl}\right) = 5,97\ mg$$

Este valor de la normal se corresponde con la tensión que hay que ejercer sobre la cuerda para que el cubo gire.

Problema 7-1 Una motora de masa $m = 800$ kg se mueve bajo la acción de una fuerza constante F de 5000 N producida por su motor. El agua ejerce una fuerza de resistencia al movimiento proporcional al cuadrado de la velocidad $F_{Res} = -bv^2$, donde b es una constante, $b = 200\ N s^2/m^2$

(a) Escribir la ecuación del movimiento correspondiente, indicando lo que representa cada uno de sus términos.





$$\sum F_x = F - bv^2 = m \cdot a \qquad (1)$$

Como el problema es unidimensional, eliminamos el subíndice x de todas partes

(b) ¿Cuál sería la velocidad máxima que alcanzaría la motora?

En el momento en el que se alcanza la velocidad máxima, $a = 0$

luego

$$F - b v_{lim}^2 = 0 \implies v_{lim} = \sqrt{\frac{F}{b}} = 5\ m/s$$

(c) Suponiendo que parte del reposo, demuéstrese que su velocidad varía con el tiempo según la expresión

$$v(t) = \left\{ \frac{e^{(2bv_{lim}t/m)} - 1}{e^{2bv_{lim}t/m} + 1} \right\} v_{lim}$$

En la ecuación (1) se ve como la aceleración depende de la velocidad de la siguiente forma:

$$F - bv^2 = m\frac{dv}{dt} \implies b \cdot \left[\frac{F}{b} - v^2\right] = b\left[v_{lim}^2 - v^2\right] = m\frac{dv}{dt}$$

Separando variables.

$$\frac{dv}{\left[v_{lim}^2 - v^2\right]} = \frac{b}{m} dt$$

Integrando y teniendo en cuenta las condiciones iniciales del movimiento:

$$\int_0^v \frac{dv}{\left[v_{lim}^2 - v^2\right]} = \int_0^t \frac{b}{m} dt \Rightarrow \frac{1}{2 v_{lim}} \ln\left(\frac{v_{lim}+v}{v_{lim}-v}\right) = \frac{b}{m} \cdot t$$

$$\ln \frac{v_{lim}+v}{v_{lim}-v} = \frac{2 v_{lim} b t}{m}$$

$$\frac{v_{lim}+v}{v_{lim}-v} = e^{2b v_{lim} t/m}$$

$$v_{lim} + v = e^{2b v_{lim} t/m} \cdot (v_{lim} - v)$$

$$\left(1 + e^{2b v_{lim} t/m}\right) v = \left(e^{2b v_{lim} t/m} - 1\right) \cdot v_{lim}$$

$$v(t) = \left(\frac{e^{2b v_{lim} t/m} - 1}{e^{2b v_{lim} t/m} + 1}\right) v_{lim}$$

¿Qué velocidad tendría al cabo de 1s de navegación?

$$\underline{v(t = 1s) = 4{,}24 \ m/s}$$

Compárese con la que tendría si no existiese fuerza de resistencia.

Si no hubiese fuerza de resistencia el movimiento sería rectilíneo y uniformemente acelerado, con una aceleración $a = \frac{F}{m} = \frac{5000 \ N}{800 \ kg} = 6{,}25 \ m/s^2$

$$\underline{v(t=1) = v_0 + at = 6{,}25 \ m/s}$$

En ese caso, y poniendo el cronómetro de nuevo a cero justo en el momento en el que se para el motor

$$v_0 = v_{lim}$$

Y planteando la segunda ley de Newton.

