Problema 1.- Un objeto describe un MAS con $A = 63$ mm, $\omega = 4,1$ rad/s y $\alpha = 0$.

(a) Escribir las ecuaciones para la posición, velocidad y aceleración:

La solución del MAS viene dado por:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi) = 0,063 \cos(4,1\, t) \quad m$$

Derivando:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = -0,258 \operatorname{sen}(4,1\, t) \quad m/s$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = -1,059 \cos(4,1\, t) \quad m/s^2$$

(b) Determinar el valor de las magnitudes anteriores para $t = 1,7s$

Sustituyendo los datos del problema:

$A = 63$ mm $= 0,063$ m

$\omega = 4,1$ rad/s

$\alpha = 0$

$t = 1,7s$

$x(t = 1,7s) = 0,0487$ m

$v(t = 1,7s) = -0,1638$ m/s

$a(t = 1,7s) = -0,8189$ m/s$^2$

**Una masa de 1 kg está colgada de un resorte con una constante de fuerza de 500 N/m y 20 cm de longitud. (a) Si sostenemos la masa y la vamos bajando lentamente, ¿para qué longitud del muelle la masa quedará colgando en reposo? (b) ¿Cuál es la máxima elongación del muelle si, desde su longitud natural, se deja caer la masa? ¿Cuál es la velocidad máxima de la misma?. ¿Cuál es el periodo y frecuencia del movimiento?. (c) Supongamos que, tirando de la masa, el resorte se alarga hasta los 28 cm. Soltando la masa: ¿Cuál es el periodo y frecuencia del movimiento?, ¿y la elongación y velocidades máximas?. ¿A qué altura estará la masa 3 segundos después de haberla soltado?**
**(Nota: tomad** $g = 10 \text{ m/s}^2$)
**Solución:**

(a) Llamemos $y_0$ a la longitud natural del muelle. Una vez que le colguemos la masa, el muelle estará en equilibrio estático cuando se haya estirado una longitud $\Delta y$ que verifique la condición de equilibrio entre el peso y la fuerza recuperadora del muelle,

$$mg - k\Delta y = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta y = \frac{mg}{k} = \frac{10}{500} \text{ m} = 0.02 \text{ m} = 2 \text{ cm}.$$

Por lo tanto, la longitud del muelle para la cual la masa está en reposo es $y = y_0 + \Delta y = 22$ cm.

El muelle realizará un movimiento oscilatorio armónico simple con respecto a esta nueva posición de equilibrio. Por eso la tomaremos como referencia a la hora de medir las elongaciones en el apartado (c).

(b) Tomamos como configuración inicial aquella en la cual el muelle está en su posición natural. Escogemos que esta altura es el cero de energía potencial gravitatoria. En esta configuración, suponiendo que la masa está en reposo, no hay energía cinética, ni potencial gravitatoria, ni potencial elástica.

$$E_{\text{mec}}^{(1)} = 0 \text{ J}.$$

Tomamos como segunda configuración aquella en la que el muelle está en la posición de máxima elongación, es decir, en la que el muelle se ha estirado una longitud $\Delta y_{\max}$ con respecto a su longitud natural. En ese momento, la masa está en reposo por lo que no hay energía cinética. Como la masa está en una posición más baja que el cero de energías potenciales, tenemos que tomar la altura como negativa. Así,

$$E_{\text{mec}}^{(2)} = \frac{1}{2}k\Delta y_{\max}^2 - mg\Delta y_{\max}.$$

Al no haber fuerzas disipativas, la energía mecánica se conserva, con lo que

$$\frac{1}{2}k\Delta y_{\max}^2 - mg\Delta y_{\max} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta y_{\max} = \frac{2mg}{k} = 0.04 \text{ m} = 4 \text{ cm}.$$

La velocidad será máxima en el momento en el cuál la partícula pase por la posición de equilibrio después de colgar la masa, $\Delta y$. En ese momento, aplicando la ley de conservación de la energía,

$$\frac{1}{2}k\Delta y^2 + \frac{1}{2}mv^2 - mg\Delta y = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2g\Delta y - \frac{k}{m}\Delta y^2} = 0.447\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

En caso de no recordar en qué punto se adquiere máxima velocidad, se puede despejar $v^2$ de le expresión de la ley de conservación de la energía y derivar con respecto a la posición,

$$\frac{1}{2}k\Delta y^2 + \frac{1}{2}mv^2 - mg\Delta y = 0 \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{2}{m}\left(mg\Delta y - \frac{1}{2}k\Delta y^2\right)$$

$$\frac{d\left(v^2\right)}{d\Delta y} = \frac{2}{m}\left(mg - k\Delta y\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta y = \frac{mg}{k}.$$

La frecuencia del movimiento vendrá dado por

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 22.36\ \text{s}^{-1}.$$

Y la frecuencia,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.28\ \text{s}.$$

(c) La amplitud y la frecuencia son independientes de la amplitud del movimiento, así que los valores son los mismos que en el apartado anterior.

