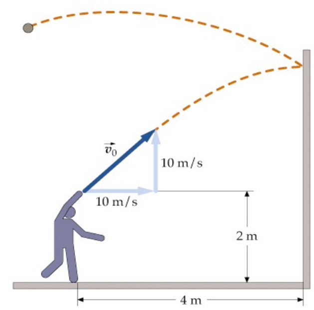
Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Septiembre de 2017
Problemas (Dos puntos por problema).

Problema 1: Una muchacha que está a d = 4m de una pared vertical lanza contra ella una pelota. La pelota sale de su mano a h = 2m por encima del suelo con una velocidad inicial $\vec{v} = 10\,\hat{\imath} + 10\,\hat{\jmath}$ m/s. Cuando la pelota choca en la pared se invierte la componente horizontal de su velocidad mientras que permanece sin variar su componente vertical. ¿Dónde caerá la pelota al suelo?



(Problema propuesto por el Prof. Javier Sandonís Ruiz)

Solución:

Si colocamos el origen de coordenadas en la posición de la persona a ras del suelo, y en el instante del lanzamiento ponemos en marcha el cronómetro, las ecuaciones del movimiento de la pelota en su movimiento antes de chocar con la pared serán:

$$t_0 = 0 \;,\quad x_0 = 0 \;,\quad y_0 = h = 2\,\mathrm{m} \;,\quad v_{0,x} = 10\,\mathrm{m/s} \;,\quad v_{0,y} = 10\,\mathrm{m/s}$$
$$x(t) = v_{0,x}\,t \;,\quad y(t) = h + v_{0,y}\,t - \frac{1}{2}gt^2 \;,\quad v_x(t) = v_{0,x} \;,\quad v_y(t) = v_{0,y} - gt$$

En el instante $t = t_a$ la pelota choca contra la pared:

$$x(t_a) = d = 4\,\mathrm{m} \quad\Rightarrow\quad v_{0,x}\,t_a = d \quad\Rightarrow\quad t_a = \frac{d}{v_{0,x}} = 0.4\,\mathrm{s}$$
$$y(t_a) == h + v_{0,y}\,t_a - \frac{1}{2}gt_a^2 = 5.216\ \mathrm{m}$$
$$v_x(t_a) = v_{0,x} = 10\ \mathrm{m/s} \;,\quad v_y(t_a) = v_{0,y} - gt_a = v_{0,y} - \frac{gd}{v_{0,x}} = 6.08\ \mathrm{m/s}$$

En el choque la componente horizontal de la velocidad cambia de signo, y a partir de ese instante la pelota realiza un nuevo movimiento parabólico donde:

$$t_0' = t_a = 0.4\,\mathrm{s} \;,\quad x_0' = d = 4\,\mathrm{m} \;,\quad y_0' = y(t_a) = 5.216\,\mathrm{m}$$
$$v_{0,x}' = -10\,\mathrm{m/s} \;,\quad v_{0,y}' = 6.08\,\mathrm{m/s}$$

$$x'(t) = x'_0 + v'_{0,x}\left(t - t_a\right)\ , \quad y'(t) = y'_0 + v'_{0,y}\left(t - t_a\right) - \frac{1}{2}g\left(t - t_a\right)^2$$

$$v'_x(t) = v'_{0,x}\ , \quad v'_y(t) = v'_{0,y} - g\left(t - t_a\right)$$

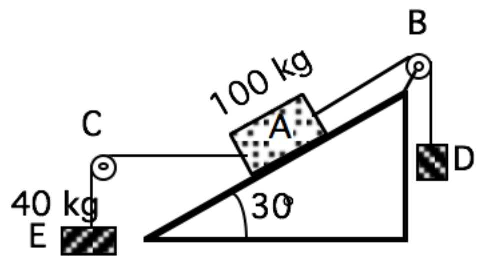
En el instante $t = t_b$ en que llegue al suelo:

$$y'\left(t_b\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'_0 + v'_{0,y}\left(t_b - t_a\right) - \frac{1}{2}g\left(t_b - t_a\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_b = 2.224\,\mathrm{s}$$

$$\Rightarrow \quad x'\left(t_b\right) = x'_0 + v'_{0,x}\left(t_b - t_a\right) = \boxed{-14.24\,\mathrm{m}}$$

