Solución 1

Problema 1 : Un velocista corre una carrera de 100 m en 10 s. Aproximar este movimiento suponiendo una aceleración constante en los primeros 15 m y una velocidad constante en los restantes 85 m. Determinar:
a) La velocidad final.
b) El tiempo necesario para completar los primeros 15 m.
c) El tiempo necesario para recorrer los restantes 85 m.
d) La aceleración en los primeros 15 m.

Solución:

Llamamos t_1 al tiempo que tarda en recorrer los primeros 15 m y t_2 al tiempo que tarda en recorrer los restantes 85 m, se cumple que

$$t_1 + t_2 = 10 \qquad [1]$$

En el primer tramo realiza un movimiento uniformemente acelerado por lo que la ecuación es: $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$, y como parte del reposo ($v_0 = 0$) se puede escribir:

$$15 = 1/2\ a\ t_1^2 \qquad [2]$$

Además, $v_f = a\ t_1$ por lo que sustituyendo la aceleración en la ecuación [2]:

$$15 = 1/2\ (v_f / t_1)\ t_1^2 = 1/2\ v_f\ t_1 \Rightarrow \quad t_1 = 30 / v_f \qquad [3]$$

En el segundo tramo el movimiento es un uniforme, por lo que la ecuación que hay que utilizar es $x = v\ t$, que en nuestro caso se transforma en:

$$85 = v_f\ t_2 \Rightarrow \quad t_2 = 85 / v_f \qquad [4]$$

Sustituyendo las ecuaciones [3] y [4] en la [1],

$$30/v_f + 85/v_f = 10 \Rightarrow 115/v_f = 10 \Rightarrow \boxed{v_f = 11.5 \text{ m/s}}$$

b) Utilizando la ecuación [3] $\boxed{t_1 = 30 / 11.5 = 2.61 \text{ s}}$

c) Utilizando la ecuación [4] $\boxed{t_2 = 85 / 11.5 = 7.39 \text{ s}}$

d) Como $\boxed{a = v_f / t_1 = 11.5 / 2.61 = 4.41 \text{ m/s}^2}$

Solución 2

Problema 1.- Un velocista corre una carrera de 100 m en 10 s. Aproximar este movimiento suponiendo una aceleración constante en los primeros 15 m y una velocidad constante en los restantes 85 m. Determinar: (a) la velocidad final, (b) el tiempo necesario para completar los 15 primeros metros, (c) el tiempo necesario para recorrer los restantes 85 m, (d) la aceleración en los primeros 15 m.

Podemos descomponer el movimiento del velocista en dos partes:

1º parte:	2º parte
Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.	Movimiento rectilíneo y uniforme
$x_{1,inicial} = 0$	$x_{2,inicial} = 15\ m$
$x_{1,final} = 15\ m$	$x_{2,final} = 100\ m$
$v_{1,inicial} = 0$	$v_2 = v_{1,final}$
$v_{1,final} = ?$	$a_2 = 0$
$a_1 = ?$	$t_2 = ?$
$t_1 = ?$	

Sabemos que el tiempo total son 10 s, luego

$$t_1 + t_2 = 10\ s$$

Por las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado sabemos que:

$$x_{1,final} = x_{1,inicial} + \underbrace{\cancel{v_{1,inicial}}}_{0} \cdot t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \Rightarrow (x_{1,final} - x_{1,inicial}) = \frac{1}{2} a_1 t_1^2$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = \frac{2\,(x_{1,final} - x_{1,inicial})}{t_1^2} \quad (1)$$

También sabemos que:

$$(v_{1,final})^2 = \cancel{(v_{1,inicial})^2} + 2a_1\,(x_{1,final} - x_{1,inicial})$$

$$\Rightarrow \quad (v_{1,final}) = \sqrt{2a_1(x_{1,final} - x_{1,inicial})} \quad (2)$$

Y por las ecuaciones del movimiento rectilíneo y uniforme:

$$x_{2,final} = x_{2,inicial} + v_2 \cdot t_2$$

$$(x_{2,final} - x_{2,inicial}) = v_{1,final} \cdot (10 - t_1)$$

$$v_2 = v_{1,final}$$

$$t_1 + t_2 = 10$$

$$v_{1,final} = \frac{(x_{2,final} - x_{2,inicial})}{10 - t_1} \qquad (3)$$

Sustituyendo la Ec. (1) en Ec. (2)

$$v_{1,final} = \sqrt{2 \cdot \frac{2(x_{1,final} - x_{1,inicial})}{t_1^2} \cdot (x_{1,final} - x_{1,inicial})}$$

$$= 2 \cdot \frac{(x_{1,final} - x_{1,inicial})}{t_1} \qquad (4)$$

Sustituyendo la Ec. (3) en la Ec. (4)

$$\frac{(x_{2,final} - x_{2,inicial})}{10 - t_1} = 2 \quad \frac{(x_{1,final} - x_{1,inicial})}{t_1}$$

Sustituyendo los datos del problema:

$$\frac{85}{10-t_1} = 2 \cdot \frac{15}{t_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{85}{10-t_1} = \frac{30}{t_1}$$

$$85 t_1 = 30 \cdot (10 - t_1) = 300 - 30 t_1$$

$$115 t_1 = 300 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_1 = \frac{300}{115} = 2.61 s}$$

Conocido t_1 podemos conocer:

$$\underline{\underline{a_1}} \underset{\uparrow}{=} \frac{2 \cdot 15}{(2.61)^2} = \underline{\underline{4.41 \ m/s^2}}$$

Ec. (1)

$$\underline{\underline{v_2 = v_{1,final}}} \underset{\uparrow}{=} \sqrt{2 \cdot 4{,}41 \quad 15} = \underline{\underline{11{,}50 \ m/s}}$$

Ec. (2)

$$\underline{\underline{t_2}} = 10 - t_1 = \underline{\underline{7.39 \ s}}$$

Problema 2.- Suponer que se diseña una pista de despegue para el uso de un avión particular. En el despegue la velocidad aumenta con aceleración constante de $4\ m/s^2$. hasta que el avión está suspendido cuando alcanza los $85\ m/s$. Si se quiere interrumpir el despegue, la velocidad del avión disminuye con aceleración constante de $5\ m/s^2$. Determinar la longitud de la pista que es necesaria para permitir al piloto interrumpir el despegue justo en el momento que podría comenzar a volar, sin salirse de la pista.

- Durante la primera parte del recorrido el avión acelera desde 0 hasta 85 m/s con aceleración constante de $4\ m/s^2$.

En hacer ésto, el avión invierte un tiempo t_1 de.

$$v_f^{(1)} = v_i^{(1)} + a^{(1)} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_f^{(1)} - v_i^{(1)}}{a^{(1)}} = \frac{85\ m/s}{4\ m/s^2} = 21,25\ s$$

Y durante ese tiempo recorre una distancia $x_f^{(1)}$ de.

$$x_f^{(1)} = x_i^{(1)} + v_i^{(1)} t_1 + \frac{1}{2} a^{(1)} t_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} a^{(1)} t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (21,25)^2 = 903,125\ m$$

- Durante la segunda parte del recorrido el avión frena desde 85 m/s hasta detenerse, con una aceleración constante de $-5\ m/s^2$.