La elongación del movimiento (estiramiento con respecto a la nueva posición de equilibrio una vez que la masa se ha colgado) es $A = 6\ \text{cm} = 0.06\ \text{m}$.

Suponiendo que tomamos el origen de tiempos cuando la partícula está en la posición de máximo estiramiento, entonces la constante de fase se anula y la posición como función del tiempo será

$$\Delta y(t) = A\cos(\omega t) = 0.06\cos(22.36t).$$

El estiramiento a los 3s es

$$\Delta y(t=3) = 0.06\cos(22.36\times 3) = -0.027\ \text{m}.$$

Este estiramiento está medido con respecto a la posición de equilibrio una vez que se ha colgado la masa (22 cm). Por lo tanto, la posición de la partícula es

$$y(t=3) = (y_0 + \Delta y) + \Delta y(t=3) = 0.22 - 0.027 = 0.193\ \text{m},$$

lo que supone un encogimiento de 0.68 cm con respecto a su longitud natural.

La velocidad viene dada por

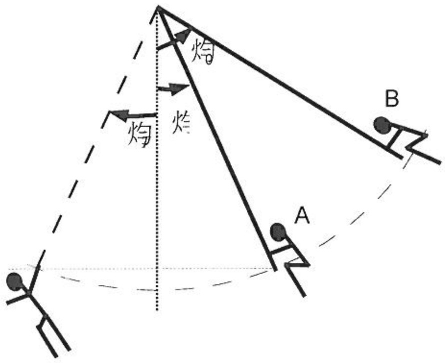
$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t).$$

Teniendo en cuenta que el seno está comprendido entre +1 y -1, entonces, el valor máximo de la velocidad es

$$v_{\max} = A\omega = 1.34\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

**Tarzán se encuentra colgando de la rama de un árbol y va a empezar a caer en 3.5 segundos. Jane, que se encuentra en otro árbol cercano y a la misma altura que Tarzán (posición A), coge una liana (sin masa) y se balancea para rescatarlo (sin impulsarse ni carrerilla) como se indica en el dibujo. (a) Dibuja las fuerzas a las que está sometida Jane y escribe su ecuación del movimiento en función del ángulo $\theta$ suponiendo que Jane es una masa puntual. (b) Encuentra la solución a la ecuación haciendo la aproximación de ángulos pequeños. Suponiendo que la masa de Jane es 60 kg y la liana mide 10 m, ¿será Tarzán rescatado a tiempo?. (c) Si Jane comienza en la posición B ($\theta_0$=15°) y el ángulo en el que Tarzán se encuentra es $\theta_T$=10°. ¿Llegará Jane a tiempo?. (d) Suponiendo el primer caso, ¿qué ocurriría si, en el momento de saltar, Chita (m = 20 kg) se abrazara a Jane?**

**(Nota: tómese** $g = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.**)**




**Solución:**

(a) Jane se encuentra sometida a la acción de su peso y a la tensión de la liana. Proyectando estas fuerzas en la dirección tangencial,

$$m_{\text{Jane}}a_t = -p_t = -p\sin\theta = -m_{\text{Jane}}g\sin\theta \quad \Rightarrow \quad a_t = -g\sin\theta,$$

donde $\theta$ es el ángulo que forma la liana de Jane con la vertical (medido en radianes).

