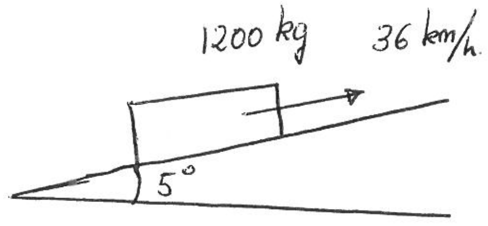
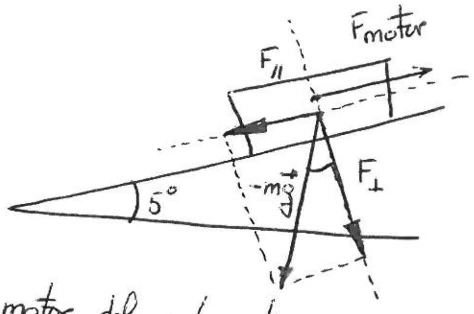
Problema 1: Un automóvil con masa de 1200 kg se mueve hacia arriba por una colina inclinada 5° con una velocidad de 36 km/h. Calcular a) el trabajo realizado por el motor en 5 minutos, b) la potencia desarrollada. Despreciar el trabajo de rozamiento.



Sólamente la componente del peso paralela a la rampa realiza trabajo. Ni la componente perpendicular del peso ni la normal realizan trabajo por ser perpendiculares al desplazamiento:



$$F_\perp = -mg \cdot \cos 5° = -1.173 \cdot 10^4 \ N$$

$$F_{//} = -mg \cdot \text{sen } 5° = -1.026 \cdot 10^3 \ N$$

$$|F_{motor}| = |F_{//}|$$

El motor del coche tiene que ejercer una fuerza sobre el coche de módulo igual a $F_{//}$ y de sentido opuesto para mantener el coche con velocidad constante (sin aceleración).

En 5 minutos el coche se habrá desplazado en la dirección paralela a la rampa; $\Delta x'$

$$\Delta x' = 36 \frac{km}{h} \cdot \frac{1 \ h}{3600 \ s} \cdot \frac{1000 \ m}{1 \ km} \cdot 300 \ s = 3000 \ m$$

Con lo que el trabajo realizado por la fuerza paralela a la rampa será:

$$\underline{\underline{W}} = F_{//} \cdot \Delta x' = +1.026 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3 \ J = \underline{\underline{3.078 \cdot 10^3 \ J}}$$

i) El motor realiza este trabajo en 5 minutos, con lo que la potencia desarrollada será:

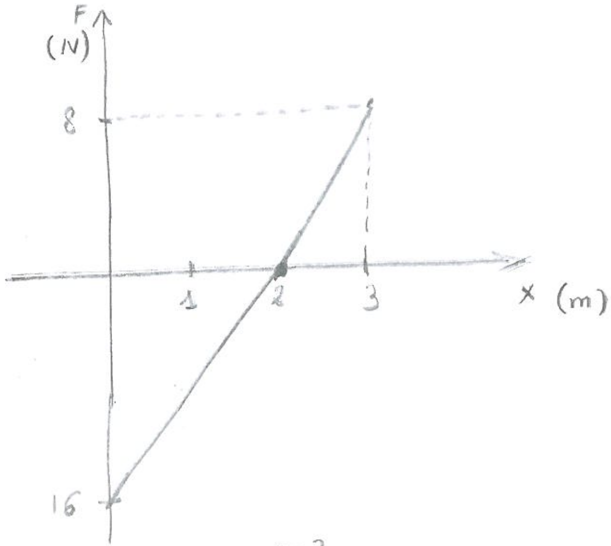
$$\mathcal{P} = \frac{W}{t} = \frac{3.078 \cdot 10^3 \, J}{300 \, s} = 1.026 \cdot 10^4 \, W = 10.26 \, kW$$

Otra manera de calcular la potencia es

$$\underline{\underline{\mathcal{P}}} = F'_{motor} \cdot v = 1.026 \cdot 10^3 \, N \cdot 10 \, m/s = 10.26 \cdot 10^3 \, W = \underline{\underline{10.26 \, kW}}$$

La fuerza que actúa sobre una partícula es F = 8x − 16 (N), donde x se mide en m. (a) Representar la fuerza frente a x en el intervalo x = 0 hasta x = 3 m. (b) Obtener el trabajo neto realizado por esta fuerza sobre la partícula cuando ésta se mueve desde x = 0 a x = 3 m

