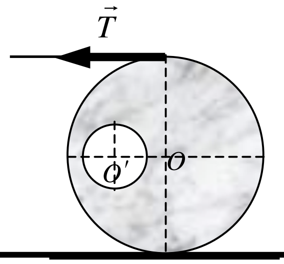
Problema 1: El cilindro uniforme de radio a de la figura pesaba en un principio 80 N. Después de taladrársele un agujero cilíndrico de eje paralelo al anterior su peso es de 75 N. Suponiendo que el cilindro no desliza sobre la mesa ¿Cuál debe ser la tensión de la cuerda que le impida moverse en la situación representada?. Determinar el coeficiente de rozamiento mínimo para que no deslice. $\overline{OO'} = \frac{2}{3}a$.



Solución:

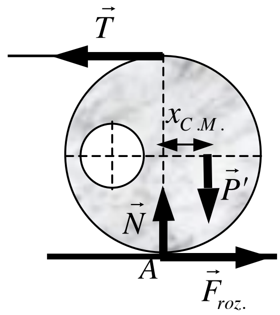
Llamemos P y P' al peso del cilindro antes y después de hacerle el agujero. Llamemos r al radio del agujero, H a la altura del cilindro y ρ a su densidad. Con los datos que nos dan en el enunciado podemos calcular r:

$$P' = \left[\left(\pi a^2 - \pi r^2\right)H\rho\right]g = \pi a^2 H\rho g\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = P\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad r = a\sqrt{1 - \frac{P'}{P}} = \frac{a}{4}$$

Si ponemos el origen de coordenadas en O podemos calcular donde se encuentra el C.M. del cilindro agujereado (por simetría la coordenada $y_{C.M.}$ será nula). El cálculo de la componente x del centro de masas puede realizarse descomponiendo el cilindro agujereado en dos elementos: un cilindro macizo (por simetría el centro de masas se encuentra en el origen), y un agujero cilíndrico (es decir, suponemos que su masa es negativa) que, por simetría, tiene como coordenada x del centro de masas 2/3 a.

$$x_{C.M.} = \frac{0 - \left(P - P'\right)\left(-\frac{2}{3}a\right)}{P'} = \frac{2}{45}a$$



Aplicando las condiciones de la estática:

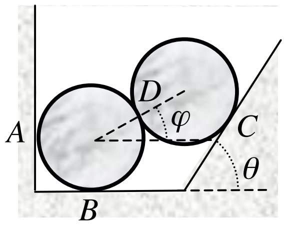
$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_{roz.} - T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = F_{roz.} \\ N - P' = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P' \end{cases}$$

$$\sum_i \vec{\tau}_i^{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad T\left(2a\right) - P' x_{C.M.} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \left(\frac{x_{C.M.}}{2a}\right)P' = \boxed{\frac{1}{45}\,\mathrm{N}}$$

La fuerza de rozamiento es estática y debe ser menor que su valor máximo:

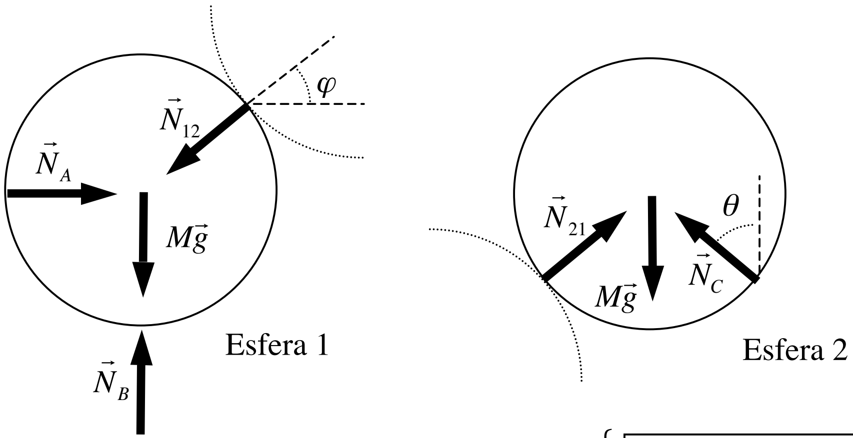
$$F_{roz.} = T \le F_{roz.máx.} = \mu N = \mu P' \quad \Rightarrow \quad \mu \ge \frac{T}{P'} = \boxed{2.2 \cdot 10^{-2}}$$

Problema 3: Dos esferas de radio R y masa M quedan en equilibrio en la posición indicada. Calcular las fuerzas ejercidas por el suelo sobre las esferas en los puntos de contacto A, B, C, así como la que se ejercen entre si ambas esferas. Datos: $\varphi = 30^\circ$, $\theta = 60^\circ$.