Como la aceleración tangencial es

$$a_t = \frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

donde $s$ es la longitud de arco recorrida por Jane, entonces podemos escribir la ecuación del movimiento

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta.$$

(b) Si suponemos que el ángulo $\theta$ es pequeño, podemos expandir el $\sin\theta$ en potencias de $\theta$ y quedarnos con el primer término no nulo,

$$\sin\theta \approx 0 + \left.\frac{d\sin\theta}{d\theta}\right|_{\theta=0}\theta + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\sin\theta}{d\theta^2}\right|_{\theta=0}\theta^2 + ... = \theta.$$

Si sustituimos en la ecuación del movimiento,

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta,$$

que es la ecuación del movimiento oscilatorio armónico simple cuya solución es

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi),$$

donde

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Las constantes de integración $\theta_0$ y $\phi$ pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales del movimiento (posición y velocidad inicial):

$$\theta(t=0) = \theta_0 \cos(\phi),$$
$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=0} = 0 = -\theta_0\omega\sin(\phi).$$

Dividiendo la segunda de estas ecuaciones entre la primera

$$\tan\phi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \phi = 0.$$

Tarzán se encuentra en la posición $\theta = -\theta_0$ (tanto él como Jane están a la misma altura), y Jane tardará en llegar hasta allí un tiempo

$$-\theta = \theta_0 \cos(\omega t) \qquad \Rightarrow \qquad \cos(\omega t) = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \omega t = \pi$$
$$t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = \pi \text{ s}.$$

Dado que $\pi \text{ s} < 3.5 \text{ s}$ Jane llegará a tiempo de salvar a Tarzán.

(c) Ahora Jane se encuentra en la posición $\theta_0 = 15^\circ$ por lo que el tiempo que tarda en llegar es

$$-10 = 15\cos(\omega t) \qquad \Rightarrow \qquad \omega t = \arccos\left(-\frac{10}{15}\right) = 2.30 \text{ rad} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{2.30}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2.30 \text{ s}.$$

De nuevo el tiempo es menor que 3.5 s, por lo que Jane también rescatará a Tarzán.

(d) No pasará nada ya que el periodo no depende de la masa.

**Se dispone de dos masas, una de 2 de kg apoyada sobre una superficie horizontal sin rozamiento unida a un muelle de constante $k$ = 600 N/m, y la otra de 1 kg que se acerca a la primera a una velocidad de 6 m/s. (a) Si el segundo objeto choca de forma inelástica perfecta quedando unido al muelle. Hallar la velocidad de los dos objetos inmediatamente después del choque. Cual es la amplitud y periodo de oscilación. (b) Hallar la velocidad de los dos objetos si el choque fuese elástico. Determinar la amplitud y el periodo de oscilación del objeto de 2 kg.**


**Solución:**

(a) En todo choque se conserva el momento lineal,

$$m_1 v_1^{\text{antes}} + m_2 v_2^{\text{antes}} = m_1 v_1^{\text{después}} + m_2 v_2^{\text{después}}.$$

Además, sabemos que el bloque 2 estaba inicialmente en reposo ($v_2^{\text{antes}} = 0$) y que el choque es perfectamente inelástico, con lo que

$$v_1^{\text{después}} = v_2^{\text{después}} \equiv v^{\text{después}}.$$

De todo lo anterior se deduce que

$$m_1 v_1^{\text{antes}} = \left(m_1 + m_2\right) v^{\text{después}} \quad \Rightarrow \quad v^{\text{después}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1^{\text{antes}} = 2 \text{ m/s}.$$

El periodo de oscilación vendrá dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = 0.44 \text{ s}.$$

A partir de que la colisión se ha producido, la energía mecánica del sistema se conserva. De esta ley podemos calcular la amplitud del movimiento,

$$\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) v^{\text{después}^2} = \frac{1}{2} k A^2 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} v^{\text{después}} = 0.14 \text{ m}.$$

(b) Vamos a suponer ahora que el choque es elástico. En ese caso, se conserva la energía cinética y el coeficiente de restitución toma el valor de 1.

$$e = -\frac{v_2^{\text{después}} - v_1^{\text{después}}}{v_2^{\text{antes}} - v_1^{\text{antes}}} = 1$$

Como $v_2^{\text{antes}} = 0$,

$$1 = -\frac{v_2^{\text{después}} - v_1^{\text{después}}}{-v_1^{\text{antes}}} \quad \Rightarrow \quad v_1^{\text{antes}} = v_2^{\text{después}} - v_1^{\text{después}}. \qquad (1)$$

Además, se conserva el momento lineal. Si tenemos en cuenta que $m_2 = 2m_1$,

$$m_1 v_1^{\text{antes}} = m_1 v_1^{\text{después}} + 2m_1 v_2^{\text{después}} \quad \Rightarrow \quad v_1^{\text{antes}} = v_1^{\text{después}} + 2v_2^{\text{después}}. \qquad (2)$$

Sumando la ecuación (1) a la ecuación (2)

$$2v_1^{\text{antes}} = 3v_2^{\text{después}} \quad \Rightarrow \quad v_2^{\text{después}} = \frac{2}{3} v_1^{\text{antes}} = 4 \text{ m/s}.$$

De la ecuación (1) resulta inmediatamente que $v_1^{\text{después}} = -2$ m/s.