En hacer esto, el avión invierte un tiempo t_2 de:

$$v_f^{(2)} = v_i^{(2)} + a^{(2)} t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{v_f^{(2)} - v_i^{(2)}}{a^{(2)}} = \frac{0 - 85}{-5} = 17\ s$$

Y durante ese tiempo recorre una distancia $x_f^{(2)}$ de:

$$x_f^{(2)} = x_i^{(2)} + v_i^{(2)} t_2 + \frac{1}{2} a^{(2)} t_2^2 =$$

$$= 85 \cdot 17 + \frac{1}{2}(-5) \cdot 17^2 = (1445 - 722,5)\ m = 722,5$$

La distancia total recorrida vale:

$$x = x_f^{(1)} + x_f^{(2)} = (903,125 + 722,5)\ m = \underline{1625,625\ m}$$

Problema 3, Solución 1 | Un objeto cae al suelo desde una altura h partiendo del reposo. Si en la segunda mitad del recorrido invierte 3s

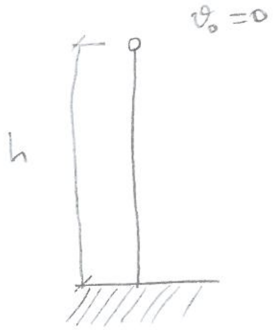
a) ¿Cuál es la velocidad con la que llega al suelo?

b) ¿Cuánto vale h?

Sea t el tiempo total de caída

Como se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado sin velocidad inicial podemos escribir:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$



donde: $x(t) = 0$

$x_0 = h$

$v_0 = 0$

$a = -g$

luego:

$$0 = h - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \underline{\underline{h = \frac{1}{2} g t^2}} \qquad (1)$$

En un tiempo $(t-3)$ la partícula recorre la mitad de la altura $\frac{h}{2}$, también con un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado sin velocidad inicial:

$$\underline{\underline{\frac{h}{2} = \frac{1}{2} g (t-3)^2}} \qquad (2)$$

Dividiendo (2) entre (1)

$$\frac{\frac{\cancel{h}}{2}}{\cancel{h}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{g} (t-3)^2}{\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{g} t^2} \Rightarrow \frac{(t-3)^2}{t^2} = \frac{1}{2}$$

$$t^2 - 6t + 9 = \frac{t^2}{2} \Rightarrow \frac{t^2}{2} - 6t + 9 = 0 \Rightarrow t^2 - 12t + 18 = 0$$

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 72}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{72}}{2} = \frac{12 \pm 6\sqrt{2}}{2} = 3 \cdot (2 \pm \sqrt{2})$$

La solución con el signo menos no tiene sentido físico puesto que daría un tiempo total menor que 3s, cuestión que es imposible puesto que el tiempo total > 3s

$$t = 3\left(2+\sqrt{2}\right)\ s$$

Sustituyendo este tiempo en (1).

$$\underline{\underline{h}} = \frac{1}{2}\, g \cdot t^2 = \frac{1}{2}\ 9.80\ \frac{m}{s^2} \cdot \left[3\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)\right]^2\ s^2$$

$$= \underline{\underline{514.06\ m}}$$

y para la velocidad.

$$v(t) = v_0 + a t$$

Como

$$\left.\begin{array}{l} v_0 = 0 \\ a = -g = -9.80\ m/s^2 \\ t = 3\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)\ s \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{v(t)}} = -\ 9.80\ \frac{m}{s^2}\ \left[3\left(2+\sqrt{2}\right)\right] s$$

$$= \underline{\underline{-100.38\ m/s}}$$

Problema 3, Solución 2

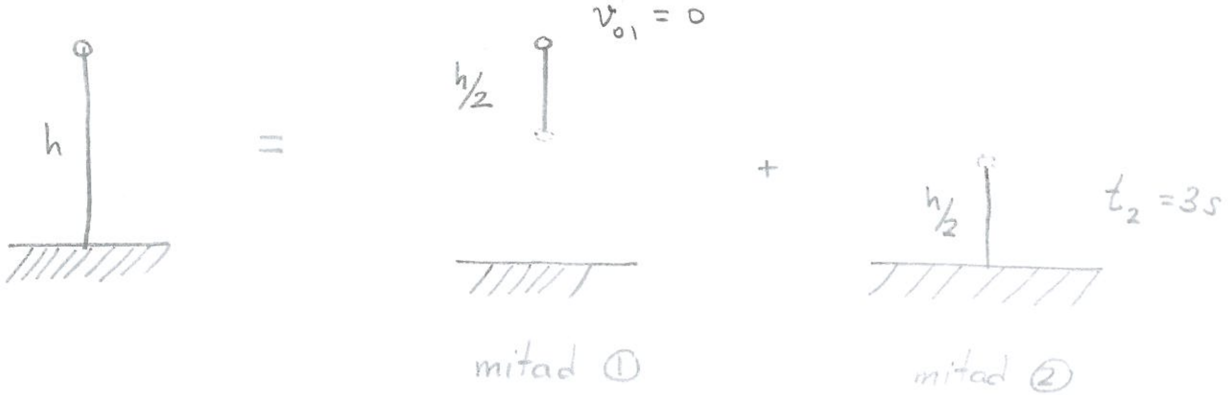
3) Un objeto cae al suelo desde una altura h partiendo del reposo

Si en la segunda mitad del recorrido invierte 3s

a) ¿Cuál es la velocidad con la que llega al suelo?

b) ¿Cuánto vale h?

Descomponemos la trayectoria del objeto en dos mitades:



La aceleración es la misma en los dos casos $a = -g = -9.80\ m/s^2$

• Conociendo la velocidad inicial y el desplazamiento recorrido, podemos conocer la velocidad con la que llegará el objeto al punto medio de la trayectoria

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

$$v^2 = 2a(x - x_0) \quad , \text{ ya que } v_0 = 0$$

$$v = -\sqrt{2a(x - x_0)}$$

(de las dos posibles soluciones de la raiz nos quedamos con la negativa, ya que la velocidad apunta hacia abajo).

$$v = -\sqrt{2\cdot(-g)\cdot(h/2 - h)} = -\sqrt{2g\frac{h}{2}} = -\sqrt{gh}$$

Esta será la velocidad inicial en la segunda mitad de la trayectoria

- En la segunda mitad de la trayectoria conocemos

  - la velocidad inicial: $v_{02} = -\sqrt{gh}$
  - la trayectoria recorrida: $\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x_0 = \frac{h}{2} \end{array}\right\}$ $x - x_0 = -\frac{h}{2}$
  - el tiempo: $t_2 = 3\,s$
  - el valor de la aceleración: $a = -g = 9.80\ m/s^2$

Con estos datos, podemos despejar h.