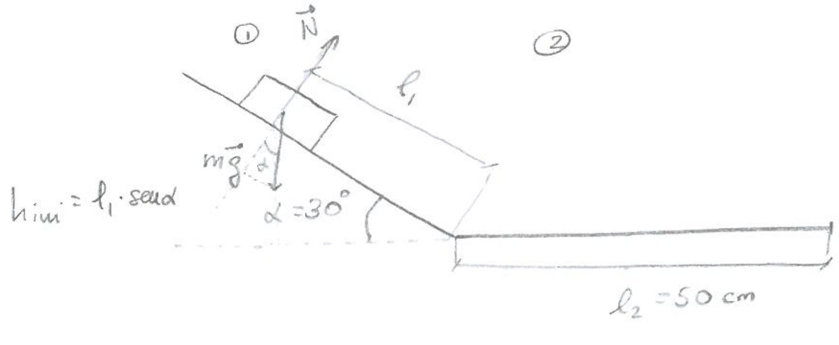
(a)



(b) $$W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = \int_{x=0}^{x=3} (8x-16)\,dx = 4x^2 - 16x \Big|_{x=0}^{x=3} =$$

$$= (36 - 48)\ \mathrm{J} = -12\ \mathrm{J}$$

Un cuerpo de masa 50 g se desliza partiendo del reposo por un plano inclinado 30° con la horizontal. Al llegar al plano horizontal se detiene tras recorrer 50 cm. Hallar el trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento en todo el trayecto teniendo en cuenta que el coeficiente de rozamiento vale 0,15.



El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento vendrá dado por:

$W_{roz}^{①}$ (trabajo realizado en la parte de la trayectoria del plano inclinado)

$$W_{roz}^{①} = \vec{F}\,\Delta\vec{r} \underset{\uparrow}{=} -F_r' \cdot l_1 = -\mu \cdot N \cdot l_1 = -\mu \cdot mg \cdot \cos\alpha \cdot l_1$$

$|\Delta\vec{r}| = l_1$
$\cos\theta = -1$

$W_{roz}^{②}$ (trabajo realizado en la parte horizontal de la trayectoria).

$$W_{roz}^{②} = -\mu \cdot N \cdot l_2 = -\mu m g\, l_2$$

Luego el trabajo total realizado por la fuerza de rozamiento es:

$$W_{roz} = W_{roz}^{①} + W_{roz}^{②} = -\mu m g \left(l_1 \cdot \cos\alpha + l_2\right)$$

Este trabajo de rozamiento se debe corresponder con la variación de E mecánica del sistema en la configuración inicial. Como el objeto estaba en reposo, toda la energía era potencial gravitatoria luego:

$$E_{mec}^{ini} \underset{\uparrow}{=} mg \cdot h_{ini} = mg\, l_1 \operatorname{sen}\alpha \Longrightarrow \Delta E = E_{mec}^{final} - E_{mec}^{ini} = -mg\, l_1 \operatorname{sen}\alpha$$

cero de energías potenciales
en el plano horizontal.

$$\Delta E = W_{roz}$$

De aquí calculamos la longitud l_1

$$-\cancel{m}\cancel{g}\, l_1 \operatorname{sen}\alpha = -\mu \cancel{m}\cancel{g}\,(l_1 \cos\alpha + l_2)$$

$$l_1 \operatorname{sen}\alpha = \mu l_1 \cos\alpha + l_2 \mu$$

$$l_1 (\operatorname{sen}\alpha - \mu \cos\alpha) = l_2 \mu \Rightarrow l_1 = \frac{l_2 \mu}{\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha} = 0{,}20 \text{ m}$$

$l_2 = 0{,}5 \text{ m}$

$\alpha = 30°$

Con el valor de l_1 calculamos el trabajo de las fuerzas de rozamiento:

$$W_{roz} = -\mu m g \cdot (l_1 \cos\alpha + l_2) = -0{,}051 \text{ J}$$

Una partícula de 0,4 kg de masa se desliza por una vía horizontal circular rugosa de radio $R = 1,5$ m. La vía tiene una pared exterior lisa vertical. Si la partícula tiene una velocidad inicial de 8 m/s y después de una revolución desciende a 6 m/s debido a la fricción con el suelo rugoso.

(a) ¿Cuál es el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre la partícula?

La normal y el peso no realizan trabajo por ser perpendiculares al desplazamiento.

El trabajo podrá calcularse a partir de la variación de la energía mecánica.