El periodo de oscilación vendrá ahora dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k}} = 0.36 \text{ s}.$$

Y la amplitud del movimiento será

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^{\text{después}^2} = \frac{1}{2} k A^2 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{m_2}{k}} v_2^{\text{después}} = 0.23 \text{ m}.$$

**Un bloque descansa sobre un tablero de mesa que realiza un movimiento armónico simple de amplitud $A$ y periodo $T$.**

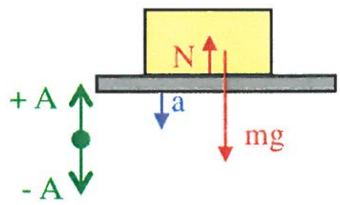
**(a) Si la oscilación es vertical ¿cuál es el valor máximo de $A$ que permitirá al bloque permanecer siempre en contacto con la mesa?**
**(b) Si la oscilación es horizontal y el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la mesa es $\mu$, ¿cuál es el máximo valor de $A$ para que el bloque no deslice?**

**Solución:**

(a) En un movimiento armónico simple,

$$x = A\cos(\omega t),$$
$$v = -A\omega\sin(\omega t),$$
$$a = -A\omega^2\cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad a_{\max} = A\omega^2.$$

En la parte superior de la oscilación, aplicando la segunda ley de Newton, y tomando como sentido positivo del eje $y$ hacia arriba,

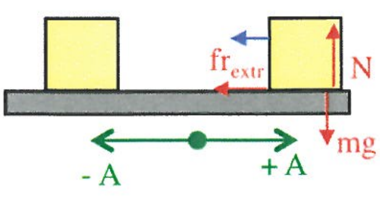



$$-mg + N = -ma \quad \Rightarrow \quad N = m(g-a).$$

En esa parte (en la parte superior de la oscilación), la $a = a_{\max}$. La condición de contacto entre el bloque y la mesa es que la normal sea mayor o igual que cero.

$$N \geq 0 \quad \Rightarrow \quad g - a_{\max} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad g - A\omega^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad A \leq \frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} = \frac{gT^2}{4\pi^2}.$$

(b) La fuerza que produce la aceleración es la fuerza de rozamiento,




$$f_{roz} = ma = m\left[-A\omega^2\cos(\omega t)\right].$$

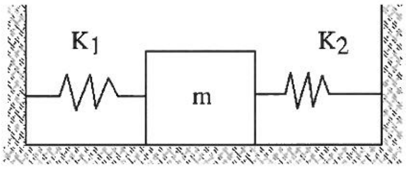
Esta fuerza tiene módulo máximo en los extremos de la trayectoria,

$$f_{roz}^{extremos} = mA\omega^2.$$

Además, la fuerza de rozamiento siempre tiene que ser menor que la fuerza de rozamiento máxima, $f_{\text{roz}}^{\text{max}} = \mu N$, con lo que

$$f_{\text{roz}}^{\text{extremos}} \leq f_{\text{roz}}^{\text{max}} \quad \Rightarrow \quad mA\omega^2 \leq \mu m g \quad \Rightarrow \quad A \leq \frac{\mu g}{\omega^2} = \frac{\mu g}{\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2} = \frac{\mu g T^2}{4\pi^2}.$$

**Calcular el período del movimiento para el sistema de la figura, donde $M = 2$ kg y las constantes de los resortes $k_1 = 50$ N/m y $k_2 = 80$ N/m**




**Solución:**

Para un desplazamiento $x$ a lo largo de la posición de equilibrio uno de los muelles se alargará $x$ y el otro se contraerá $x$. Por lo tanto, la fuerza sobre la masa debida a cada uno de ellos, que irá en sentido contrario al desplazamiento será

$$F = F_1 + F_2 = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x = -kx \quad \Rightarrow \quad k = (k_1 + k_2),$$

luego

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k_1 + k_2}} = 0.78 \text{ s}.$$

