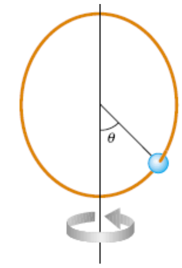
Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Septiembre de 2019
Problemas (Dos puntos por problema).
Problemas propuestos por los Prof. Javier Sandonís y Jesús Rodríguez

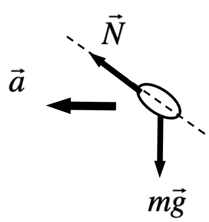
Problema 1. Una pequeña cuenta esférica de masa 10 g puede deslizar sin rozamiento por un aro circular de 15 cm de radio que se encuentra girando como se muestra en la figura. Si el periodo de la rotación del aro es de 0.45 s, hallar:

a) El valor de θ para la órbita estable de la cuenta (1 punto).
b) La reacción del aro sobre la cuenta (0.5 puntos).
c) ¿Qué sucedería si el periodo es de 0.85 s? (0.5 puntos).



Solución:

a) y b) Dibujando el diagrama de fuerzas y planteando la segunda ley de Newton:



$$\left.\begin{aligned} &N\cos\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{mg}{N} \\ &N\,\mathrm{sen}\,\theta = ma_N = m\omega^2 R_{giro} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Sol. 1} \begin{cases} \mathrm{sen}\,\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0 \\ N = mg = \boxed{0.098\ \text{N}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Sol. 2} \begin{cases} N = m\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 R = \boxed{0.292\ \text{N}} \\ \theta = \mathrm{Ar}\cos\left(\dfrac{gT^2}{4\pi^2 R}\right) = \boxed{70.42^\circ} \end{cases}$$

c) Si T = 0.85 la solución 2 no tendría sentido ya que el coseno del ángulo debería ser mayor que la unidad lo cual es imposible. La única solución viable es la 1.

Problema 2: Un saco de arena de 4 kg de masa pende de un hilo de 0.6 m de longitud. Sobre el saco se dispara un fusil cuya bala tiene una masa de 40 g. La bala atraviesa el saco y recorre una distancia horizontal d = 20 m antes de pegar en el suelo que se encuentra a h = 1.5 m por debajo del impacto en el saco. El saco oscila alcanzando un ángulo máximo θ = 60º con la vertical. Determinar:

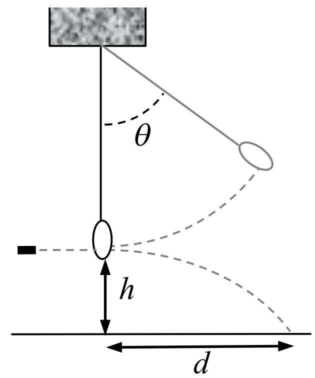
(a) la velocidad de la bala después del choque (0.4 puntos),

(b) la velocidad del saco después del choque (0.4 puntos),

(c) la tensión en la cuerda que sostiene al saco justo después del choque (0.4 puntos),

(d) la velocidad de la bala antes del choque (0.4 puntos), y

(e) la fuerza media que ejerce la arena sobre la bala si tarda en atravesarlo 0.5 s (0.4 puntos).



(Problema propuesto por los Prof. Javier Sandonís Ruiz y Jesús Fernández)

Solución:

a) El tiempo que tarda en llegar la bala al suelo después del choque es:

$$h = \frac{1}{2} g (\Delta t)^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Como nos dan la distancia horizontal recorrida durante ese tiempo:

$$d = v_{bala,después} \Delta t \quad \Rightarrow \quad v_{bala,después} = \frac{d}{\Delta t} = \sqrt{\frac{g}{2h}}\, d = \boxed{36.1 \mathrm{m/s}}$$

b) Las únicas fuerzas que actúan sobre el saco son el peso, que es una fuerza conservativa, y la tensión de la cuerda, que al ser perpendicular al movimiento del saco no realiza ningún trabajo. Podemos aplicar conservación de la energía entre el punto más bajo de su trayectoria y la posición en la que alcanza su máxima altura. Tomando como origen de energías potenciales gravitatorias en el punto más bajo:

$$E_{abajo} = E_{arriba} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m_{saco} v_{saco}^2 = m_{saco}\, g\, l (1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad v_{saco} = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)} = \boxed{2.42 \text{ m/s}}$$

c) Aplicando la segunda ley de Newton al saco justo después del choque:

$$T - mg = ma_n = m\frac{v_{saco}^2}{l}$$

$$\Rightarrow \quad T = m\left(\frac{v_{saco}^2}{l} + g\right) = \boxed{78.4\text{ N}}$$