Como la única energía que cambia es la cinética

$$\Delta E_{mec} = K^{fin} - K^{ini} = W$$

$$\frac{1}{2} m v_{fin}^2 - \frac{1}{2} m v_{ini}^2 = \frac{1}{2} 0,4 \cdot (6^2 - 8^2) \text{ J} = -5,6 \text{ J}$$

(b) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento?

Calculado en (a)

(c) Calcular el coeficiente de rozamiento cinético.

Como la fuerza de rozamiento es dinámica y constante (tanto μ como la normal lo son).

$$W_{roz} = -F_{roz} \cdot \Delta s = -\mu \cdot N \cdot \Delta s = -\mu mg\,(2\pi R)$$

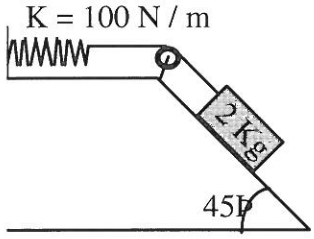
$$\mu = -\frac{W_{roz}}{mg\,2\pi R} = -\frac{-5,6}{0,4 \cdot 9,8 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1,5} = 0,15$$

(d) Cuál es el número total de vueltas que da la partícula antes de detenerse

El trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento durante las N vueltas hasta que se para la partícula tiene que reducir la energía cinética de ésta a cero

$$\left.\begin{array}{l} W_{roz} = \Delta E_{mec} = K_{fin} - K_{ini} = -\frac{1}{2} m v_{ini}^2 \\ W_{roz} = -F_{roz}\,\Delta s = -\mu mg \cdot 2\pi R\, N \end{array}\right\} N = \frac{1}{4\pi} \frac{v_{ini}^2}{\mu g R} = 2,29 \text{ vueltas}$$

Problema: Un bloque de 2 kg situado sobre un plano inclinado áspero se conecta a un resorte ligero que tiene una constante $k = 100$ N/m. El bloque se libera a partir del reposo cuando el resorte no está estirado y la polea carece de fricción. El bloque se mueve 20 cm hacia abajo antes de quedar en reposo. Hallar el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano.



Solución:

Calculamos la energía mecánica del sistema en la situación inicial:

- Como el muelle no está estirado, la energía elástica del sistema muelle-bloque es nula.
- El muelle carece de masa, luego su energía cinética es nula.
- El bloque parte del reposo, luego su energía cinética también es nula.
- Tomando como origen de energía potencial gravitatoria el suelo, la energía potencial gravitatoria del bloque será $m\,g\,h_{\text{ini}}$.

Luego

$$E_{\text{ini}}^{\text{mec}} = m\,g\,h_{\text{ini}}.$$

Ahora calculamos la energía mecánica del sistema en la situación final:

- El muelle carece de masa, luego su energía cinética es nula.
- El bloque queda en reposo, luego su energía cinética también es nula.
- El muelle se estira 20 cm, luego hay una energía potencial elástica $E_{\text{pot elastica}} = \frac{1}{2} k\,\Delta x^2$.
- Al descender 20 cm por la rampa, la altura a la que se encuentra el objeto también disminuye:

$$\Delta h = h_{\text{ini}} - h_{\text{fin}}.$$

Pero un simple análisis de trigonometría nos permite calcular la variación de altura,

$$\sin 45 = \frac{\Delta h}{0,2} \quad \Rightarrow \quad \Delta h = 0,2 \cdot \sin 45.$$

La energía potencial gravitatoria del bloque en la situación final vale $m\, g\, h_{\text{fin}}$.

Luego, la energía mecánica del sistema en la situación final toma el valor

$$E_{\text{fin}}^{\text{mec}} = \frac{1}{2} k\, \Delta x^2 + m\, g\, h_{\text{fin}}.$$

La variación en la energía mecánica es el trabajo disipado por la fuerza de rozamiento.

$$\begin{aligned}
\Delta E^{\text{mec}} &= E_{\text{fin}}^{\text{mec}} - E_{\text{ini}}^{\text{mec}} = \frac{1}{2} k\, \Delta x^2 + m\, g\, h_{\text{fin}} - m\, g\, h_{\text{ini}} \\
&= \frac{1}{2} k\, \Delta x^2 + m\, g \left(h_{\text{fin}} - h_{\text{ini}}\right) \\
&= \frac{1}{2} k\, \Delta x^2 - m\, g\, \Delta h \\
&= -0,772 \text{ J} = \mathrm{W}_{\text{roz}}.
\end{aligned}$$