$$\sum F_x = F_{res} = -bv^2 = m \frac{dv}{dt}$$

Separando variables

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{b}{m} dt$$

Integrando

$$\int_{v(t=0)}^{v(t)} v^{-2} dv = \int_0^t -\frac{b}{m} dt$$

$$-\frac{1}{v}\Big|_{v(t=0)}^{v(t)} = -\frac{b}{m} t$$

$$-\frac{1}{v(t)} + \frac{1}{v(t=0)} = -\frac{b}{m} t$$

$$\frac{1}{v_{lim}} - \frac{1}{v(t)} = -\frac{b}{m} t \Rightarrow \frac{1}{v(t)} = \frac{1}{v_{lim}} + \frac{b}{m} t$$

$$v(t) = \frac{1}{\frac{1}{v_{lim}} + \frac{b}{m} t}$$

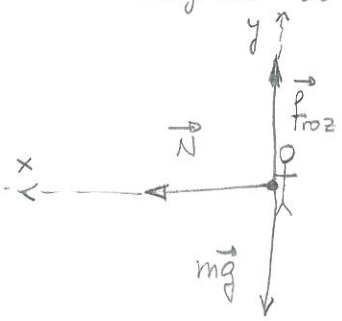
¿Cuánto tiempo tardaría en reducir la velocidad a la mitad?

$$\frac{v_{lim}}{2} = \frac{1}{\frac{1}{v_{lim}} + \frac{b}{m} t}$$

$$\frac{v_{lim}}{2} \left(\frac{1}{v_{lim}} + \frac{b}{m} t \right) = \frac{1}{2} + \frac{v_{lim}\, b}{2m} t = 1 \Rightarrow \boxed{t =} \frac{2m \left(1 - \frac{1}{2}\right)}{v_{lim}\, b} = 0,8

Un juego mecánico de un parque de atracciones consta de un gran cilindro vertical que gira con la velocidad suficiente para que cualquier persona en su interior se mantenga pegada a la pared cuando el piso se deja caer. El coeficiente de rozamiento estático entre la persona y el cilindro es μ_s y el radio del cilindro es R. Determinar el periodo de revolución necesario para que la persona no caiga. $R=4m$, $\mu_s=0{,}4$ ¿Cuántas vueltas por minuto hace el cilindro.

Dibujamos el diagrama de cuerpo aislado de la persona.



como la persona tiende a deslizar hacia abajo, la fuerza de rozamiento apunta hacia arriba.

la normal apunta hacia el centro del cilindro y es la responsable de que la persona siga un movimiento circular (que supondremos uniforme)

$$\Sigma F_x = N = m\frac{v^2}{R}$$

$$\Sigma F_y = f_{roz} - mg = \mu N - mg = m\mu\frac{v^2}{R} - mg = 0$$

suponemos que lleva la velocidad límite para que la persona no caiga.

$$\Longrightarrow \quad m\mu\frac{v^2}{R} - mg = 0 \Rightarrow \mu\frac{v^2}{R} - g = 0 \Rightarrow v = \sqrt{R\cdot g/\mu}$$

Un periodo es el tiempo que tarda la persona en recorrer un giro completo de longitud $2\pi R$, luego

$$v = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow \frac{2\pi R}{T} = \sqrt{Rg/\mu} \Rightarrow T = \frac{2\pi R}{\sqrt{Rg/\mu}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R\mu}{g}} = 2{,}54s$$

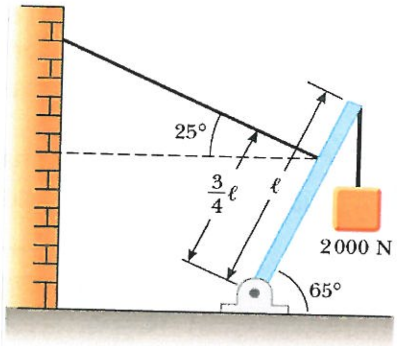
y el número de revoluciones por minuto es de

$$\#\frac{rev}{min} = \frac{1rev}{2{,}54s}\cdot\frac{60s}{1min} = \underline{\underline{23{,}6\ \frac{rev}{min}}}$$

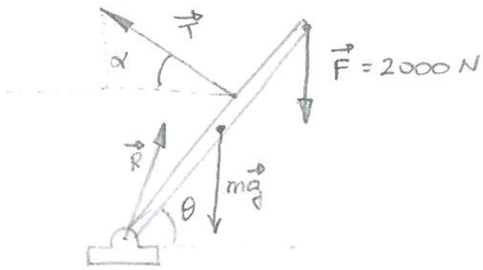
Una viga de izamiento uniforme de 1200 N de peso, está sostenida por un cable como se ve en la figura. La viga hace pivote en la parte inferior, y un cuerpo de 2000 N cuelga en su parte superior

(a) Encuentre la tensión del cable.

