

Las pesas de la figura ruedan sin deslizar y sin rozamiento por un plano inclinado 30° y de longitud 30 m. Calcular:

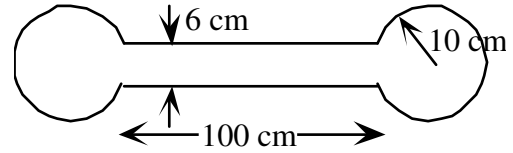
(a) la velocidad en el pie del plano inclinado si las pesas parten del reposo en la parte superior del plano.

(b) Tiempo que tarda en recorrerlo.

(c) Velocidad angular de las pesas en el punto medio y en el punto inferior del plano.

(Nota: las pesas son de acero uniforme de densidad $\rho = 7 \text{ g/cm}^3$).

Tomad $g=10 \text{ m/s}^2$.



SOLUCIÓN

(a) Lo primero que tenemos que hacer es calcular el momento de inercia de la pesa con respecto a un eje que pase por el eje de simetría del cilindro central. Consideramos las pesas como la unión de dos esferas y un cilindro (ambos macizos), por lo que el momento de inercia tomará el valor

$$I = I_{\text{esfera}} + I_{\text{esfera}} + I_{\text{cilindro}} = 2I_{\text{esfera}} + I_{\text{cilindro}} = 2 \times \frac{2}{5} M_{\text{esfera}} R_{\text{esfera}}^2 + \frac{1}{2} M_{\text{cilindro}} R_{\text{cilindro}}^2. \quad (1)$$

La masa de la esfera viene dada por

$$M_{\text{esfera}} = \rho \frac{4}{3} \pi R_{\text{esfera}}^3, \quad (2)$$

mientras que la masa del cilindro vale

$$M_{\text{cilindro}} = \rho \pi R_{\text{cilindro}}^2 h_{\text{cilindro}}. \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1)

$$I = \frac{16}{15} \rho \pi R_{\text{esfera}}^5 + \frac{1}{2} \rho \pi R_{\text{cilindro}}^4 h_{\text{cilindro}}.$$

Con los datos del problema

$$\rho = 7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \times \frac{1 \text{ kg}}{1000 \text{ g}} \times \left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \right)^3 = 7000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

$$R_{\text{esfera}} = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m},$$

$$R_{\text{cilindro}} = 3 \text{ cm} = 0.03 \text{ m},$$

$$h_{\text{cilindro}} = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m},$$

El momento de inercia toma el valor $I = 0.243 \text{ kg} \times \text{m}^2$.

Por otra parte, la masa total suma $M_{\text{total}} = 2M_{\text{esfera}} + M_{\text{cilindro}} = 78.435 \text{ kg}$.

El movimiento acelerado de las pesas con un movimiento de rotación sin deslizamiento es posible solo si existe una fricción entre la superficie de las pesas y la superficie del plano inclinado. Esta fuerza de rozamiento produce un torque neto que es el que hace girar la pesa.

A pesar de la existencia de esta fuerza de rozamiento, no hay pérdida en la energía mecánica, ya que el desplazamiento del punto de aplicación es nulo (el punto de contacto está en reposo relativo con respecto a la superficie). Por lo tanto, la energía mecánica del sistema se conserva.

Para el sistema formado por la Tierra y las pesas, definimos el cero de energías potenciales gravitatorias en la base del plano inclinado. En la configuración inicial (pesas en lo alto del plano inclinado) solo hay energía potencial gravitatoria. En la configuración final (pesas al pie del plano inclinado) solo hay energía cinética. Pero ojo, tenemos que calcular la energía cinética de rotación en torno al centro de masas más la energía cinética de traslación del centro de masas. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} K_f + U_f &= K_i + U_i \\ \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2 + \frac{1}{2} M_{\text{total}} v_{\text{CM}}^2 + 0 &= 0 + M_{\text{total}} g L \sin \alpha \\ \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \left(\frac{v_{\text{CM}}}{R_{\text{esfera}}} \right)^2 + \frac{1}{2} M_{\text{total}} v_{\text{CM}}^2 &= \frac{1}{2} M_{\text{total}} \left(1 + \frac{I_{\text{CM}}}{M_{\text{total}} R^2} \right) v_{\text{CM}}^2 = M_{\text{total}} g L \sin \alpha \\ v_{\text{CM}} &= \sqrt{\frac{2 g L \sin \alpha}{\left(1 + \frac{I_{\text{CM}}}{M_{\text{total}} R^2} \right)}} = 15.13 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