Por definición de trabajo,

$$W_{\text{roz}} = \vec{f}_{\text{roz}} \cdot \Delta \vec{r} = f_{\text{roz}} \cdot \Delta r \cdot \cos 180 = -f_{\text{roz}} \cdot \Delta r,$$

donde $\Delta \vec{r}$ se refiere al desplazamiento del bloque de magnitud 20 cm a lo largo de la rampa, y donde hemos dado por hecho que la fuerza de rozamiento se opone al deslizamiento y por lo tanto forma un ángulo de 180° con el mismo. Despejando la fuerza de rozamiento, llegamos a

$$f_{\text{roz}} = -\frac{W_{\text{roz}}}{\Delta r} = -\frac{-0,772 \text{ J}}{0,2 \text{ m}} = 3,859 \text{ N}.$$

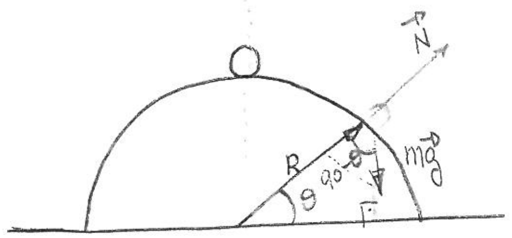
Pero el módulo de la fuerza de rozamiento se puede calcular como $f_{\text{roz}} = \mu N$, y como la aceleración del bloque en la dirección perpendicular al plano es nula,

$$N = m\, g \sin 45 = 1,386 \text{ N}.$$

Luego,

$$\mu = \frac{f_{\text{roz}}}{N} = \frac{3,859 \text{ N}}{1,386 \text{ N}} = 0,278.$$

<u>Problema 9.-</u> Un pingüino de masa m está sentado sobre un montículo hemiesférico de nieve como se muestra en la Figura. Si empieza a resbalar desde el reposo (suponiendo el hielo perfectamente liso) ¿En qué punto P deja el pingüino de tener contacto con el hielo?



Vamos a modelizar el pingüino como si fuera una partícula.

Aplicaremos el principio de conservación de la energía para calcular la velocidad de la partícula en función del ángulo a medida que se desplaza por la esfera.

Tomando el origen de energías potenciales gravitatorias en el ecuador de la esfera:

- Altura inicial R $\longrightarrow$ $E_{pg} = mgR$

- Altura como función del ángulo: $R\,\text{sen}\,\theta \rightarrow E_{pg} = mgR\,\text{sen}\,\theta$

Como el rozamiento es nulo, la energía mecánica se conserva:

$$E_{pg} + E_{cinética} = \text{constante}$$
$$mgR = mgR\,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2} m v^2(\theta)$$

luego

$$v(\theta) = \sqrt{2gR(1 - \text{sen}\,\theta)}$$

Teniendo en cuenta que la partícula realiza un movimiento circular, podemos descomponer la aceleración en una componente radial y una componente tangencial.

La componente radial tendrá como módulo: $\frac{v^2(\theta)}{R}$

Las fuerzas que actúan sobre la partícula son:

- su peso (dirigido hacia abajo)
- la normal (dirigida en la dirección radial).

Descomponiendo las fuerzas en componentes radial y tangencial, y aplicando la segunda ley de Newton (la aceleración tiene un signo menos debido a que se dirige hacia el centro del círculo:

$$N - mg\cos(90-\theta) = -m\frac{v^2}{R} = -m\frac{2g\cancel{R}(1-\operatorname{sen}\theta)}{\cancel{R}}$$

La partícula se despegará de la superficie cuando $N=0$. Si llamamos $\theta_{crítico}$ al valor del ángulo en ese momento:

$$-\cancel{m}\cancel{g}\cos(90-\theta_c) = -\cancel{m}\,2\cancel{g}(1-\operatorname{sen}\theta_c)$$

$$-\operatorname{sen}(\theta_c) = -2(1-\operatorname{sen}\theta_c)$$

$$-\operatorname{sen}\theta_c = -2 + 2\operatorname{sen}\theta_c$$

$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\theta_c = 41.81^\circ}$$

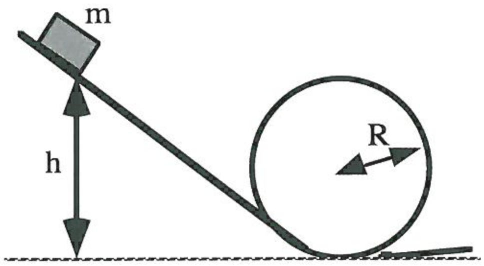
Problema: Un pequeño bloque de masa m se desliza sin rozamiento por una vía en forma de lazo como la indicada en la figura. El lazo circular tiene un radio R. El bloque parte del reposo a una altura h por encima de la parte inferior del lazo.