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$(x - x_0) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$-\frac{h}{2} = -\sqrt{gh}\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\frac{h}{2} - \sqrt{2g\frac{h}{2}}\, t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$\frac{h}{2} - \sqrt{2g}\,\sqrt{\frac{h}{2}}\, t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$\frac{h}{2} = u^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{h}{2}} = u$$

$$u^2 - \sqrt{2g}\, t\, u - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$u = \frac{+\sqrt{2g}\,t \pm \sqrt{2gt^2 + 2gt^2}}{2} = \frac{+\sqrt{2g}\,t \pm \sqrt{4gt^2}}{2}$$

$$= \frac{+\sqrt{2g}\,t \pm \sqrt{2g}\,(\sqrt{2}\,t)}{2} = \frac{\sqrt{2g}\,t \cdot (\sqrt{2} + 1)}{2}$$

$$= 16.03\,\sqrt{m}$$

$$h = 2u^2 = 514.06 \ m$$

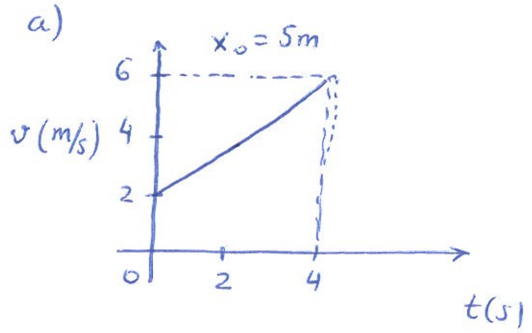
La velocidad con la que llega al suelo es.

$$v = v_0 + at$$

$$v = -\sqrt{gh} - g \cdot t = -100.38 \ m/s.$$

Problema 4.- Tres partículas describen los movimientos unidimensionales representados en las figuras. Determinar en cada caso las características del movimiento representado para cada una de ellas. $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$.

a)



La figura velocidad frente a tiempo es una línea recta.

Su pendiente es constante en todo instante de tiempo.

Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

$$\bar{a}_x \equiv \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i}$$

De los datos de la figura.

$t_i = 0\,s$ $\qquad$ $t_f = 4\,s$

$v_{xi} = 2\ m/s$ $\qquad$ $v_{xf} = 6\ m/s$

$$\bar{a}_x = \frac{6-2}{4}\ m/s^2 = 1\ m/s^2$$

Como además conocemos la posición y velocidad iniciales:

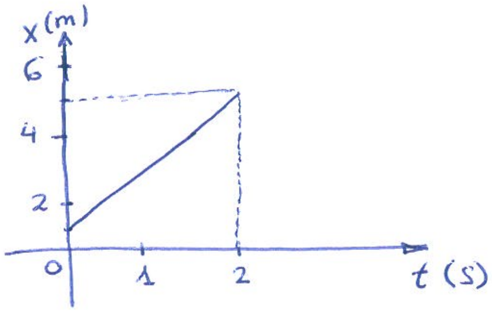
$v_{xi} = 2\ m/s$

$X_i = 5\ m$ $\qquad$ $t_i = 0$

$\Rightarrow \quad v_{xf} = v_{xi} + a_x(t_f - t_i) \;;\; v_{xf} = 2 + 1(t_f - t_i)\ m/s \underset{t_i=0}{=} 2 + t\ m/s$

$x_f = x_i + v_{xi}(t_f - t_i) + \frac{1}{2}a_x(t_f - t_i)^2 \;;\; x_f \underset{t_i=0}{=} 5 + 2t + \frac{1}{2}t^2\ m/s^2$

(b)

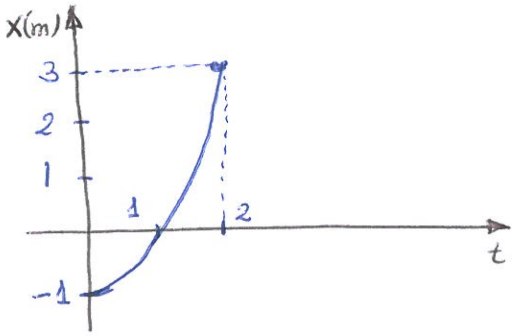


La posición aumenta linealmente, por lo que la velocidad es constante y la aceleración $\underline{a=0}$ (es un movimiento uniforme)

$$\underline{v(t)} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5-1}{2-0} = \underline{2 \text{ m/s}}$$

$x_0 = 1$ m $\Rightarrow$ $\underline{x(t) = (1 + 2t) \text{ m}}$

(c)



La posición aumenta de forma parabólica, por lo que es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

En la gráfica puede observarse que en $t=0$ la pendiente es $0 \Rightarrow v_0 = 0$

Además, $x_0 = -1$ m

por lo que para $t = 1$ s $\qquad 0 = -1 + \frac{1}{2} a \cdot 1^2 \Rightarrow \underline{a = 2 \text{ m/s}^2}$

Las ecuaciones para la posición y la velocidad son:

$\underline{v(t) = 2t \quad (\text{m/s})}$

$\underline{x(t) = -1 + t^2 \quad (\text{m})}$

Problema 5.- Un movimiento viene definido por $a = -kv$, siendo coincidentes los orígenes de espacio y tiempo, y estando animada la partícula en ese instante por una velocidad v_0.

Expresar v en función de t, espacio en función de t y velocidad en función del espacio. Representar gráficamente.

a) Por definición:

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv$$

$$\frac{dv}{v} = -k\,dt$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int k\,dt = -k\int dt$$

$$\ln v = -kt + C$$

$$v = e^{-kt+C} = e^{-kt}\, e^{C}$$

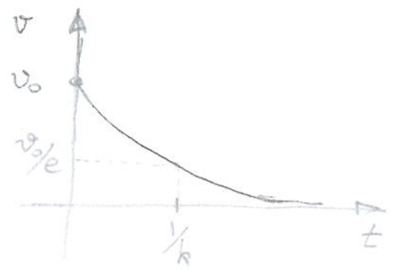
Para conocer la constante de integración, tenemos en cuenta las condiciones iniciales:

En $t=0$, $x(t=0)=0$ y $v(t=0) = v_0$

$$v(t=0) = e^{0} \cdot e^{C} = e^{C} = v_0$$

Por lo tanto

$$v(t) = v_0\, e^{-kt}$$



b) También por definición

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 \, e^{-kt}$$

$$dx = v_0 \, e^{-kt} dt$$

$$\int dx = \int v_0 \, e^{-kt} dt = v_0 \int e^{-kt} dt = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + C$$

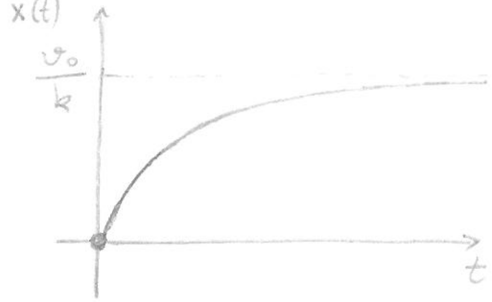
De nuevo, para conocer la constante de integración, hacemos uso de las coordenadas iniciales

$$x(t=0) = -\frac{v_0}{k} e^{0} + C = -\frac{v_0}{k} + C = 0$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{v_0}{k}$$