d) Aplicando el principio de conservación del momento lineal en el choque:

$$m_{bala}\vec{v}_{bala,antes} = m_{bala}\vec{v}_{bala,después} + m_{saco}\vec{v}_{saco}$$

donde todos los vectores tienen la misma orientación horizontal. Despejando:

$$v_{bala,antes} = v_{bala,después} + \left(\frac{m_{saco}}{m_{bala}}\right)v_{saco} = \boxed{278.6\text{ m/s}}$$

e) La variación de momento lineal de la bala durante el choque es debido al impulso comunicado por la fuerza ejercida por la arena:

$$\vec{I}(t) = \vec{F}_{arena}\,\Delta t = \vec{p}_{bala,después} - \vec{p}_{bala,antes} = m\left(\vec{v}_{bala,después} - \vec{v}_{bala,antes}\right)$$

Teniendo en cuenta la orientación horizontal de todos los vectores:

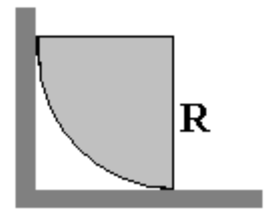
$$-F_{arena}\,\Delta t = m\left(v_{bala,después} - v_{bala,antes}\right) \quad \Rightarrow \quad F_{arena} = \frac{m}{\Delta t}\left(v_{bala,antes} - v_{bala,después}\right) = \boxed{19.40\text{ N}}$$

Problema 3. **Una placa está formada por un cuarto de círculo de radio R y masa M, se apoya sobre una pared vertical lisa y un suelo rugoso. Determinar:**

(a) Las coordenadas del centro de masas respecto del sistema de referencia pared-suelo (0.6 puntos).

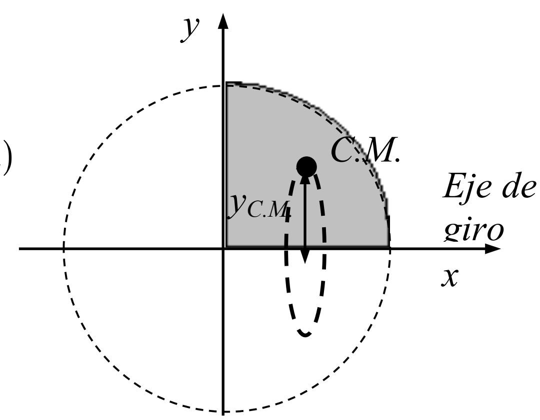
(b) El valor mínimo del coeficiente de rozamiento compatible con el equilibrio (0.8 puntos).

(c) Las reacciones en los apoyos si M = 3 kg (0.6 puntos).



Solución:

a) Aplicando el segundo teorema de Pappus Guldin a la placa de la figura:



$$Vol._{generado} = A_{placa} \cdot (\text{recorrido del C.M. de la placa})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{1}{4}\left(\pi R^2\right)\cdot\left(2\pi y_{C.M.}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y_{C.M.} = \frac{4R}{3\pi} \quad \overset{\text{(por simetría)}}{\Rightarrow} \quad x_{C.M.} = \frac{4R}{3\pi}$$

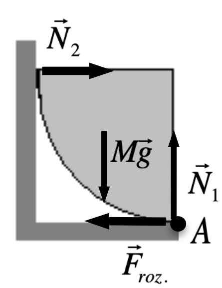
Teniendo en cuenta que nuestro origen de coordenadas se sitúa en la esquina entre la pared y el suelo:

$$\vec{r}_{C.M.} = (R,R) - \left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}\right) = \boxed{\left(R - \frac{4R}{3\pi}, R - \frac{4R}{3\pi}\right)}$$

b) Dibujando el diagrama de fuerzas que actúan sobre la placa y aplicando las ecuaciones de la estática:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N_2 - F_{roz.} = 0 \\ N_1 - Mg = 0 \end{cases}$$

$$\sum_i \vec{\tau}_{i,A} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 R - Mg \cdot \frac{4R}{3\pi} = 0$$



$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1 = Mg \\ \\ F_{roz.} = N_2 = \dfrac{4}{3\pi} Mg \end{array} \right.$$

El valor mínimo necesario del coeficiente de rozamiento sería:

$$F_{roz.} \leq \mu N_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3\pi} \leq \mu \quad \Rightarrow \quad \mu_{mín.} = \boxed{\frac{4}{3\pi} = 0.4244}$$

c) Para el valor de masa que nos dan:

$$N_1 = Mg = \boxed{29.4 \text{ N}}$$

$$F_{roz.} = N_2 = \frac{4}{3\pi} Mg = \boxed{12.48 \text{ N}}$$