(a) ¿Cuál es la energía cinética del bloque cuando alcanza la parte superior del lazo?.

(b) ¿Cuál es la aceleración en la parte superior del lazo admitiendo que no se sale de la vía?

(c) ¿Cuál es el menor valor de h sabiendo que el bloque ha de alcanzar la parte superior del lazo sin salirse de la vía?

(d) Calcular numéricamente los apartados anteriores para $m = 4\ \text{kg}, h = 8\ \text{m}, y\ R = 2\ \text{m}$.



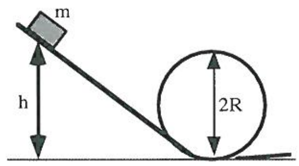
Nota: en el apartado (c), aplicad que la condición de contacto es que la normal sea siempre ≥ 0.

Solución:

(a) Como no hay rozamiento, la energía mecánica del sistema se conserva,

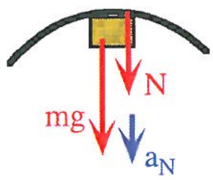
$$E_{\text{ini}}^{\text{mec}} = E_{\text{fin}}^{\text{mec}} \quad \Rightarrow \quad m\,g\,h_{\text{ini}} + \frac{1}{2}mv_{\text{ini}}^2 = m\,g\,h_{\text{fin}} + \frac{1}{2}mv_{\text{fin}}^2.$$

Si consideramos $h = 0$ en la parte inferior del lazo, entonces $h_{\text{ini}} = h$, y $h_{\text{fin}} = 2R$. Además, como parte de reposo, la energía cinética inicial es nula, por lo que la ecuación de conservación de la energía queda como sigue



$$m\,g\,h = m\,g\,2R + \frac{1}{2}mv_{\text{fin}}^2 \quad \Rightarrow \quad K_{\text{fin}} = \frac{1}{2}mv_{\text{fin}}^2 = m\,g\left(h - 2R\right).$$

(b) Dentro del lazo el cuerpo realiza un movimiento circular. En la parte superior, las únicas fuerzas que actúan son el peso y la normal, y las dos llevan la misma dirección, apuntando hacia el centro del círculo. Por ello, la única aceleración en la parte superior del lazo es la aceleración normal, de módulo



$$a_N = \frac{v^2}{R}.$$

El cuadrado de la velocidad lo podemos despejar de la energía cinética calculada en el apartado anterior

$$v_{\text{fin}}^2 = 2g(h-2R) \quad \Rightarrow \quad a_N = 2g\frac{(h-2R)}{R}.$$

(c) Aplicando la segunda ley de Newton en la parte superior de la vía,

$$N + mg = m\frac{v^2}{R},$$

obtenemos que la normal vale

$$N = m\frac{v^2}{R} - mg.$$

La condición de contacto es que la normal sea siempre ≥ 0. Luego,

$$m\frac{v^2}{R} - mg \geq 0 \quad \Rightarrow \quad v^2 \geq Rg.$$

Además, en el apartado (b) hemos calculado que el cuadrado de la velocidad del bloque en la parte superior es $v^2 = 2g(h-2R)$, por lo que sustituyendo este valor en la desigualdad anterior

$$2g(h-2R) \geq Rg \quad \Rightarrow \quad 2h - 4R \geq R \quad \Rightarrow \quad h \geq \frac{5}{2}R.$$

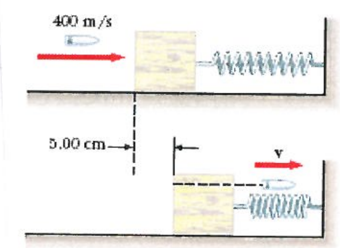
(d) Sustituyendo los datos en las diferentes expresiones resulta

$$K_{\text{fin}} = mg(h-2R) = 156{,}96 \text{ J}$$

$$\mathrm{a}_N = 2g\frac{(h-2R)}{R} = 39{,}24\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$h \geq \frac{5}{2}R = 5\,\text{m}$$

Una bala de 5 g que se mueve con una velocidad de 400 m/s es disparada sobre un bloque de 1 kg al que atraviesa, como se observa en la figura. El bloque inicialmente está en reposo en una superficie horizontal sin rozamiento y está conectado a un muelle de constante elástica $k = 900 \frac{N}{m}$. Si el bloque se mueve 5 cm a la derecha después del impacto, calcular (a) la velocidad del bloque inmediatamente después del impacto, (b) la velocidad a la que la bala emerge del bloque, (c) la fracción de energía perdida en el choque.