Solución:

Dibujando todas las fuerzas, planteando las ecuaciones de la estática para las esferas (obsérvese que las fuerzas que actúan sobre cada esfera son concurrentes en el centro, por lo tanto el momento de fuerzas total sobre cada una de ellas es automáticamente nulo, según el teorema de Varignon y teniendo en cuenta que la resultante en el equilibrio debe anularse). Además, sabemos que $N_{12} = N_{21}$, y por lo tanto:



$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} N_A - N_{12}\cos\varphi = 0 \\ N_B - N_{12}\,\mathrm{sen}\,\varphi - Mg = 0 \\ N_{12}\cos\varphi - N_C\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \\ N_{12}\,\mathrm{sen}\,\varphi + N_C\cos\theta - Mg = 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \boxed{\begin{array}{l} N_A = \left[\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi}{\cos(\theta-\varphi)}\right]Mg = \dfrac{\sqrt{3}}{2}Mg \\ N_B = \left[1 + \dfrac{\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\cos(\theta-\varphi)}\right]Mg = \dfrac{3}{2}Mg \\ N_C = \left[\dfrac{\cos\varphi}{\cos(\theta-\varphi)}\right]Mg = Mg \\ N_{12} = \left[\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos(\theta-\varphi)}\right]Mg = Mg \end{array}} \right.$$

Para la resolución del sistema de ecuaciones, hemos partido de la tercera ecuación,

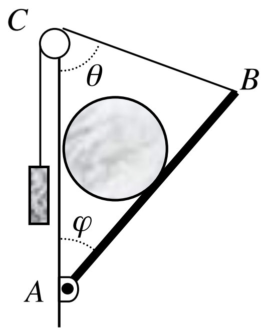
$$N_{12}\cos\varphi - N_C\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad N_C = \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}N_{12},$$

y sustituido este resultado en la cuarta ecuación,

$$N_{12}\sin\varphi + \frac{\cos\varphi\cos\theta}{\sin\theta}N_{12} - Mg = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{\sin\varphi\sin\theta + \cos\varphi\cos\theta}{\sin\theta}N_{12} = Mg \Rightarrow$$
$$N_{12} = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi\sin\theta + \cos\varphi\cos\theta}Mg = \frac{\sin\theta}{\cos(\theta-\alpha)}Mg.$$

Finalmente se sustituye este valor de N_{12} en el resto de ecuaciones.

Problema 8: Un disco homogéneo de peso W y radio R se apoya en una pared vertical lisa y sobre una barra de peso Q. Uno de los extremos de la barra puede girar alrededor de una rótula en A y el otro extremo está unido a un hilo que tras pasar por una polea sin rozamiento lleva en el otro extremo suspendido un peso P. Determinar las distintas reacciones entre los sólidos, así como el peso P para que la barra esté en equilibrio formando un ángulo de 30º con la vertical. $\overline{AB} = \overline{AC} = 2L$.

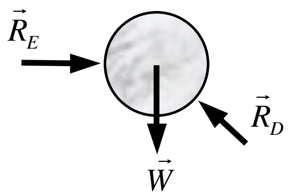


Solución: **I.T.I. 03**

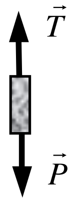
El triángulo ABC es isósceles con lo que los otros lados del triángulo valen: $\theta = \dfrac{\pi - \varphi}{2}$.