Luego

$$x(t) = \frac{v_0}{k} - \frac{v_0}{k} e^{-kt} = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$



c)

$$v(t) = v_0 \, e^{-kt}$$

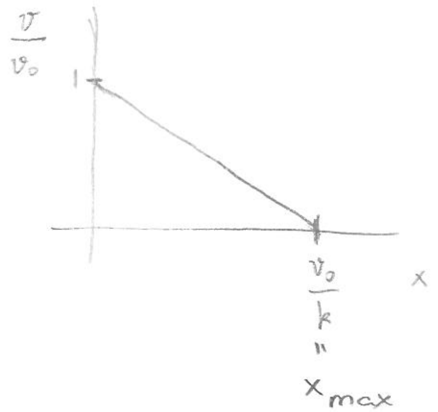
$$x(t) = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

Despejando t en la segunda ecuación:

$$e^{-kt} = 1 - \frac{kx}{v_0}$$

Y sustituyendo en la primera

$$v = v_0 \cdot \left(1 - \frac{kx}{v_0}\right) \Rightarrow \qquad \frac{v(x)}{v_0} = 1 - \frac{kx}{v_0}$$



Problema 6.-1 La aceleración de una partícula viene dada por $a = 9-3t^2$. Teniendo en cuenta que para $t=0$, $v=0$ y $s=-3m$, calcular:

(a) el tiempo para el que la velocidad sea de nuevo cero

Dada la aceleración podemos calcular la velocidad

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Despejando dv

$$dv = a\,dt$$

Integrando:

$$\int dv = \int a\,dt$$

$$v = \int 9-3t^2\,dt = 9t - \frac{3t^3}{3} + C = 9t - t^3 + C$$

La constante de integración se conoce a partir de las condiciones iniciales:

$$v(t=0) = C = 0$$

Podemos calcular en qué instantes la velocidad se anula:

$$v(t) = 9t - t^3 = t\cdot(9-t^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ 9-t^2=0 \Rightarrow \underline{\underline{t=3s}} \end{cases}$$

(b) la posición y la velocidad cuando $t = 4s$

Conocida la velocidad podemos calcular la posición:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v\,dt \Rightarrow \int dx = \int v\,dt$$

$$x = \int 9t - t^3\,dt = \frac{9t^2}{2} - \frac{t^4}{4} + C$$

De nuevo la constante de integración se calcula a partir de las condiciones iniciales:

$$x(t=0) = C = -3 \quad m$$

Luego.

$$x(t) = \frac{9}{2}t^2 - \frac{t^4}{4} - 3$$

Para $t = 4s$:

$$x(t=4) = \frac{9}{2}\cdot 16 - \frac{256}{4} - 3 = 72 - 64 - 3 = \underline{\underline{5\ m}}$$

$$v(t=4) = 9\cdot 4 - 64 = 36 - 64 = \underline{\underline{-28\ m/s}}$$

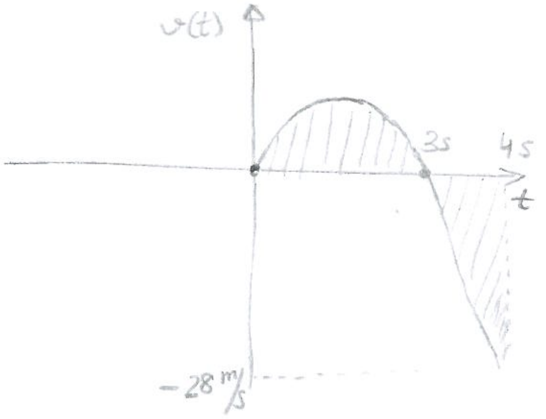
(c) Espacio recorrido entre $t=0$ y $t=4\ s$

El módulo del vector desplazamiento será el módulo de la diferencia de los vectores posición final e inicial.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x}(t=4s) = 5m\ \vec{i} \\ \vec{x}(t=0) = -3m\ \vec{i} \end{array}\right\} \quad \Delta\vec{x} = 5-(-3)\ \vec{i} = 8\ \vec{i}$$

$$|\Delta\vec{x}| = 8$$

La distancia recorrida viene dada por el área bajo la curva $|v(t)|$, donde $|v(t)|$ es el módulo de la velocidad



Para calcular la distancia recorrida tenemos que considerar las dos zonas sombreadas como positiva. La distancia siempre será una cantidad positiva que irá creciendo con el tiempo. Tenemos que cambiar el signo de la integral entre $t=3$ y 4

$$\int_{t=0}^{t=4} v(t)\,dt = \int_{t=0}^{t=3} (9t - t^3)\,dt - \int_{t=3s}^{t=4s} (9t - t^3)\,dt =$$

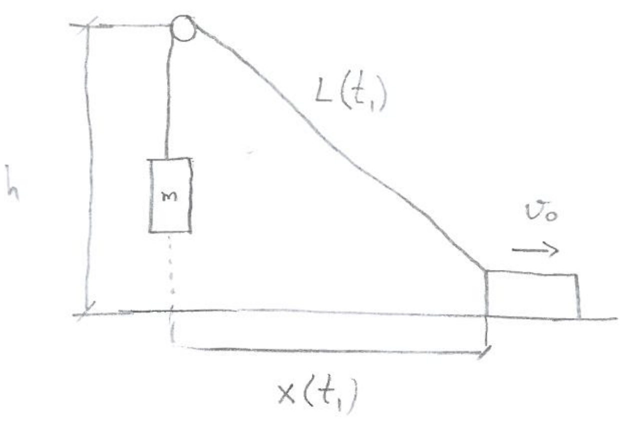
$$= \left.\frac{9t^2}{2} - \frac{t^4}{4}\right]_0^3 - \left.\left(\frac{9t^2}{2} - \frac{t^4}{4}\right)\right]_3^4 = \left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right) - \left(8 - \frac{81}{4}\right) = \underline{32{,}5\ \text{m}}$$

Problema 7.- Una masa m está conectada mediante un hilo inextensible a una deslizadera que puede moverse horizontalmente con velocidad v_0 constante. Si el hilo pasa por una polea situada a una altura h sobre la deslizadera, demostrar que la velocidad y la aceleración de la masa m vienen dadas por:

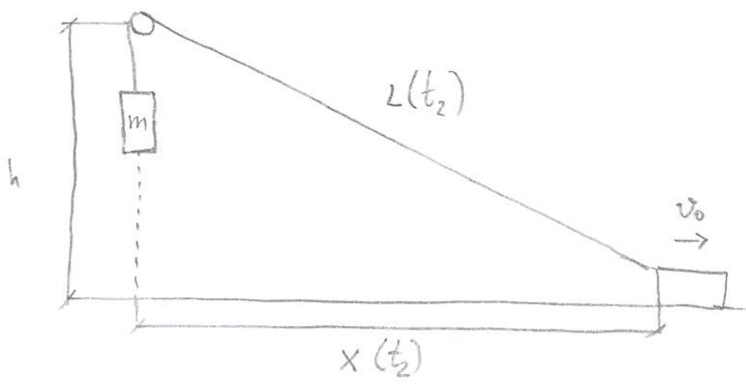
$$v = x\,(x^2+h^2)^{-1/2}\,v_0 \qquad y \qquad a = h^2\,(x^2+h^2)^{-3/2}\,v_0^2$$

siendo x la separación entre la vertical de la masa suspendida y la posición de la deslizadera.