En la colisión se conserva el momento lineal, con lo cual

$$m_{bala} \cdot v_{bala}^{antes} = m_{bala} \cdot v_{bala}^{después} + M_{bloque} \cdot v_{bloque}^{después} \qquad (1)$$

Ahora aplicamos la conservación de la energía mecánica entre dos configuraciones:

- Configuración 1: justo después del choque, la bala se mueve con velocidad $v_{bala}^{después}$ y el bloque con $v_{bloque}^{después}$. El muelle aún no se ha comprimido.
- Configuración 2: el muelle se ha comprimido 5 cm y se ha detenido.

La bala se sigue moviendo con velocidad $v_{bala}^{después}$

$$\frac{1}{2} m_{bala} \cancel{\left(v_{bala}^{después}\right)^2} + \frac{1}{2} M_{bloque} \left(v_{bloque}^{después}\right)^2 = \frac{1}{2} m_{bala} \cancel{\left(v_{bala}^{después}\right)^2} + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} M_{bloque} \left(v_{bloque}^{después}\right)^2 = \cancel{\frac{1}{2}} k x^2 \Rightarrow v_{bloque}^{después} = \sqrt{\frac{k x^2}{M_{bloque}}} = 1,5 \text{ m/s}$$

En la ecuación (1) podemos despejar $v_{bala}^{después}$:

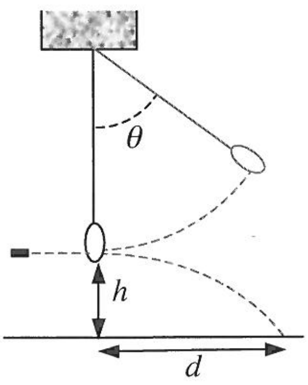
$$v_{bala}^{después} = \frac{m_{bala}\, v_{bala}^{antes} - M_{bloque}\, v_{bloque}^{después}}{m_{bala}} = 100 \text{ m/s}$$

La variación de la energía vendrá dada por:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = \frac{1}{2} m_{bala} \cdot \left[\left(v_{bala}^{después}\right)^2 - \left(v_{bala}^{antes}\right)^2 \right] + \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

$\Delta E = -374 \text{ J}$ (el signo menos indica que es una energía perdida)

Sobre un saquito de arena de 4 kg de masa pendiente de un hilo se dispara un fusil cuya bala tiene una masa de 40 gr. La bala atraviesa el saquito y recorre una distancia de 20 m antes de pegar en el suelo que se encuentra a 1,5 m por debajo del impacto del saquito. El saquito oscila experimentando un desplazamiento vertical de 30 cm. Calcular la velocidad de la bala en el momento del impacto.



Solución:

El tiempo que tarda en llegar la bala al suelo después del choque es:

$$h = \frac{1}{2} g (\Delta t)^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Como nos dan la distancia horizontal recorrida durante ese tiempo:

$$d = v_{\text{bala,después}} \Delta t \quad \Rightarrow \quad v_{\text{bala,después}} = \frac{d}{\Delta t} = \sqrt{\frac{g}{2h}}\, d = \boxed{36.1 \text{m/s}}$$

Las únicas fuerzas que actúan sobre el saco son el peso, que es una fuerza conservativa (su contribución a la energía se tendrá en cuenta mediante la correspondiente energía potencial gravitatoria), y la tensión de la cuerda, que al ser perpendicular al movimiento del saco no realiza ningún trabajo.

Una vez que la bala ha atravesado el saco, es decir justo después del choque, podemos aplicar la ley de conservación de la energía para el saco entre el punto más bajo de su trayectoria y la posición en la que alcanza su máxima altura. Tomando como origen de energías potenciales gravitatorias en el punto más bajo,

$$E_{\text{abajo}} = E_{\text{arriba}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m_{\text{saco}} \left(v_{\text{saco}}^{\text{después}} \right)^2 = m_{\text{saco}}\, g h$$

$$\Rightarrow \quad v_{\text{saco}}^{\text{después}} = \sqrt{2gh} = 2{,}42 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aplicando el principio de conservación del momento lineal en el choque:

$$m_{\text{bala}}\vec{v}_{\text{bala}}^{\,\text{antes}} = m_{\text{bala}}\vec{v}_{\text{bala}}^{\,\text{después}} + m_{\text{saco}}\vec{v}_{\text{saco}}^{\,\text{después}}$$

donde todos los vectores tienen la misma orientación horizontal. Despejando:

$$v_{\text{bala}}^{\text{antes}} = v_{\text{bala}}^{\text{después}} + \left(\frac{m_{\text{saco}}}{m_{\text{bala}}}\right)v_{\text{saco}}^{\text{después}} = 278{,}1\ \text{m/s}.$$

Una pelota cae desde una altura de 2m y al botar contra el suelo asciende a 0,5m. Calcular el coeficiente de restitución entre la pelota y el suelo.