(b) Encuentre la reacción ejercida por el piso sobre la viga.



(a) Dibujamos todas las fuerzas que actúan sobre la viga.



Tomamos como origen de coordenadas el pivote, eje x horizontal (sentido positivo hacia derecha), eje y vertical (sentido positivo hacia arriba)

Identificamos además el punto de aplicación de cada una de las fuerzas.

$\vec{R} \longrightarrow (0 \quad 0 \quad 0)$

$m\vec{g} \longrightarrow \left(\frac{l}{2}\cos\theta, \ \frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta, \ 0\right)$

Como la barra es homogénea, el centro de masas estará en su centro.

$\vec{F} \longrightarrow (l\cos\theta, \ l\operatorname{sen}\theta, \ 0)$

$\vec{T} \longrightarrow \left(\frac{3l}{4}\cos\theta, \ \frac{3l}{4}\operatorname{sen}\theta, \ 0\right)$

Para que la barra esté en equilibrio, $\sum \vec{F} = 0$, $\sum \vec{\tau} = 0$

Proyectando las fuerzas sobre los ejes.

$$\sum F_x = R_x - T\cos\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = R_y + T\operatorname{sen}\alpha - mg - F = 0 \qquad (2)$$

Calculamos el momento asociado a cada una de las fuerzas.

$$\vec{r} \times \vec{R} = 0$$

$$\vec{r} \times m\vec{g} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{l}{2}\cos\theta & \frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} = -\frac{mgl}{2}\cos\theta \ \vec{k}$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ l\cos\theta & l\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & -F & 0 \end{vmatrix} = -Fl\cos\theta \ \vec{k}$$

$$\vec{r} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{3l}{4}\cos\theta & \frac{3l}{4}\operatorname{sen}\theta & 0 \\ -T\cos\alpha & T\operatorname{sen}\alpha & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{3Tl}{4}\cos\theta\operatorname{sen}\alpha + \frac{3Tl}{4}\operatorname{sen}\theta\cos\alpha\right)\vec{k}$$

Luego el momento total toma el valor

$$\frac{3T\cancel{l}}{4}\left(\cos\theta\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\theta\cos\alpha\right) - \frac{mg\cancel{l}}{2}\cos\theta - F\cancel{l}\cos\theta = 0$$

Despejando T

$$\underline{T} = \frac{4}{3(\cos\theta\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\theta\cos\alpha)}\left(\frac{mg}{2}\cos\theta + F\cos\theta\right) = \underline{1465,07 \ N}$$

$mg = 1200\,N$

$F = 2000\,N$

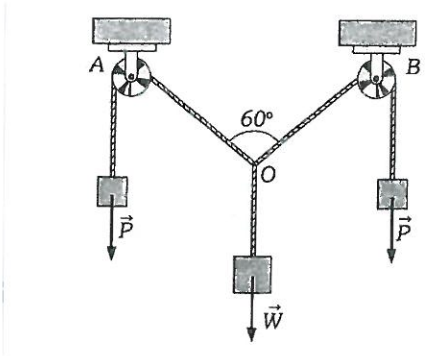
$\theta = 65°$

$\alpha = 25°$

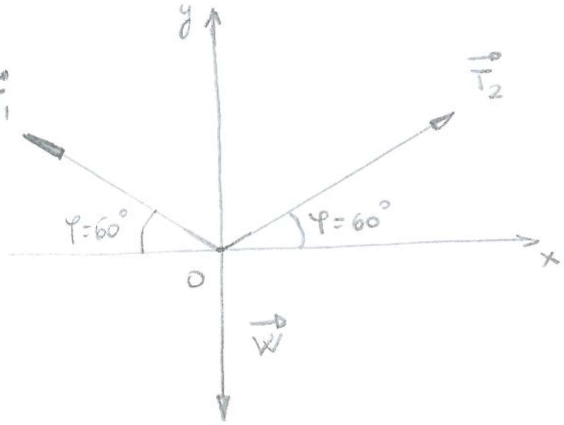
Sustituyendo el valor de T en (1) y (2):