En un instante t_1



En un instante t_2



La longitud L del hilo entre la deslizadera y la polea cambia con el tiempo.

Es precisamente ese cambio en la longitud de L lo que sube el objeto de masa m.

⇒ Para conocer la altura del objeto sólamente nos hace falta conocer como cambia L en función de t

$$L^2 = x^2 + h^2$$

$$L = (x^2 + h^2)^{1/2} = \left[(v_0 t)^2 + h^2\right]^{1/2} = \left(v_0^2 t^2 + h^2\right)^{1/2}$$

Pero en el problema no se nos pregunta por la altura del objeto sino por su velocidad y aceleración.

Necesitamos conocer como <u>cambia su altura</u> en función del tiempo para hallar su velocidad

$$v = \frac{dL(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_0^2 t^2 + h^2\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(v_0^2 t^2 + h^2\right)^{-1/2} \cdot \left(2 v_0^2 t\right)$$

$$= \frac{v_0^2 t}{\left(v_0^2 t^2 + h^2\right)^{1/2}} = \frac{v_0 t}{\left(v_0^2 t^2 + h^2\right)^{1/2}} \cdot v_0$$

$$= \frac{x\, v_0}{\left(v_0^2 t^2 + h^2\right)^{1/2}}$$

Y derivando de nuevo obtenemos la aceleración:

$$a = \frac{d}{dt}\left[\frac{v_0^2 t}{(v_0^2 t^2 + h^2)^{1/2}}\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left[(v_0^2 t) \cdot (v_0^2 t^2 + h^2)^{-1/2}\right] = v_0^2 \cdot (v_0^2 t^2 + h^2)^{-1/2} + v_0^2 t \cdot \left[-\frac{1}{\cancel{2}}(v_0^2 t^2 + h^2)^{-3/2} \cancel{2} v_0^2 t\right]$$

$$= v_0^2 \cdot (v_0^2 t^2 + h^2)^{-1/2} \left[1 - \frac{v_0^2 t^2}{v_0^2 t^2 + h^2}\right]$$

$$= v_0^2 (v_0^2 t^2 + h^2)^{-1/2} \cdot \frac{h^2}{(v_0^2 t^2 + h^2)} =$$

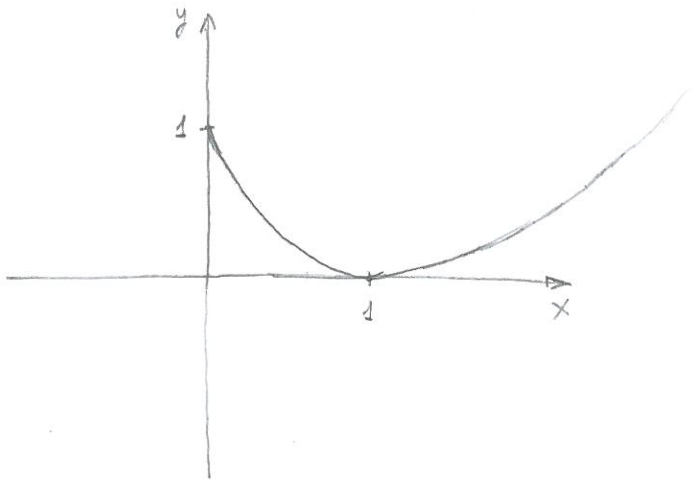
$$= \frac{h^2 v_0^2}{(v_0^2 t^2 + h^2)^{3/2}}$$

Problema 8.- Las coordenadas de un cuerpo en movimiento son $x = t^2$, $y = (t-1)^2$.

a) Encontrar la ecuación de la trayectoria.

$$x(t) = t^2 \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{x}$$

$$y(t) = (t-1)^2 = t^2 - 2t + 1 \qquad = \quad x - 2\sqrt{x} + 1$$



b) ¿Cuándo se tiene la velocidad mínima?

$$\vec{r} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$$

$$\vec{r} = t^2\,\vec{i} + (t^2 - 2t + 1)\,\vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\,\vec{i} + (2t-2)\,\vec{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(2t)^2 + (2t-2)^2} = \sqrt{4t^2 + 4t^2 + 4 - 8t} = \sqrt{8t^2 - 8t + 4}$$

$$= \sqrt{4\cdot(2t^2 - 2t + 1)} = 2\sqrt{(2t^2 - 2t + 1)}$$

La celeridad será mínima cuando:

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0 \qquad\qquad \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2\cdot(2t^2 - 2t + 1)^{1/2}\right) =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}(2t^2 - 2t + 1)^{-1/2}\cdot(4t-2) = \frac{4t-2}{\sqrt{(2t^2 - 2t + 1)}}$$

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4t - 2 = 0 \quad \Rightarrow \underline{t} = \frac{2}{4} = \underline{0.5\,s}$$

c) ¿Cuál es la aceleración tangencial y normal para cualquier instante?

El módulo de la aceleración tangencial vale $\frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{4t-2}{\sqrt{(2t^2-2t+1)}}$

El módulo de la aceleración normal vale $\frac{v^2}{r}$

$r \rightarrow$ radio de curvatura en cada instante (magnitud desconocida)

Sin embargo, sabemos que

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$$

$$\Rightarrow \quad a^2 = a_t^2 + a_r^2 \quad \Rightarrow \quad a_r^2 = a^2 - a_t^2 \quad \Rightarrow \quad a_r = \sqrt{a^2 - a_t^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$\underline{\underline{a_r}} = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{8 - \frac{(4t-2)^2}{2t^2-2t+1}} = \sqrt{\frac{\cancel{16t^2} - \cancel{16t} + 8 - \cancel{16t^2} + \cancel{16t} - 4}{2t^2-2t+1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{2t^2-2t+1}} = \underline{\underline{\frac{2}{\sqrt{2t^2-2t+1}}}}$$

Problema 9.- Se dispara un proyectil de manera que su alcance horizontal es 3 veces su altura máxima. ¿Cuál es el ángulo de tiro?