En la expresión anterior, hemos tenido en cuenta que la velocidad angular de rotación puede escribirse como el cociente de la velocidad del centro de masas entre el radio de la esfera, que son precisamente la parte de la pesa que rota sobre la superficie.

A lo largo del problema asumiremos siempre que las velocidades y aceleraciones del centro de masas están dirigidas en la dirección paralela al plano inclinado, que tomamos como eje x , con sentido positivo hacia abajo.

(b) Conocida la velocidad de traslación del centro de masas al pie del plano inclinado y la distancia recorrida, podemos conocer la aceleración del centro de masas

$$v_{\text{CM},f}^2 = v_{\text{CM},i}^2 + 2a_{\text{CM}}(x_{\text{CM},f} - x_{\text{CM},i}),$$

$$a_{\text{CM}} = \frac{v_{\text{CM},f}^2}{2L} = 3.81 \text{ m/s}^2.$$

Conocida la aceleración, podemos conocer el tiempo necesario para recorrer el plano inclinado

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a_{\text{CM}}}} = 3.96 \text{ s.}$$

(c) En el punto inferior del plano, la velocidad angular de las pesas vienen dadas por

$$\omega_f = \frac{v_{\text{CM}}^f}{R_{\text{esfera}}} \Rightarrow \omega_f = \frac{15.13}{0.1} \text{ rad/s} = 151.3 \text{ rad/s.}$$

En el punto medio, la velocidad del centro de masas es

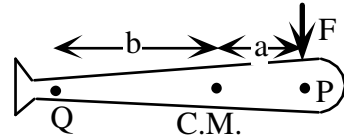
$$v_{\text{CM,medio}}^2 = v_{\text{CM,i}}^2 + 2a_{\text{CM}}(x_{\text{CM,f}} - x_{\text{CM,medio}}) = 2a_{\text{CM}} \frac{L}{2} = a_{\text{CM}}L = 114.3 \text{ m}^2/\text{s}^2,$$

$$v_{\text{CM}}^{\text{medio}} = \sqrt{114.3} \text{ m/s} = 10.7 \text{ m/s.}$$

Con lo que la velocidad angular vale

$$\omega_{\text{medio}} = \frac{v_{\text{CM}}^{\text{medio}}}{R_{\text{esfera}}} \Rightarrow \omega_{\text{medio}} = \frac{10.7}{0.1} \text{ rad/s} = 107 \text{ rad/s.}$$

Una varilla de longitud L y masa m reposa sobre un plano horizontal sin fricción. Durante un intervalo de tiempo muy corto Δt , una fuerza F que actúa sobre aquella produce un impulso I . La fuerza actúa en un punto P situado a una distancia a del centro de masas. Encontrar:



- La velocidad del centro de masas
- La velocidad angular con respecto al centro de masas.
- Determinar el punto Q que inicialmente permanece en reposo en el sistema L , demostrando que $b=K^2/a$, siendo K el radio de giro con respecto al centro de masas. El punto Q se denomina centro de percusión (por ejemplo, un jugador de béisbol debe sostener el bate en el centro de percusión para evitar sentir la sensación de dolor cuando él golpea la pelota. Demostrar también que si la fuerza da en Q , el centro de percusión se encuentra en P .