**Se superponen dos movimientos oscilatorios. El primero según la dirección $x$ y el segundo según $y$, de amplitudes $A$ y $B$ respectivamente, de la misma frecuencia y con un desfasaje entre si $\phi = 3\pi/2$. (a) Encuéntrese el movimiento resultante, comentando su significado y descríbase algún tipo de dispositivo que diese lugar a dicho movimiento. (b) El período de estos movimientos coincide con el de un resorte de constante $k = 0.3084$ N/m y de masa 0.5 kg. Encuéntrese la frecuencia y el período de estos movimientos. (c) Determínese los valores de las amplitudes $A$ y $B$ de cada uno de los movimientos, sabiendo que en el instante t = 2 s, el móvil sometido al movimiento resultante se encuentra a 10 m mientras que para t = 4 s se encuentra a 30 m. Según esto ¿a qué distancia del origen se encontrará el móvil cuando t = 5 s? (d) Si las amplitudes fuesen iguales ¿cómo se modificaría el movimiento? ¿Y si el período correspondiese a un resorte con amortiguamiento, cuya constante es $\gamma = 0.0314$? Coméntese y descríbase el movimiento resultante en este último caso.**

**Solución:**

(a) Los movimientos a lo largo de las dos direcciones $x$ e $y$ vendrán dados por

$$x(t) = A\sin(\omega t)$$
$$y(t) = B\sin(\omega t + \phi), \text{ con } \phi = \frac{3\pi}{2}.$$

A partir de la expresión del seno de la suma, $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, podemos simplificar la ecuación del movimiento a lo largo de $y$,

$$y(t) = B\sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = B\sin(\omega t)\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + B\cos(\omega t)\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -B\cos(\omega t).$$

Elevando al cuadrado las expresiones para $x(t)$ e $y(t)$

$$x^2 = A^2\sin^2(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{A^2} = \sin^2(\omega t),$$
$$y^2 = B^2\cos^2(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{B^2} = \cos^2(\omega t).$$

Sumando estas dos últimas expresiones

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1,$$

Pero esta última ecuación, $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$, es la ecuación general de un elipsoide de semiejes $A$ y $B$.

(b) Para un resorte de constante $k = 0.3084$ N/m y de masa 0.5 kg, la frecuencia angular vendrá dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{0.3084}{0.5}} = 0.7854 \text{ s}^{-1},$$

Y el periodo será

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 8 \text{ s}.$$

(c) Una vez conocido el periodo, podemos escribir las ecuaciones generales del movimiento a lo largo de las dos direcciones $x$ e $y$ como función del mismo,

$$x(t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right),$$
$$y(t) = B\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{3\pi}{2}\right).$$

Para $t = 2$ s,

$$x(t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{8}2\right) = A\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = A,$$
$$y(t) = B\sin\left(\frac{2\pi}{8}2 + \frac{3\pi}{2}\right) = B\sin(\pi) = 0.$$

Y, con los datos del problema (en ese instante el movimiento resultante se encuentra a 10 m), entonces $A = 10$ m.

Para $t = 4$ s,

$$x(t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{8}4\right) = A\sin(\pi) = 0,$$
$$y(t) = B\sin\left(\frac{2\pi}{8}4 + \frac{3\pi}{2}\right) = B\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = B.$$

Y, con los datos del problema (en ese instante el movimiento resultante se encuentra a 30 m), entonces $B = 30$ m.

Para $t = 5$ s,

$$x(t) = 10\sin\left(\frac{2\pi}{8}5\right) = 10\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -7.07 \text{ m},$$
$$y(t) = 30\sin\left(\frac{2\pi}{8}5 + \frac{3\pi}{2}\right) = 30\sin\left(\frac{11\pi}{4}\right) = 21.21 \text{ m}.$$

Y la distancia con respecto al origen será

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{7.07^2 + 21.21^2} = 22.35 \text{ m}.$$

(d) Si las amplitudes fuesen iguales, el elipsoide se transformaría en una circunferencia y el movimiento sería circular.