$\underline{R_x} = T\cdot\cos\alpha = 1465,07 \cos 25 = \underline{1327,81\,N}$;; $\underline{R_y} = F + mg - T\operatorname{sen}\alpha = \underline{2580,83\,N}$

Un peso de 10 kg pende de una cuerda como indica la figura. Calcular los pesos iguales que hay que colgar a cada lado de la cuerda, que pasa por las poleas A y B, para que exista equilibrio. El rozamiento del eje de las poleas y de las cuerdas con las guías es inapreciable.



Dibujamos el diagrama de cuerpo aislado para el punto O



Como los pesos de los dos cuerpos que se cuelgan son iguales y la simetría existente, $T_1 = T_2 = P$

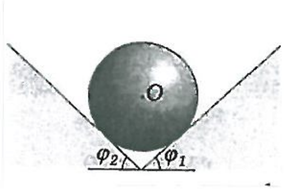
Para que el objeto esté en equilibrio,

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow$$

$$\Sigma F_x = -T_{1x} + T_{2x} = 0$$

$$\Sigma F_y = 2P \operatorname{sen} \varphi - W = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P}} = \frac{W}{2 \operatorname{sen} \varphi} = \frac{mg}{2 \operatorname{sen} \varphi} = \frac{10 \cdot 9{,}8}{2 \operatorname{sen} 60} \, \underline{\underline{N = 56{,}}}$$

La esfera de masa M de la figura descansa sobre dos planos inclinados lisos formando los ángulos φ_1 y φ_2 con la horizontal. Determinar las reacciones normales a los planos inclinados que actúan sobre la esfera.



Dibujamos el diagrama de cuerpo aislado para la esfera.

Tanto las fuerzas normales a los planos inclinados como el peso son concurrentes en O. Luego en equilibrio.

$$\alpha = 90^\circ - \varphi_2 \;;\; \beta = 90^\circ - \varphi_1$$

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + m\vec{g} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = N_2 \cdot \cos\alpha - N_1 \cdot \cos\beta = N_2 \cos(90-\varphi_2) - N_1 \cos(90-\varphi_1) \\ \quad = N_2 \operatorname{sen}\varphi_2 - N_1 \operatorname{sen}\varphi_1 = 0 \\ \Sigma F_y = N_2 \operatorname{sen}\alpha + N_1 \operatorname{sen}\beta - mg = \\ \quad = N_2 \operatorname{sen}(90-\varphi_2) + N_1 \operatorname{sen}(90-\varphi_1) - mg \\ \quad = N_2 \cos\varphi_2 + N_1 \operatorname{sen}\varphi_1 - mg = 0 \end{cases}$$

Luego las dos ecuaciones a resolver son:

$$N_2 \operatorname{sen}\varphi_2 - N_1 \operatorname{sen}\varphi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = N_2 \frac{\operatorname{sen}\varphi_2}{\operatorname{sen}\varphi_1}$$

$$N_1 \cos\varphi_1 + N_2 \cos\varphi_2 - Mg = 0$$

$$N_2 \frac{\operatorname{sen}\varphi_2 \cos\varphi_1}{\operatorname{sen}\varphi_1} + N_2 \cos\varphi_2 = Mg \;;\; N_2 \cdot \left(\frac{\operatorname{sen}\varphi_2 \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 \operatorname{sen}\varphi_1}{\operatorname{sen}\varphi_1} \right) = Mg$$

$$N_2 = \frac{Mg \operatorname{sen}\varphi_1}{\operatorname{sen}\varphi_2 \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 \operatorname{sen}\varphi_1} = \frac{Mg}{\operatorname{sen}\varphi_2 \operatorname{cotg}\varphi_1 + \cos\varphi_2}$$

$$N_1 = \frac{Mg \operatorname{sen}\varphi_2}{\operatorname{sen}\varphi_2 \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 \operatorname{sen}\varphi_1} = \frac{Mg}{\cos\varphi_1 + \operatorname{cotg}\varphi_2 \operatorname{sen}\varphi_1}$$