— o — o —

La altura máxima viene dada por:

$$h = \frac{v_i^2 \operatorname{sen}^2\theta_i}{2g},$$

donde v_i y θ_i son, respectivamente, el módulo de la velocidad inicial y el ángulo que forma con el eje de las x, y g es el valor de la aceleración de la gravedad

El alcance máximo está determinado por:

$$R = \frac{v_i^2 \operatorname{sen} 2\theta_i}{g}$$

Si el alcance horizontal es tres veces la altura máxima:

$$R = 3h$$

$$\frac{\cancel{v_i^2} \operatorname{sen}2\theta_i}{\cancel{g}} = \frac{3\cancel{v_i^2} \operatorname{sen}^2\theta_i}{2\cancel{g}}$$

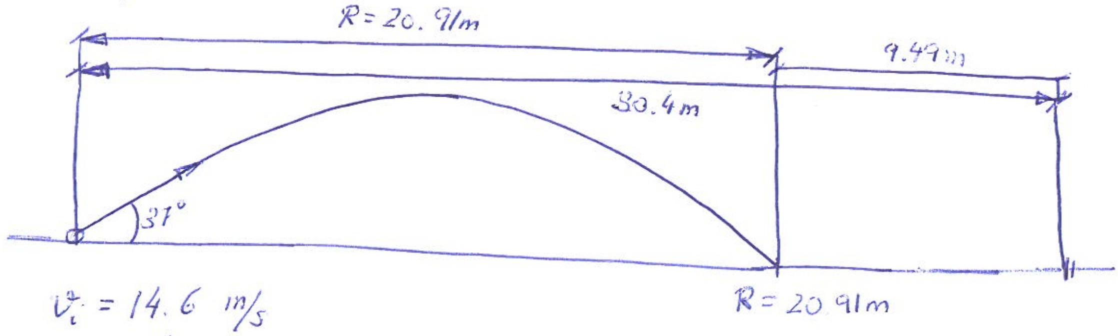
$$\operatorname{sen} 2\theta_i = \frac{3}{2}\operatorname{sen}^2\theta_i$$

Como $\operatorname{sen} 2\theta_i = 2\operatorname{sen}\theta_i \cos\theta_i$

$$2\cancel{\operatorname{sen}\theta_i}\cos\theta_i = \frac{3}{2}\operatorname{sen}^{\cancel{2}}\theta_i \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\theta_i}{\cos\theta_i} = \tan\theta_i = \frac{4}{3}$$

$$\underline{\underline{\theta_i}} = \operatorname{arc}\tan\frac{4}{3} = \underline{\underline{53.13^\circ}}$$

Problema 10.- Un jugador de fútbol lanza un balón a una velocidad de 14.6 m/s y con una inclinación de 37° con la horizontal. Un segundo jugador que se encuentra a una distancia de 30.4 m del primero en la dirección del lanzamiento empieza a correr en el mismo momento en que el otro lo lanza. ¿Qué velocidad debe llevar este segundo jugador para coger el balón justo cuando llegue al suelo



$v_i = 14.6$ m/s

$\theta_i = 37°$

El alcance máximo del balón viene dado por

$$R = \frac{v_i^2 \text{ sen } 2\theta_i}{g},$$

donde v_i es el módulo de la velocidad inicial, θ_i el ángulo que forma la velocidad inicial con el eje x y g es el valor de la aceleración de la gravedad.

El tiempo que tarda en recorrer esa distancia es

$$t = \frac{2\, v_i \text{ sen } \theta_i}{g}$$

Sustituyendo los datos del problema:

$R = 20.91$ m $\qquad t = 1.79$ s

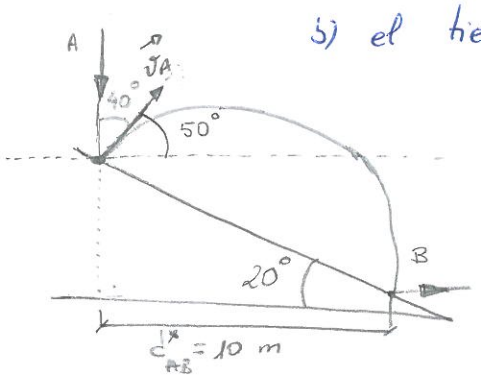
El segundo corredor está situado a 30.4 m del primero. Es decir, a 9.49 m del punto en el que el balón tocará el suelo.

Tiene que recorrer esa distancia en 1.79 s, por lo que su velocidad debe ser:

$$v_{corredor} = \frac{9.49}{1.79} \text{ m/s} = 5.30 \text{ m/s}.$$

El sentido de la velocidad será negativo en el eje x

Problema II-1 Desde la vertical se deja caer una pelota sobre el punto de un plano que tiene una inclinación de 20°. La dirección del rebote forma un ángulo de 40° con la vertical. Sabiendo que el próximo rebote es en B, calcular a) la velocidad de la pelota al salir de A.
b) el tiempo que tarda la pelota en ir de A a B.



SOLUCIÓN I

Si la dirección de rebote forma 40° con la vertical entonces forma 50° con la horizontal.

Podemos descomponer la velocidad de la pelota al salir de A en dos componentes:

$$v_{Ax} = |\vec{v}_A| \cdot \cos 50$$

$$v_{Ay} = |\vec{v}_A| \cdot \operatorname{sen} 50$$

- A lo largo de la dirección x la pelota no está acelerada, luego la componente de la velocidad en esa dirección permanece constante.

Podemos calcular el tiempo que tarda la pelota en ir desde A hasta B sin más que dividir la distancia a lo largo de x que separa A y B, d^x_{AB}, por la velocidad a lo largo de x:

$$t = \frac{d^x_{AB}}{v_{Ax}} = \frac{d^x_{AB}}{|\vec{v}_A| \cdot \cos 50}$$

- A lo largo de y, la pelota sigue un movimiento uniformemente acelerado del cuál conocemos:

$$y_{final} = 0$$

$$y_{inicial} = d_{AB} \cdot \tan 20 \qquad \left(\tan 20° = \frac{y_{inicial}}{d^x_{AB}}\right)$$

$$v_{Ay} = |\vec{v}_A| \cdot \operatorname{sen} 50$$

$$a_y = -g$$

$$t = \frac{d^x_{AB}}{|\vec{v}_A| \cdot \cos 50}$$

Como:

$$y_{final} = y_{inicial} + v_{oy} t + \frac{1}{2} a t^2$$

Entonces:

$$0 = \cancel{d_{AB}^{x}} \cdot \tan 20 + \cancel{|\vec{v}_A|} \cdot sen 50 \frac{\cancel{d_{AB}^{x}}}{\cancel{|\vec{v}_A|} \cdot \cos 50} - \frac{1}{2} g \frac{d_{AB}^{x\,\cancel{2}}}{|\vec{v}_A|^2 \cdot \cos^2 50}$$

$$(\tan 20 + \tan 50) = \frac{1}{2} g \frac{d_{AB}^{x}}{|\bar{v}_A|^2 \cos^2 50}$$

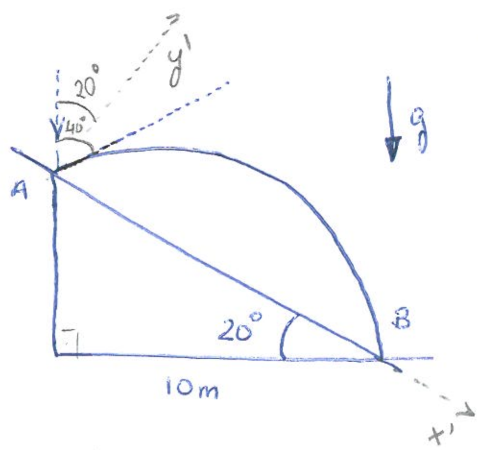
$$|\bar{v}_A| = \sqrt{\frac{1}{2} g \cdot \frac{d_{AB}^{x}}{\cos^2 50 \cdot (\tan 20 + \tan 50)}}$$

$$\underline{\underline{|\bar{v}_A|}} = \sqrt{\frac{1}{2}\ 9.80 \frac{10}{\cos^2 50 \cdot (\tan 20 + \tan 50)}} = \underline{\underline{8.73\ m/s}}$$