Si llamamos D al punto de contacto del disco con la barra:

$$\frac{R}{\overline{AD}} = \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} \quad \Rightarrow \quad \overline{AD} = R\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}$$

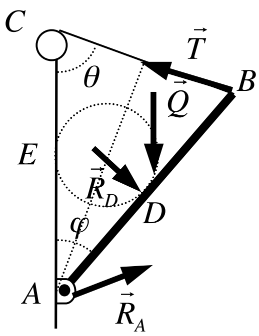


Aplicando las condiciones de la estática para cada uno de los cuerpos (para la barra el cálculo de momentos se realiza respecto del punto A):



$$T - P = 0 \quad \Rightarrow \quad T = P$$

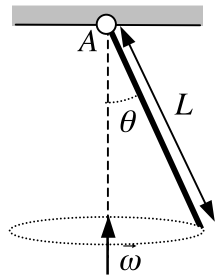
$$\left.\begin{aligned} R_E - R_D\cos\varphi = 0 \\ R_D\,\mathrm{sen}\varphi - W = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{ \boxed{\begin{aligned} R_D &= \frac{W}{\mathrm{sen}\varphi} \\ R_E &= \frac{W}{\mathrm{tg}\varphi} \end{aligned}} \right.$$



$$\left.\begin{aligned} R_{A\,x} + R_D\cos\varphi - T\,\mathrm{sen}\theta = 0 \\ R_{A\,y} - R_D\,\mathrm{sen}\,\varphi + T\cos\theta - Q = 0 \\ T(2L)\mathrm{sen}\,\theta - QL\mathrm{sen}\,\varphi - R_D\,\overline{AD} = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \boxed{\begin{aligned} P &= Q\,\mathrm{sen}\frac{\varphi}{2} + \frac{WR}{2L\mathrm{sen}\varphi\ \mathrm{sen}\dfrac{\varphi}{2}} \\ R_{A\,x} &= \frac{1}{2}Q\mathrm{sen}\varphi + \left[\left(\frac{R}{2L}\right)\left(\mathrm{sen}\varphi\ \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{-1} - \mathrm{ctg}\varphi\right]W \\ R_{A\,y} &= Q\cos^2\frac{\varphi}{2} + \left[1 - \frac{R}{2L\mathrm{sen}\,\varphi}\right]W \end{aligned}} \right.$$

Problema 9: Una barra homogénea de masa M y longitud L gira alrededor de una rótula situada en su extremo superior A con velocidad angular constante ω, describiendo una superficie cónica. Calcular: a)¿ Qué fuerzas actúan sobre la barra? b) El ángulo distinto de cero que forma la barra con la vertical en la posición de equilibrio c) Reacción en la rótula.

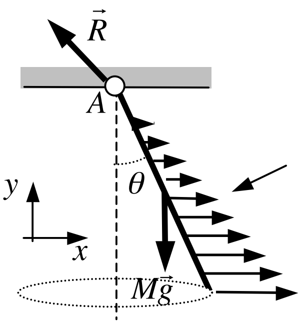


Solución:

a) Para que el problema sea un problema de estática debemos colocarnos en un sistema de referencia no inercial con origen en el eje de rotación y girando con la misma velocidad angular que la barra. Desde ese punto de vista la barra permanecerá estática formando un ángulo θ con la vertical y sometida a las siguientes fuerzas:

Fuerza centrífuga infinitesimal sobre un diferencial de longitud dl a distancia l de A (con l variando entre 0 y L):

$$dF_{cent.} = dm\,\omega^2 r = (\lambda\, dl)\omega^2(l\,\text{sen}\theta)$$



Fuerzas centrífugas actuándo sobre cada una de las partes de la barra

Integrando para toda la barra tenemos la fuerza centrífuga total equivalente a todas las fuerzas microscópicas:

$$F_{cent.} = \int_0^L \lambda\,\omega^2 l\,\text{sen}\,\theta\, dl = \frac{1}{2}\lambda\,\omega^2 L^2\,\text{sen}\theta = \frac{1}{2}M\,\omega^2 L\,\text{sen}\,\theta$$