Calculamos la velocidad de la pelota justo antes del choque

Asumiendo que la energía mecánica se conserva durante la caída:

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_{antes}^2 = \cancel{m} g h_{ini}$$

$$v_{antes} = \sqrt{2 g h_{ini}} = 6,26 \ m/s.$$

Como va dirigida hacia abajo, esta velocidad tendrá signo negativo

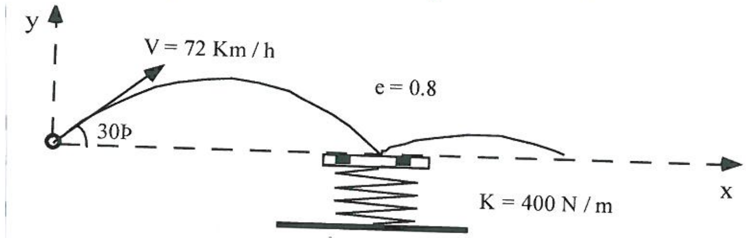
Podemos calcular también la velocidad justo después del choque a partir de la conservación de la energía y sabiendo que el cuerpo asciende 0,5m.

$$v_{después} = \sqrt{2 g h_{fin}} = 3,13 \ m/s$$

El coeficiente de restitución será entonces

$$e = - \frac{v_{después}}{v_{antes}} = - \frac{3,13}{-6,26} = 0,5$$

Un futbolista golpea un balón de m= 0.5 kg inicialmente en reposo. suministrándole una velocidad inicial de 72 km/h y formando un ángulo de 30° con la horizontal. (a) Si el pie está en contacto durante 5 milésimas de segundo y suponemos que la fuerza que actúa es constante, determinar vectorialmente la fuerza que ejerce el pie sobre el balón. (b) Determinar el alcance horizontal del balón y su altura máxima (despreciar el rozamiento del aire). (c) El balón golpea sobre una placa horizontal de masa m= 4kg en reposo sobre un muelle de constante k= 400 N/m y masa despreciable. Suponemos que el coeficiente de restitución es de e=0.8. (d) Determinar la velocidad del balón después del choque y el ángulo que forma con la horizontal. ¿Cuál será la velocidad de la placa? ¿Qué tipo de choque se produce? (e) Determinar la máxima comprensión de la placa respecto a su posición de equilibrio.



(a) Por el teorema del impulso

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{p} = \vec{p}_{final} - \vec{p}_{inicial}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{1}{\Delta t} \left(m_{balón} \cdot \vec{V}^{final}_{balón} - m_{balón} \vec{V}^{inicial}_{balón} \right)$$

$$= \frac{0,5}{0,005} \cdot \left[20 \cos 30 \, \vec{i} + 20 \operatorname{sen} 30 \, \vec{j} \right] = 1732,05 \, \vec{i} + 1000.00 \, \vec{j}$$

(b) El alcance horizontal viene dado por

$$R = \frac{v_i^2 \cdot \text{sen}(2\theta)}{g} = \frac{(20)^2 \cdot \text{sen}(2 \cdot 30)}{9,8} \text{ m} = 35,35 \text{ m}$$

Y la altura máxima

$$h = \frac{v_i^2 \ \text{sen}^2\theta}{2g} = \frac{(20)^2 \cdot \text{sen}^2(30)}{2 \cdot 9,8} \text{ m} = 5,10 \text{ m}$$

(c) Calculamos la velocidad del balón en el momento del choque.