Conocido el módulo de la velocidad al salir del punto A podemos conocer el tiempo necesario en ir desde A hasta B.

$$t = \frac{d_{AB}^{x}}{|\bar{v}_A| \cdot \cos 50} = \frac{10}{8.73 \cdot \cos 50} = \underline{\underline{1.78\ s}}$$

Problema 11.- Desde la vertical se deja caer una pelota sobre el punto de un plano que tiene una inclinación de 20°. La dirección del rebote forma un ángulo de 40° con la vertical. Sabiendo que el próximo rebote es en B, calcular

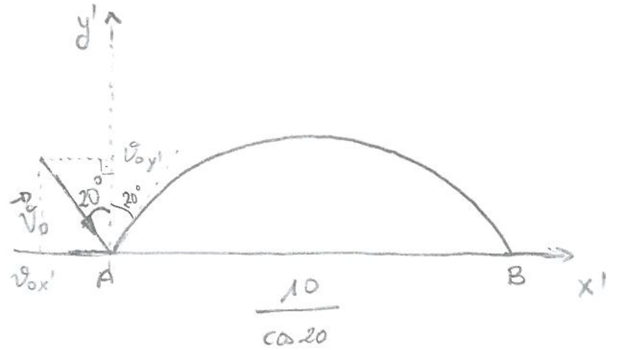


a) la velocidad de la pelota al salir de A.

b) el tiempo que emplea la pelota en ir de A a B.

SOLUCIÓN 2

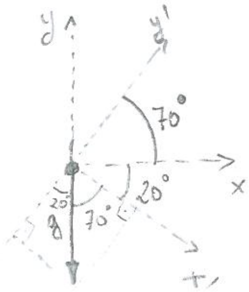
En el sistema de coordenadas x', y':



La distancia AB vale:

$$\cos 20 = \frac{10}{d_{AB}} \Rightarrow d_{AB} = \frac{10}{\cos 20}$$

pero la aceleración tendrá ahora una componente a lo largo de x' y otra a lo largo de y'.



$$g_{x'} = g \operatorname{sen} 20 = g \cos 70$$

$$g_{y'} = -g \cos 20 = -g \operatorname{sen} 70$$

Y la velocidad en el punto A también tendrá una componente a lo largo de x y una componente a lo largo de y.

$$v_{ox'} = v_0 \operatorname{sen} 20$$

$$v_{oy'} = v_0 \cdot \cos 20$$

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a} \cdot t \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = (v_{ox'} + g_{x'} t)\, \vec{i} + (v_{oy'} - g_{y'} t) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0} t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \quad \Rightarrow \vec{r} = \left(v_{ox'} t + \frac{1}{2} g_{x'} t^2\right) \vec{i} + \left(v_{oy'} t - \frac{1}{2} g_{y'} t^2\right) \cdot \vec{j}$$

En la posición de máximo alcance $y' = 0$

$$\Rightarrow \quad v_{oy'} t - \frac{1}{2} g_{y'} t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{oy} = \frac{1}{2} g_{y'} t \quad ;; \quad t = \frac{2 v_{oy'}}{g_{y'}}$$

Conocido el tiempo que tarda la partícula en alcanzar la posición de máximo alcance, podemos calcular la distancia de máximo alcance:

$$R = v_{ox'} \cdot \frac{2 v_{oy'}}{g_{y'}} + \frac{1}{2} g_{x'} \cdot \left(\frac{2 v_{oy'}}{g_{y'}}\right)^2 =$$

$$= \frac{2 v_{ox'} v_{oy'}}{g_{y'}} + \frac{2 v_{oy'}^2 g_{x'}}{g_{y'}^2}$$

Como

$$R = \frac{10}{\cos 20}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{ox'} = v_0 \cdot \operatorname{sen} 20 \\ v_{oy'} = v_0 \cdot \cos 20 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} g_{x'} = g \cos 70 = g \cdot \operatorname{sen} 20 \\ g_{y'} = -g \cdot \operatorname{sen} 70 = -g \cdot \cos 20 \end{array} \right.$$

$$\frac{10}{\cancel{\cos 20}} = \frac{2 v_0^2 \operatorname{sen} 20 \cos 20}{g \cdot \cancel{\cos 20}} + \frac{2 v_0^2 \cos^2 20 \cdot \cancel{g} \operatorname{sen} 20}{g^{\cancel{2}} \cos^{\cancel{2}} 20}$$

$$10 = \frac{2}{g} v_0^2 \cdot \left(\operatorname{sen} 20 \cos 20 + \cos 20 \operatorname{sen} 20\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_0^2 = \frac{10 g}{2} \cdot \frac{1}{2 \operatorname{sen} 20 \cos 20} = 76.23 \ m^2/s^2$$

$$v_0 = \sqrt{76.23} \ m/s = 8.73 \ m/s$$

Una vez conocido el módulo de la velocidad inicial, podemos conocer la aceleración.

$$t = \frac{2\, v_{oy'}}{g_{y'}} = \frac{2 \ v_0 \ \cancel{\cos 20}}{g \ \cancel{\cos 20}} = 1.78 \ s$$

Problema 12-1 Buscar la trayectoria, velocidad y aceleración con sus componentes intrínsecas en el movimiento de un punto cuyas coordenadas tienen las siguientes ecuaciones horarias:

$$x = 5t \qquad y = 9t, \qquad z = -25t^2 - 3t + 8$$

$$\vec{r}(t) = (5t)\cdot\vec{i} + (9t)\cdot\vec{j} + (-25t^2 - 3t + 8)\vec{k}$$

Derivando obtenemos la velocidad:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 5\vec{i} + 9\vec{j} + (-50t - 3)\vec{k}$$

Derivando de nuevo obtenemos la aceleración:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -50\vec{k}$$

El módulo de la componente tangencial en cada punto vendrá dado por:

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

donde $|\vec{v}|$ es el módulo de la velocidad en cada instante

$$|\vec{v}| = \sqrt{5^2 + 9^2 + (-50t - 3)^2} = \sqrt{25 + 81 + 2500t^2 + 9 + 300t}$$

$$= \sqrt{2500t^2 + 300t + 115}$$

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{5000t + 300}{2\sqrt{2500t^2 - 300t + 115}} = \frac{2500t + 150}{\sqrt{2500t^2 - 300t + 115}}$$

La componente normal se calculará a partir de la relación:

$$|\vec{a}|^2 = a_t^2 + a_n^2 \Rightarrow a_n = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_t^2}$$

- Problema 13 **Un cuerpo inicialmente en reposo ($\theta_0 = 0, \omega_0 = 0,$ en $t_0 = 0$) es acelerado en una trayectoria circular de radio 1.3 m de acuerdo con la ecuación $\alpha = 120t^2 - 48t + 16$ (todo en unidades del SI). Hallad:**

(a) La velocidad angular en función del tiempo,
(b) La posición angular como función del tiempo,
(c) Las componentes tangencial y normal de la aceleración

Solución:

(a) Integrando la aceleración angular teniendo en cuenta las condiciones iniciales:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\omega = \alpha\, dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^\omega d\omega = \int_0^t \alpha\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \int_0^t \left(120t^2 - 48t + 16\right) dt = 40t^3 - 24t^2 + 16t.$$

(b) Integrando ahora la velocidad angular:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\theta = \omega\, dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^\theta d\theta = \int_0^t \omega\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \int_0^t \left(40t^3 - 24t^2 + 16t\right) dt = 10t^4 - 8t^3 + 8t^2.$$

(c) Las componentes intrínsecas de la aceleración vendrán dadas por:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\omega\right) = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha = 1.3\left(120t^2 - 48t + 16\right),$$

$$a_r = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2 = 1.3\left(40t^3 - 24t^2 + 16t\right)^2.$$

(Como se indica en el enunciado las unidades utilizadas en el problema son las del SI).