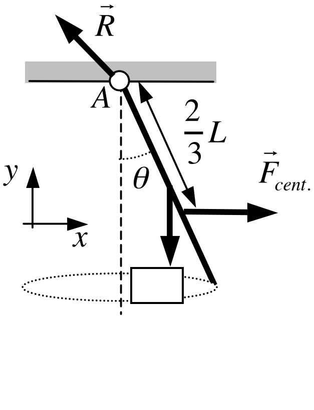
El momento de fuerzas respecto de A de una fuerza centrífuga infinitesimal será:

$$d\tau_{cent.A} = dF_{cent.}l\cos\theta = dm\,\omega^2 r = \lambda\,\omega^2 l^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\, dl$$

Integrando para toda la barra tenemos el momento centrífugo total equivalente a todos los momentos microscópicos:

$$\tau_{cent.A} = \int_0^L \lambda\,\omega^2 l^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\, dl =$$

$$= \frac{1}{3}\lambda\,\omega^2 L^3\,\text{sen}\theta\cos\theta = F_{cent.}\left(\frac{2}{3}L\right)\cos\theta$$



Todas las fuerzas microscópicas centrífugas se pueden sustituir por lo tanto por una única fuerza $\vec{F}_{cent.}$ aplicada en un punto de la barra a $\frac{2}{3}L$ de A:

b) Aplicando la condición de la estática para los momentos:

$$\sum_i \vec{\tau}_{i,A} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{cent.}\left(\frac{2}{3}L\right)\cos\theta - Mg\left(\frac{L}{2}\right)\operatorname{sen}\theta = 0$$

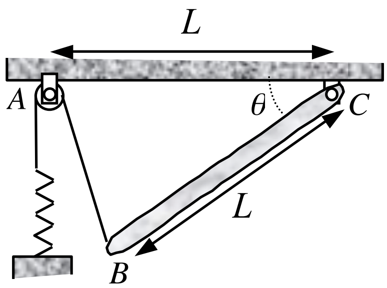
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}M\omega^2 L^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta = Mg\left(\frac{L}{2}\right)\operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen}\theta = 0 \quad \text{(solución trivial)} \\ \cos\theta = \dfrac{3g}{2\omega^2 L} \end{array}}$$

c) Aplicando la condición de la estática para las fuerzas:

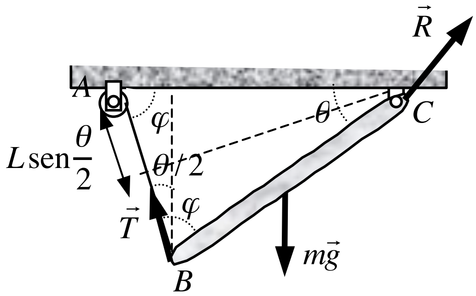
$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_x + F_{cent.} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_x = -\frac{1}{2}M\,\omega^2 L\operatorname{sen}\theta} \\ R_y - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_y = Mg} \end{cases}$$

Problema 10: La varilla BC de la figura puede rotar libremente alrededor de C. En el extremo B se le ata una cuerda ligada a un muelle de constante elástica k, el cual no estaría estirado si la varilla adoptase una posición horizontal ($\theta = 0$). a) Determinar el valor de θ correspondiente al ángulo de equilibrio del sistema en función de la masa m y la longitud L de la varilla y la constante elástica k del muelle. b) Calcular el valor de todas las fuerzas que actúan sobre la varilla en función de m, L, k y el ángulo de equilibrio θ.



Solución: I.T.I. 03

a) El triángulo ABC es un triángulo isósceles con lo que un sencillo cálculo trigonométrico indica que el ángulo que forma la tensión con la vertical es $\theta/2$, el mismo ángulo que forma con la dirección perpendicular a la barra. Dicha tensión será igual a la constante elástica del muelle multiplicada por lo que éste se ha alargado que es justamente la distancia .



Tomando momentos respecto de C y aplicando las condiciones de la estática:

b) Como ya hemos utilizado en el apartado anterior: $\boxed{T = 2kL\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}$

Aplicando las condiciones de la estática para las fuerzas:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_x - T\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x = T\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2} = \boxed{2kL\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}} \\ R_y + T\cos\frac{\theta}{2} - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad R_y = mg - T\cos\frac{\theta}{2} = \boxed{mg - kL\,\mathrm{sen}\theta} \end{cases}$$