En el caso de que el movimiento fuese amortiguado, entonces la frecuencia angular variaría como

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{0.7854^2 - 0.0314^2} = 0.7847 \text{ s}^{-1}.$$

La amplitud del movimiento pasaría a depender de forma decreciente con el tiempo como

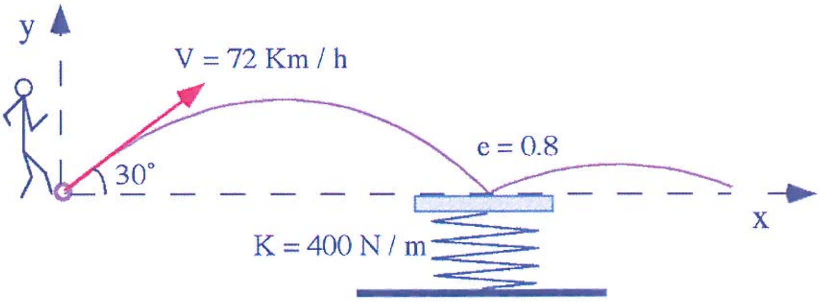
$$A(t) = A_0 e^{-\left(\frac{\gamma}{2m}\right)t} = A_0 e^{-\gamma t},$$

donde en ambos casos hemos tenido en cuenta que $m = 0.5$ kg.

Un futbolista golpea un balón de m = 0.5 kg inicialmente en reposo, suministrándole una velocidad inicial de 72 km/h y formando un ángulo de 30° con la horizontal.

**a)** Si el pie está en contacto durante 5 milésimas de segundo y suponemos que la fuerza que actúa es constante, determinar vectorialmente la fuerza que ejerce el pie sobre el balón.

**b)** Determinar el alcance horizontal del balón y la altura máxima (despreciar el rozamiento del aire)




El balón golpea sobre una placa horizontal de masa m = 4 kg en reposo sobre un muelle de constante K = 400 N/m y masa despreciable. Suponemos que el coeficiente de restitución es de e = 0.8

**c)** Determinar la velocidad del balón después del choque y el ángulo que forma con la horizontal. ¿Cuál será la velocidad de la placa? ¿qué tipo de choque se produce?

**d)** Determinar la máxima compresión de la placa respecto a su posición de equilibrio. ¿Qué tipo de movimiento realizará la placa?

**e)** Escribir la ecuación del movimiento de la placa tomando como t = 0 el momento del choque.

SOLUCION

**a)** Primero pasamos la velocidad inicial ($v_0$) al sistema internacional y calculamos sus dos componentes:

$v_0 = 72$ km/h $*(1000$ m/1 km$)$ $*$ $(1$ h/3600 s$) = 20$ m/s

$$v_{0x} = v_0 \cos 30 = 10 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} 30 = 17.32 \text{ m/s}$$

Recordando la relación entre el incremento de momento y el Impulso y recordando que suponemos la fuerza constante:

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{I} = \int \mathbf{F}\, dt = \mathbf{F} \int dt = \mathbf{F}\, \Delta t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = \frac{m \Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{0.5\ (17.32\ \mathbf{i} + 10\ \mathbf{j})}{0.005} = (1732\ \mathbf{i} + 1000\ \mathbf{j})\ \text{N}}$$

**b)** Recordando que en el tiro parabólico $v_y = v_{0y} - gt$, y que en la altura máxima $v_y = 0 \Rightarrow$

$$0 = v_{0y} - g t_{ymax} \quad \Rightarrow \quad t_{ymax} = v_{0y} / g \qquad ( = 17.32/9.81 = 1.019 \text{ s} )$$

Además, la relación entre la altura y el tiempo es $y = v_{0y}\, t - (1/2) g t^2$

Sustituyendo el valor de $t_{ymax}$ $\Rightarrow$ $\boxed{y_{max} = (v_{0y})^2 / g - (1/2) g (v_{0y} / g)^2 = (1/2)(v_{0y})^2 / g = 5.097 \text{ m}}$

El alcance máximo se produce para un tiempo doble que el de la máxima altura: $t_{xmax} = 2\, t_{ymax} = 2 v_{0y} / g$

Sustituyendo este valor en la ecuación $x = v_{0x}\, t$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_{max} = v_{0x}\, t_{xmax} = 2\, v_{0x}\, v_{0y} / g = 35.31 \text{ m}}$

c) En cuanto a las velocidades del balón antes del choque, la componente x es la misma que la inicial, ya que en la dirección x la velocidad permanece constante. La componente y también será igual a la inicial, pero cambiada de signo. Es decir $vb_x = v_{0x} = 17.32$ m/s y $vb_y$ - $v_{0y} = -10$ m/s.