Problema 14.-1 Un automóvil parte del reposo en una vía circular de 400 m de radio y se mueve con un movimiento uniformemente acelerado hasta que a los 50 s de iniciada la marcha alcanza la velocidad de 72 km/h, desde cuyo momento se conserva la velocidad. Calcular:

(a) la a_t en la primera etapa del movimiento

La aceleración tangencial es la responsable del cambio en la celeridad del objeto. Como en la primera parte la aceleración es uniforme, la aceleración media es igual a la aceleración instantánea, con lo que:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{20 \ m/s}{50 \ s} = 0,4 \ m/s^2$$

en este movimiento la aceleración media es igual a la instantánea

(b) la a_N, la total y la longitud recorrida en los 50 s.

La aceleración normal a los 50 s vendrá dada por:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{20^2 \ m^2/s^2}{400 \ m} = 1 \ m/s^2$$

El módulo de la aceleración total:

$$a = \sqrt{a_N^2 + a_t^2} = \sqrt{1^2 + 0,4^2} = 1,077 \ m/s^2$$

En esos 50 s, la aceleración angular viene dada por:

$$\alpha = \frac{a_t}{R} = \frac{0,4 \ m/s^2}{400 \ m} = 10^{-3} \ s^{-2}$$

El ángulo total recorrido vale:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2} 10^{-3} \cdot 50^2 = 1,25 \text{ rad}$$

$\theta_0 = 0$

$\omega_0 = 0$

Por lo que la longitud de arco recorrida es $s = R \cdot \theta = 400 \cdot 1,25 \ m = 500 \ m$

(c) la velocidad angular media en la primera etapa y la velocidad angular a los 50 s.

Por definición de velocidad angular media:

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{1,25}{50} \ rad/s = 0.025 \ rad/s$$

La velocidad angular instantánea a los 50 s es:

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t = \alpha t = 10^{-3} \cdot 50 \ rad/s = 0,05 \ rad/s$$

(d) el tiempo que tarda el automóvil en dar 100 vueltas al circuito.

100 vueltas al circuito son $2\pi \cdot 100 = 200\pi$ rad

Durante los primeros 50 s el automóvil recorre 1,25 rad, por lo que los restantes $(200\pi - 1,25)$ rad los recorre a velocidad angular constante de 0,05 rad/s. A este tiempo lo llamamos t_2:

$$t_2 = \frac{200\pi - 1,25}{0,05} = 12541 \ s$$

El tiempo total será t_2 más $50 \ s = t_1$

$$\underline{t} = t_1 + t_2 = \underline{12\,591 \ s}$$

Problema 15.- Un volante gira en torno a su eje a razón de 3000 r.p.m. Un freno le para en 20 s. Calcular la α supuesta constante y el número de vueltas dadas hasta que el volante se detiene. Suponiendo que el volante tiene 2 dm de diámetro, calcular las aceleraciones tangencial y normal (centrípeta) en un punto de su periferia una vez dadas 100 vueltas y la aceleración resultante en tal punto.

La celeridad angular inicial vale:

$$\omega_0 = 3000 \ \frac{\text{revoluciones}}{\text{minuto}} \cdot \frac{2\pi \ \text{rad}}{1 \ \text{revolución}} \cdot \frac{1 \ \text{minuto}}{60 \ s} = 100 \ \pi \ \text{rad}/s$$

Suponiendo que la aceleración angular es contante:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t,$$

dónde ω es la celeridad angular final ($\omega = 0$, ya que el volante se detiene)

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{-100 \ \pi}{20 \ s} \ \text{rad}/s^2 = -5\pi \ \text{rad}/s^2$$

Conocidas la celeridad angular inicial y la aceleración angular, podemos calcular el ángulo descrito:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\varphi = 100 \ \pi \cdot 20 + \frac{1}{2}(-5\pi) \cdot 20^2 \ \text{rad} = (2000 \ \pi - 1000\pi) \ \text{rad}$$

$$= 1000 \ \pi \ \text{rad} = 1000 \ \pi \ \text{rad} \cdot \frac{1 \ \text{revolución}}{2\pi \ \text{rad}} = 500 \ \text{revoluciones}.$$

Tras dar 100 vueltas, el girante habrá rotado $2\pi \cdot 100$ rad $= 200\pi$ rad.

Si conocemos la aceleración angular constante, α, la velocidad inicial angular, y el ángulo recorrido podemos conocer la velocidad angular final: (en este caso, después de haber dado 100 vueltas.

$$\omega_f^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_0)$$

$\omega_0 = 100\pi$ rad/s $\qquad \alpha = -5\pi$ rad/s^2

$\theta_0 = 0 \qquad \theta_f = 200\pi$ rad

$$\omega_f^2 = (100\pi)^2 + 2 \cdot (-5\pi) \cdot (200\pi) \ \mathrm{rad^2/s^2}$$

$$= 10000\pi^2 - 2000\pi^2 \ \mathrm{rad^2/s^2}$$

$$= 8000\pi^2 \ \mathrm{rad^2/s^2}$$

$$\omega_f = \sqrt{8000}\,\pi \ \mathrm{rad/s}$$

En ese momento la velocidad lineal en un punto de la periferia es:

$$v_f = \omega_f \cdot R = \sqrt{8000}\,\pi \cdot (0.1) \ \mathrm{m/s}$$

La aceleración centrípeta tomará un valor en ese momento de

$$a_c = \frac{v_f^2}{R} = \frac{\omega_f^2 R^2}{R} = \omega_f^2 \cdot R = 8000\pi^2 \cdot 0.1 \ \mathrm{m/s^2} = 800\pi^2 \ \mathrm{m/s^2}$$

La aceleración tangencial será igual a la aceleración angular por el radio.

$$a_t = \alpha \cdot R = -5\pi \cdot 0.1 \ \mathrm{m/s^2} = -0.5\pi \ \mathrm{m/s^2}$$

Y el módulo de la aceleración total es:

$$a^2 = a_c^2 + a_t^2 \Rightarrow a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{(800\pi^2)^2 + (0.5\pi)^2} \approx \sqrt{(800\pi^2)^2} \approx 800\pi^2 \ \mathrm{m/s^2}$$