La pelota golpea el suelo 18.24 m a la izquierda de la pared.
De no existir la pared, el movimiento de la pelota sería una parábola. Dadas las condiciones que se dan en el impacto de la pelota con la pared (inversión de la componente horizontal de la velocidad), el efecto de ésta sobre la trayectoria es doblarla como si se obtuviese la imagen especular de la misma, no afectando al movimiento vertical. Se puede comprobar esto verificando que si la pelota pudiese atravesar la pared caería a 18.24 m a la derecha de ésta.

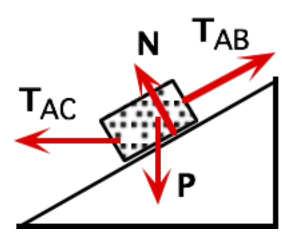
Problema 2: El sistema de la figura se encuentra en equilibrio. La cuerda AC es horizontal y la cuerda AB es paralela al plano. Si el plano y las poleas son lisas:
a) Representar las fuerzas que actúan sobre el cuerpo A (0,3 puntos).
b) Determinar el valor de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo A (0,4 puntos).
c) determinar la masa del cuerpo D (0,3 puntos).



A continuación supongamos que el plano y las poleas son rugosas, siendo el coeficiente de rozamiento entre el plano y el cuerpo A de μ = 0.1, el radio de la polea B, R = 0.1 m y momento de inercia de la polea B, I = 0.5 kgm^2. Si cortamos la cuerda horizontal AC:
d) ¿Asciende, desciende o se queda en reposo el cuerpo A? Razone la respuesta (0,3 puntos)
En caso de que se mueva determinar:
e) Las aceleraciones lineal del bloque y angular de la polea (0,4 puntos)
f) Las tensiones de la cuerda ABD (0,3 puntos)
(Problema propuesto en el examen de Septiembre de 2001 en el Grado de Ingeniería Industrial de la Universidad de Cantabria. Prof.: Jesús Rodríguez).

Solución:

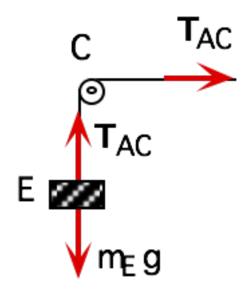
a) Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo A son :
- El peso P
- La normal N
- Las tensiones de las dos cuerdas T_{AB} y T_{AC}



b) El peso es conocido : $P = m_A g = 100\ 9.81 \Rightarrow \boxed{P = 981\text{ N}}$

Como el cuerpo E está en reposo, la cuerda que lo sostiene está sometida a una tensión igual al peso del cuerpo E, y debida a que en las poleas no hay fricción, la tensión es la misma a lo largo de toda la cuerda por lo que:

$$T_{AC} = m_E g = 40\ \ 9.81 \quad \Rightarrow \boxed{T_{AC} = 392.4\text{ N}}$$



Como el cuerpo A está en reposo, para determinar el valor de las fuerzas que actúan sobre el mismo tenemos que aplicar las leyes de la estática. Únicamente nos quedan dos incógnitas, que son la normal (N) y la tensión de la cuerda T_{AB}, por lo que con plantear dos ecuaciones es suficiente ($\sum Fx = 0$ y $\sum Fy$). Además, como una de las incógnitas

(T_{AB}) es paralela al plano y la otra (N) es perpendicular al mismo, será mas sencillo utilizar un sistema de ejes ox´y´ tal que el eje x´sea paralelo al plano.