El choque es central oblicuo, por lo tanto la componente x de la velocidad no cambia en ninguno de los dos cuerpos , y solo se modifica la componente y. El choque es inelástico, ya que la energía no se conserva (e≤1). Planteamos las ecuaciones de conservación del momento y del coeficiente de restitución:

$$mb\, vb_y + mp\, vp_y = mb\, vb_y{}' + mp\, vp_y{}'$$

$$e = -\frac{vp_y{}' - vb_y{}'}{vp_y - vb_y} \Rightarrow e\,(vp_y - vb_y) = -\,(vp_y{}' - vb_y{}')$$

Como la velocidad inicial de la placa es cero, $vp_y = 0$, las dos ecuaciones nos quedan:

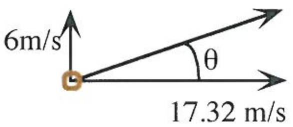
$$mb\, vb_y = mb\, vb_y{}' + mp\, vp_y{}'$$
$$e\; vb_y = vp_y{}' - vb_y{}'$$

Sustituyendo los valores de e, las masas y $vb_y$:

$$0.5\,(-10) = 0.5\, vb_y{}' + 4\, vp_y{}'$$
$$0.8\,(-10) = vp_y{}' - vb_y{}' \qquad \Rightarrow \qquad vb_y{}' = 8 + vp_y{}'$$

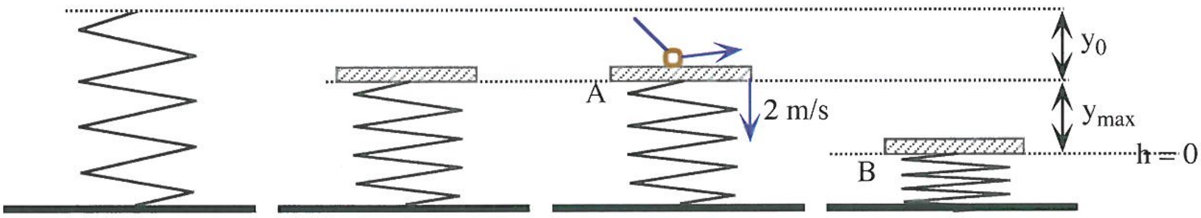
Nos queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas sencillo. Si despejamos $vb_y{}'$ en la segunda ecuación y lo introducimos en la primera: $-5 = 0.5\,(8 + vp_y{}') + 4\, vp_y{}' \Rightarrow \boxed{vp_y{}' = -9 / 4.5 = -2 \text{ m/s}}$

Y para el balón: $\boxed{vb_y{}' = 8 + vp_y{}' = 8 - 2 = 6 \text{ m/s}}$




$$\text{tg}\,\theta = vb_y{}' / vb_x{}' \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} |\mathbf{vb}'| = 18.33 \text{ m/s} \\ \theta = 19.11° \end{array}}$$

**d)** Al colocar la placa, el muelle se comprime un valor: $y_0$, al golpear el balón, adquiere una energía cinética que lo comprime aún mas, tal como se muestra en la gráfica:




Aplicamos la conservación de la energía entre las posiciones A y B. Como la posición B es la de máxima compresión, la velocidad será 0, también tomamos en dicha posición h = 0:

$$1/2\, Ky_0{}^2 + mg\, y_{max} + 1/2\, mv^2 = 1/2\, K(y_0 + y_{max})^2 \Rightarrow$$

$$\cancel{1/2\, Ky_0{}^2} + mg\, y_{max} + 1/2\, mv^2 = \cancel{1/2\, Ky_0{}^2} + 1/2\, Ky_{max}{}^2 + K\, y_0\, y_{max}$$

Además, cuando la placa estaba en equilibrio sobre el muelle, $mg = K\, y_0 \Rightarrow y_0 = mg/K$, sustituyendo este valor de $y_0$ en la ecuación anterior:

$$\cancel{mg\, y_{max}} + 1/2\, mv^2 = 1/2\, Ky_{max}{}^2 + \cancel{K\,(mg/K)\, y_{max}} \Rightarrow 1/2\, mv^2 = 1/2\, Ky_{max}{}^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{y_{max} = \sqrt{\frac{mv^2}{K}} = \sqrt{\frac{4\;\, 2^2}{400}} = 0.2 \text{ m}}$$

La placa realiza un movimiento armónico simple entorno a su posición inicial de equilibrio con una amplitud $A = 0.2$ m