SOLUCIÓN

(a) Por el teorema del impulso, el impulso mecánico es la variación del momento lineal. Si tomamos la dirección y como vertical, tanto la fuerza como el impulso como la variación del momento van en esa misma dirección. Prescindiendo del símbolo de vector y asumiendo que podemos calcular el momento lineal del sistema a partir de la velocidad del centro de masas con toda la masa del sistema localizada en el mismo, podemos escribir

$$I = F \Delta t = \Delta p = m(v_{CM}^f - v_{CM}^i) \quad \Rightarrow \quad v_{CM}^f = \frac{I}{m}.$$

Tal cual está dibujado en la figura, esta velocidad apuntará hacia abajo.

(b) Tomamos el sistema de referencia con origen en el centro de masas. Una fuerza $\vec{F}$ (dirección vertical sentido hacia abajo) actuando en un punto a una distancia a (sentido horizontal, dirección hacia la derecha), produce un momento de módulo Fa y cuya dirección se mete en el plano del papel.

Este momento será igual a la variación del momento angular (medido con respecto al centro de masas) respecto del tiempo. Como tanto el momento angular como el momento de la fuerza están dirigidos en la misma dirección, prescindimos del símbolo de vectores y escribimos

$$M_{CM} = \frac{dL_{CM}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int dL_{CM} = \int M_{CM} dt = \int Fa dt = a \int F dt = aI.$$

La integral del momento angular es trivial. Como inicialmente la varilla está en reposo no tiene momento angular y por tanto

$$aI = \Delta L_{CM} = L_{CM}^f - L_{CM}^i = L_{CM}^f.$$

Si escribimos este momento en función del radio de giro con respecto al centro de masas

$$mK^2\omega = Ia \Rightarrow \omega = \frac{Ia}{mK^2}.$$

(c) Cuando la varilla comienza a rotar, el centro de masas se desplazará hacia abajo [ver apartado (a)]. Al mismo tiempo, y como consecuencia del movimiento de rotación en torno al centro de masas, los puntos situados a la izquierda del centro de masas tienden a moverse simultáneamente hacia arriba. Denotaremos estas velocidades con respecto al centro de masas con primas. Habrá un punto para el cual esta velocidad compense exactamente con la velocidad de traslación del centro de masas. Ese punto estará en reposo con respecto a un sistema de referencia de laboratorio,

$$v_a = v_{CM} + v'_a \Rightarrow \text{Si } v_a = 0 \Rightarrow -v_{CM} = v'_a \Rightarrow \frac{I}{m} = \omega b,$$

donde b es la distancia que separa ese punto que no se desplaza en el sistema de laboratorio con respecto al centro de masas. Sustituyendo el valor de la velocidad angular

$$b = \frac{I}{m\omega} = \frac{I}{m \frac{Ia}{mK^2}} = \frac{K^2}{a}.$$

(d) Intercambiando b por a

$$\omega = \frac{Ib}{mK^2},$$

y el nuevo centro de percusión estará en c tal que

$$c = \frac{K^2}{b} = a,$$

Una rueda cuyo eje tiene un radio de 4 cm y es horizontal, se hace girar por la acción de un peso suspendido de una cuerda arrollada al eje. El peso necesario en la cuerda para vencer el rozamiento es $p = 100$ g. Se agregan 175 g más y el peso total, $p = 275$ g, cae verticalmente una altura $h = 3,6$ m en $t = 15$ s. Hallar:

(a) el momento de inercia de la rueda

(b) el radio de giro

(c) su energía cinética cuando gira a 120 revoluciones por minuto (6,74 J).