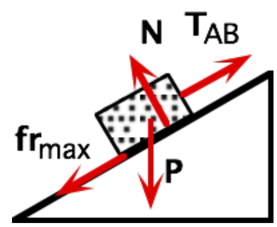
$\sum Fx' = 0 \Rightarrow T_{AB} - P\,sen30 - T_{AC}\cos 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{AB} = P\,sen\,30 + T_{AC}\cos 30 \Rightarrow$ $\boxed{T_{AB} = 830.33\ N}$

$\sum Fy' = 0 \Rightarrow N + T_{AC}\,sen30 - P\cos 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P\cos 30 - T_{AC}\,sen30 \Rightarrow$ $\boxed{N = 653.37\ N}$

c) El cuerpo D está en reposo, por lo que la tensión de la cuerda tiene que ser igual al peso. Además como las poleas no tienen fricción, la tensión a lo largo de toda la cuerda es la misma $\Rightarrow$

$$T_{AB} = m_D g \quad \Rightarrow \quad m_D = 830.33 / 9.81 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_D = 84.64\ kg}$$

d) Al cuerpo A tenderá a subir o a bajar, dependiendo si la tensión de la cuerda AB es mayor o menor respectivamente que la componente tangencial del peso. En el momento de cortar la cuerda, T_{AB} = 830.33 N y la componente tangencial del peso es P sen30 = 981 (1/2) = 490.5 $\Rightarrow$ el cuerpo tiende a subir $\Rightarrow$ aparece una fuerza de rozamiento dirigida hacia abajo que se opone al movimiento.

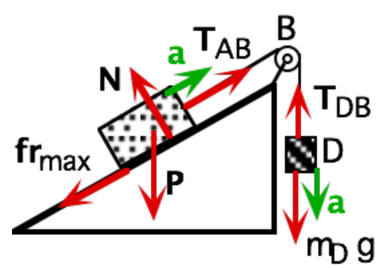


Ahora, para saber si consigue subir o la fuerza de rozamiento se lo impide y el cuerpo se queda quieto, tenemos que saber si la tensión es mayor que la componente tangencial del peso más la fuerza de rozamiento máxima (fr_{max}). Si es mayor, el cuerpo sube; si es menor, actúa una fuerza de rozamiento menor que la máxima y de un valor tal que el cuerpo queda en equilibrio.

$$fr_{max} = \mu\, mg\cos 30 = 0.1\ 100\ 9.81\cos 30 = 84.95\ N$$

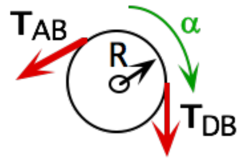
Por lo tanto, inicialmente T_{AB} (= 830.33) $\geq$ Psen30 (490.5) + fr_{max} (84.95), por lo que el bloque A ascenderá por el plano inclinado.

e) Tenemos 3 incógnitas: las 2 tensiones de la cuerda una a cada lado de la polea (al haber fricción entre la polea y la cuerda son diferentes) y la aceleración de los cuerpos A y D (al estar unidos con una cuerda es la misma a = α R). Planteamos 3 ecuaciones, una para el cuerpo A ($\sum F = ma$), otra para el cuerpo D A ($\sum F = ma$), y finalmente otra para la polea A ($\sum M = I\alpha$),.



$T_{AB} - m_A g sen30 - fr_{max} = m_A a \;\Rightarrow (a = \alpha R) \Rightarrow T_{AB} = m_A g sen30 + fr_{max} + m_A\, \alpha\, R$ (1)

$m_D g - T_{DB} = m_D a \qquad \Rightarrow (a = \alpha\, R) \;\Rightarrow \qquad T_{DB} = m_D g - m_D\, \alpha\, R$ (2)



$(T_{DB} - T_{AB})\, R = I\, \alpha$ (3)

Sustituyendo (1) y (2) en (3):