**e)** La frecuencia angular será $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{400}{4}} = 10$ rad/s

Si partimos de la ecuación general $y = A\ \mathrm{sen}(\omega t + \phi)$, en el momento en que el balón golpea a la placa, $t = 0$ e $y = 0$, por lo que $\mathrm{sen}(\phi) = 0 \Rightarrow \phi = 0, \pi$

Para saber cual de estos dos valores es el correcto, derivamos la ecuación general $\Rightarrow v_y = A\omega \cos(\omega t + \phi)$. Como en $t = 0$, $v_y = -2$, ( negativa y de magnitud máxima) $\Rightarrow \cos(\phi) = -1 \Rightarrow \phi = \pi$

La ecuación será por tanto: $\boxed{y = 0.2\ \mathrm{sen}(10\ t + \pi)}$

Si hubiéramos partido de $y = A \cos(\omega t + \phi)$, llegaríamos a que $\phi = \pi/2, 3\pi/2$, y realizando un análisis similar con la velocidad, a que $\phi = \pi/2$, por lo que $\boxed{y = 0.2 \cos(10\ t + \pi/2)}$

Ambas ecuaciones son equivalentes.

**Se observa que el periodo de vibración para la disposición presentada en la figura es de 0,6 s. Si después de quitar el cilindro B, cuyo masa es de 1,5 Kg, se observa que el nuevo periodo es de 0,5 s, determinar (a) la masa del bloque A, (b) la constante elástica del muelle.**


**Solución:**

En la primera configuración (con las dos masas colgadas),

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{M_A + M_B}{k}} \quad \Rightarrow \quad T_1^2 = 4\pi^2 \frac{M_A + M_B}{k} \qquad (1)$$

En la segunda configuración (solo la masa A colgada),

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi\sqrt{\frac{M_A}{k}} \quad \Rightarrow \quad T_2^2 = 4\pi^2 \frac{M_A}{k} \qquad (2)$$

Diviendiendo la ecuación (1) entre la (2)

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{4\pi^2 \frac{M_A + M_B}{k}}{4\pi^2 \frac{M_A}{k}} = 1 + \frac{M_B}{M_A}$$

$$\frac{M_B}{M_A} = \frac{T_1^2}{T_2^2} - 1 \quad \Rightarrow \quad M_A = \frac{M_B}{\left(\frac{T_1^2}{T_2^2} - 1\right)}$$

Sustituyendo los datos del problema

$$M_A = 3{,}41\ \text{kg}.$$

Y si ahora sustituimos este valor en la ecuación (2)

$$T_2^2 = 4\pi^2 \frac{M_A}{k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4\pi^2 M_A}{T_2^2} = 538\ \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

**Una partícula de masa $m$ se encuentra en un campo de energía potencial que solo depende de $x$ de la forma: $E_p(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}$ , donde $a$ y $b$ son ciertas constantes positivas. Hallar el periodo de oscilaciones de la partícula en su movimiento en la dirección $x$ alrededor de las posiciones de equilibrio.**

**Solución:**

Para encontrar los puntos de equilibrio estudiamos dónde se anula la derivada primera:

$$\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_{equil.}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2\frac{a}{x^3_{equil.}} + \frac{b}{x^2_{equil.}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{equil.} = \frac{2a}{b}$$

Para ver si se trata de un punto de equilibrio estable estudiamos el valor de la derivada segunda en dicha posición:

$$\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_{equil.}} = 6\frac{a}{x^4_{equil.}} - 2\frac{b}{x^3_{equil.}} = \frac{b^4}{8a^3} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{P. Equil. Estable}$$

Expandiendo en serie de Taylor el potencial en torno a la posición de equilibrio,

$$E_p(x) \approx E_p(x_0) + \left.\frac{dE}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3E}{dx^3}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^3 + \ldots$$

En esta expresión, el primer sumando de la parte derecha de la ecuación podemos tomarlo como una constante (el cero de energías). La derivada primera se anula si se evalúa en la posición de equilibrio. Además, si nos movemos en un entorno suficientemente cercano a $x_0$, entonces $(x-x_0)$ es un valor pequeño y el término cúbico (y potencias superiores) son mucho más pequeños que el cuadrático, con lo que podemos despreciarlos. Así nos queda

$$E_p(x) \approx E_p(x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2,$$

que es la ecuación de un movimiento oscilatorio armónico con constante elástica

$$k = \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_{equil.}} = \frac{b^4}{8a^3}$$

Y el periodo de oscilación será:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \boxed{\frac{4\pi a\sqrt{2ma}}{b^2}}$$