El tiempo de vuelo de la pelota viene dado por

$$t_{vuelo} = \frac{R}{v_x} = \frac{R}{v_i \cdot \cos\theta} = \frac{35,35}{20 \cdot \cos 30} = 2.04 \text{ s}$$

La componente de la velocidad a lo largo de x no varía. A lo largo de y en el momento del choque toma el valor

$$v_{y_{antes}} = v_{oy} - gt = v_i \cdot \text{sen}\, 30 - gt = -10.0 \text{ m/s}$$

Como en el choque la única fuerza que actúa es la normal, la única componente que cambia de la velocidad es v_y

$$e = -\frac{v_{y,\,después}^{placa} - v_{y,\,después}^{balón}}{-v_{y,\,antes}^{balón}} \Rightarrow v_{y,\,después}^{placa} = +v_{y,\,después}^{balón} + e\, v_{y,\,antes}^{balón} \quad (1)$$

En el choque del balón con la placa se conserva el momento lineal. La placa no tendrá componente de la velocidad a lo largo de y. Además como la componente a lo largo de x no cambia, podemos aplicar la ley de conservación sólo para la componente y

$$m_{balón} \cdot v_{y;\,antes}^{balón} = m_{balón} \cdot v_{y,\,después}^{balón} + M_{placa} \cdot v_{y,\,después}^{placa}$$

Sustituyendo (1) en (2)

$$m_{balón} \cdot v_{y,\,antes}^{balón} = m_{balón}\, v_{y,\,después}^{balón} + M_{placa}\, v_{y,\,después}^{balón} + M_{placa}\, e\, v_{y,\,antes}^{balón}$$

$$v_{y,\,después}^{balón} = \frac{(m_{balón} - M_{placa} \cdot e)\; v_{y,\,antes}^{balón}}{(m_{balón} + M_{placa})} = +6 \text{ m/s}$$

La velocidad del balón después del choque es:

$$\vec{v}_{después}^{\,balón} = 17{,}32\,\vec{i} + 6{,}00\,\vec{j},$$

tiene por módulo $|v_{después}^{balón}| = 18{,}33$ m/s y forma un ángulo con la horizontal de:

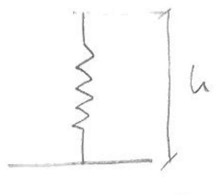
$$\alpha = \arctan \frac{6{,}00}{17{,}32} = 19{,}1^\circ.$$

Por otra parte, de la ecuación (1) podemos calcular la velocidad de la placa.

$$v_{y,\,después}^{placa} = 6{,}00 - 10 \cdot 0{,}8 = -0{,}2 \text{ m/s}$$

(e) Aplicamos la ley de conservación de la energía para el sistema Tierra-placa-muelle

Configuración inicial.
(muelle sin placa)

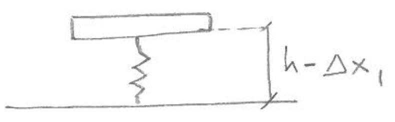


No hay energía cinética
No hay energía potencial elástica
No hay energía potencial gravitatoria

$$E_{mec}^{(ini)} = 0$$

Configuración 1.

Al poner la placa de masa $m = 4$ kg, el muelle se comprime una cantidad Δx_1



En equilibrio, la fuerza recuperadora del muelle cancela el peso de la placa

$$-mg + k\,\Delta x_1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta x_1 = \frac{mg}{k} = \frac{4{,}00 \cdot 9{,}8}{400} = 0{,}098 \text{ m}$$

Configuración 2: una vez que el muelle está comprimido, golpea el balón y le da al sistema placa-muelle una velocidad de $-2{,}00\ m/s$ dirigida hacia abajo

$$E_{mec}^{(2)} = \frac{1}{2} k \Delta x_1^2 + Mg(h - \Delta x_1) + \frac{1}{2} M_{placa} v_{placa}^2$$

Configuración (3) el muelle se comprime la cantidad máxima Δx_{max} y en ese punto la placa en reposo

$$E_{mec}^{(3)} = \frac{1}{2} k \Delta x_{max}^2 + Mg(h - \Delta x_{max})$$

Igualando estas dos últimas energías:

$$\frac{1}{2} k \Delta x_1^2 + \cancel{Mgh} - Mg\Delta x_1 + \frac{1}{2} M v_{placa}^2 = \frac{1}{2} k \Delta x_{max}^2 + \cancel{Mgh} - Mg\Delta x_{max}$$

$$\frac{1}{2} k \Delta x_{max}^2 - Mg\, \Delta x_{max} + \left(Mg\Delta x_1 - \frac{1}{2} M v_{placa}^2 - \frac{1}{2} k \Delta x_1^2 \right) = 0$$

$$200\ \Delta x_{max}^2 - 39{,}2\ \Delta x_{max} - 6.08 = 0$$

Resolviendo esta ecuación resulta que la solución con sentido físico ($\Delta x_{max} > 0$)

es $\underline{\Delta x_{max} = 0{,}30\ m}$