$m_D g R - m_D\, \alpha\, R^2 - \; m_A g sen30R - fr_{max}\, R - m_A\, \alpha\, R^2 = I \;\alpha \;\Rightarrow$

agrupando la que lleva α en el 2º miembro $\Rightarrow$

$m_D g R - \; m_A g sen30R - fr_{max}\, R \; = \; (I + m_D\, R^2 + m_A\, R^2)\, \alpha$

$$\Rightarrow \;\alpha = \frac{m_D\, g\, R - \; m_A\, g\, sen30\, R\; fr_{max} R}{I + m_D\, R^2 \; + m_A\, R^2}$$

y teniendo en cuenta que $\quad fr_{max} = \mu\, N = \mu\, m_A g cos30 \;\Rightarrow$

$$\alpha = \frac{(m_D \; - \; m_A sen30 - \mu\, m_A cos30) g}{I \; + m_D\, R^2 \; + m_A\, R^2} \qquad \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{(84.64 \;\; 100 \frac{1}{2} \; - 0.1 \;\; 100 \frac{\sqrt{3}}{2})\; 9.81 \;\; 0}{0.5 + 70\;(0.1^2) + 100\;(0.1^2)} \;\Rightarrow$$

$\boxed{\alpha = 10.86 \text{ rad /s}^2} \qquad \Rightarrow \;\; a = \alpha\, R \; = 10.86 \;\;\; 0.1 \;\;\Rightarrow \boxed{a = 1.086 \text{ m/s}^2}$

f) Para obtener las tensiones sustituimos el valor de α en las ecuaciones 1 y 2, quedándonos unos valores de:

$T_{AB} = 100 \;\; 9.81 sen30 + 0.1 \;\; 100 \;\; 9.81 \; cos30 + 100 \;\; 10.86 \;\; 0.1 \quad \Rightarrow \boxed{T_{AB} = 684.06 \text{ N}}$

$T_{DB} = 84.64 \;\; 9.81 - \;\; 84.64 \;\; 10.86 \;\; 0.1 \qquad\qquad \Rightarrow \boxed{T_{DB} = 738.40 \text{ N}}$

Problema 3: Una partícula de masa m, que se puede mover a lo largo del eje x, está sometida a una fuerza que deriva de la función energía potencial :

$$Ep(x) = Ax^2 - Bx^3 \text{ donde A y B son constantes positivas}$$

Encontrar:

a) Posiciones de equilibrio, indicando su carácter estable o inestable (0,4 puntos)

b) La expresión de la fuerza (0,4 puntos)

c) La frecuencia de pequeñas oscilaciones ($x\to 0$) alrededor de la posición de equilibrio estable (0,4 puntos)

d) Energía que debemos de comunicar a la partícula para que "escape" de la posición de equilibrio estable (0,4 puntos)

e) Si la partícula oscila con pequeña amplitud y además está sometida a una fuerza de amortiguamiento F = - bv, donde v es la velocidad de la partícula ¿Cuál es la nueva frecuencia de oscilación? ¿Cuánto ha disminuido la amplitud cuando la masa ha completado 10 oscilaciones? (0,4 puntos)

Datos: A = 5 N m^{-1}, B = 2 N m^{-2}, b = 4 N s m^{-1}, m = 2 kg

Nota: solución de amortiguamiento débil: $x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_A t + \alpha)$, con $\gamma = b/2m$ y

$$\omega_A = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

(Problema propuesto en el examen de Febrero de 2003 en el Grado de Ingeniería Química de la Universidad de Cantabria. Prof.: Jesús Rodríguez).

Solución:

a) Las posiciones de equilibrio corresponden a máximos y mínimos de la energía potencial, ya que en los
máximos y los mínimos la fuerza es 0.
Los máximos y mínimos corresponden a posiciones donde la derivada de la Ep sea cero:

$$dEp/dx = d(Ax^2 - Bx^3)/dx = 2Ax - 3Bx^2 = x(2A - 3Bx) = 0$$

Tiene dos soluciones 1ª) $\boxed{x = 0}$

2ª) $2A - 3Bx = 0 \Rightarrow x = 2A/3B = 2\ 5/3\ 2 \Rightarrow \boxed{x = 5/3}$

Las posiciones de equilibrio estable son las correspondientes a los mínimos de la Ep, ya que ante cualquier desviación de la posición de equilibrio aparece una fuerza que nos devuelve a la misma. Por el contrario, las posiciones de equilibrio inestable corresponden a los máximos, ya que ante cualquier desviación de la posición de equilibrio, aparece una fuerza que nos aleja de la misma. Para saber si son máximos o mínimos calculamos el valor de la derivada segunda en las posiciones de equilibrio, si la si la derivada segunda es positiva es un mínimo (equilibrio estable) mientras que si la derivada segunda es negativa, estamos ante un máximo (equilibrio inestable).