Suponer la masa del eje despreciable y la de la rueda igual a 10 kg

SOLUCIÓN

(a) Podemos conocer la aceleración lineal del peso a partir de la distancia caída y del tiempo tardado en recorrerla. Tomaremos el eje y con sentido positivo hacia abajo, y el origen de coordenadas en la posición inicial del peso. Como se trata de un movimiento rectilíneo y uniforme y el peso parte desde el reposo,

$$h = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2 \times 3.6 \text{ m}}{(15 \text{ s})^2} = 0.032 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Como sabemos el radio del eje al que está enrollado el peso, podemos conocer la aceleración angular de un punto del perímetro

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{0.032 \text{ m/s}^2}{0.04 \text{ m}} = 0.8 \text{ s}^{-2}.$$

Por la segunda ley de Newton de las rotaciones sabemos que

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha.$$

De las fuerzas externas, el peso de la rueda no produce momento alguno puesto que se supone aplicado en el centro de masas, localizado en el eje. La fuerza de rozamiento produce un momento que cancela con el momento producido por el peso de los primeros 100 g. Por lo tanto, el único momento externo que queda es el producido por los 175 g extras. Como el peso está aplicado en el perímetro del eje, de 0.04 m de radio, y en ese punto el peso y el radio son perpendiculares entre sí,

$$I = \frac{\sum \tau_{\text{ext}}}{\alpha} = \frac{0.175 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 \times 0.04 \text{ m}}{0.8 \text{ s}^{-2}} = 85.84 \times 10^{-3} \text{ kg} \times \text{m}^2.$$

(b) El radio de giro se define como la distancia a la que tendríamos que colocar toda la masa del cuerpo (suponiendo que está concentrada en un único punto) para obtener el mismo momento de inercia.

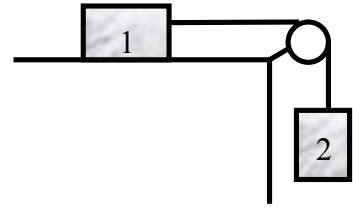
$$I = MK^2 \Rightarrow K = \sqrt{\frac{I}{M}} = \sqrt{\frac{85.84 \times 10^{-3} \text{ kg} \times \text{m}^2}{10 \text{ kg}}} = 0.0926 \text{ m} = 9,26 \text{ cm}.$$

(c) La energía cinética de rotación vendrá dada por

$$E_{cin} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (85.84 \text{ kg} \times \text{m}^2) \times \left(\frac{120 \times 2\pi}{60} \text{ rad/s} \right)^2 = 6.78 \text{ J}.$$

(d)

Dadas las masa de los cuerpos m_1 y m_2 y el coeficiente de rozamiento μ entre m_1 y la superficie horizontal, así como la masa de la polea m_p , que puede considerarse como un disco homogéneo, calcular la aceleración del sistema de la figura.



SOLUCIÓN

Vamos a tomar el sentido positivo del movimiento unidimensional del bloque 1 hacia la derecha. Para el bloque 2 tomamos el sentido positivo de movimiento hacia abajo. Dado que la cuerda que los une tiene longitud fija las aceleraciones de los dos cuerpos son iguales $a_1 = a_2 = a$. Para la polea tomamos el sentido positivo de giro horario. En la periferia de la polea la aceleración tangencial también será a con lo que su aceleración angular será: $\alpha = \frac{a}{R}$, donde R es el radio de la polea. Teniendo en cuenta que la tensión de la cuerda que tira de los cuerpos 1 y 2 es diferente para cada uno de ellos debido a que la polea posee un momento de inercia (no es una polea ideal sin masa) y dibujando el diagrama de fuerzas para los dos bloques y para la polea y aplicando la segunda ley de Newton:

$$T_1 - \mu m_1 g = m_1 a \quad m_2 g - T_2 = m_2 a$$
$$T_2 R - T_1 R = I \alpha = \left(\frac{1}{2} m_p R^2 \right) \left(\frac{a}{R} \right)$$
$$\Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m_p a$$

Tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas. La solución es:

$$T_1 = \left(\frac{m_2(1 + \mu) + \frac{1}{2} \mu m_p}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_p} \right) m_1 g$$
$$T_2 = \left(\frac{m_1(1 + \mu) + \frac{1}{2} m_p}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_p} \right) m_2 g$$
$$a = \left(\frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_p} \right) g$$