$$d^2Ep/dx^2 = d(2Ax - 3Bx^2)/dx = 2A - 6Bx$$

Para $x = 0$ $\quad d^2Ep/dx^2 = 2A = 2\ 5 = 10 > 0 \Rightarrow$ mínimo $\Rightarrow$ estable

Para $x = 2A/3B$ $\quad d^2Ep/dx^2 = 2A - 6B\,(2A/3B) = 2A - 4A = -2A = -10 < 0 \Rightarrow$ máximo $\Rightarrow$ inestable

b) La fuerza se define como menos el gradiente de la Ep

$$F = -\nabla Ep = -\left(\frac{\partial Ep}{\partial x}i + \frac{\partial Ep}{\partial y}j + \frac{\partial Ep}{\partial z}k\right)$$

En este caso la Ep solo depende de x, por lo que la fuerza solo tiene componente a lo largo del eje x

$$F = Fx = -\frac{\partial Ep}{\partial x} = -\frac{\partial (Ax^2 - Bx^3)}{\partial x} = -2Ax + 3B\,x^2 = -10\,x + 6\,x^2$$

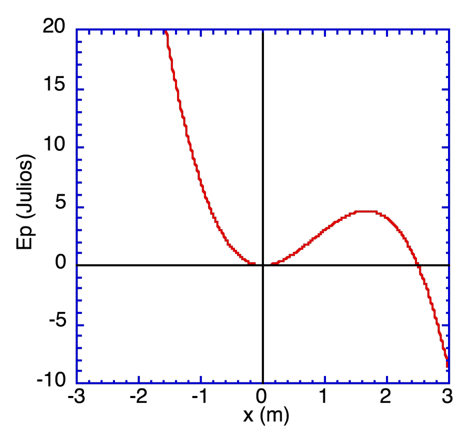
c) Cuando la partícula está muy próxima a la posición de equilibrio estable, $x \Rightarrow 0$, por lo que el termino x^2 se puede considerar despreciable respecto al termino en x. La fuerza se puede aproximar a $F = -2Ax$, es decir, la fuerza es del tipo $F = -Kx$ con $K = 2A = 2\ 5 = 10\ N\,m^{-1}$.

Este tipo de fuerza da origen a un movimiento armónico simple con una frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5} = 2.24 \text{ rad/s}$$

Como $\omega = 2\pi/T$ el período vale $T = 2\pi/\omega = 2.81$ s y la frecuencia

$$\nu = 1/T = 0.356\ s^{-1}$$



d) Si representamos en una grafica la función Ep en función de x, vemos que para que escape de la situación de equilibrio estable, tiene que tener una energía superior a la del máximo correspondiente a la posición de equilibrio inestable.

$$E = Ep(5/3) = A(5/3)^2 - B(5/3)^3 = 5(5/3)^2 - 2(5/3)^3 = 4.63 \text{ J}$$

e) En esta nueva situación de amortiguamiento débil, la frecuencia angular vale:

$$\omega_A = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{2} - \left(\frac{4}{2\ 2}\right)^2} = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2 \text{ rad/s}$$

y el período: $T_A = 2\pi/\omega_A = \pi = 3.1416$ s $\Rightarrow$ $\boxed{\nu_A = 1/T_A = 0.318 \text{ s}^{-1}}$

En 10 oscilaciones, el tiempo transcurrido es $10\ T_A = 10\ \pi$

Como la solución es $x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_A t + \alpha)$, con $\gamma = b/2m = 4/(2\ 2) = 1 s^{-1}$, la amplitud valdrá

$$\boxed{A_A = Ae^{-\gamma t} = Ae^{-1\ 31.416} = 2.17\ 10^{-14}\ A}$$