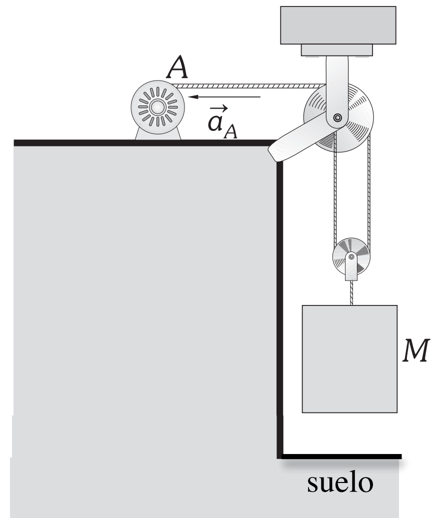
Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Septiembre de 2017
Problemas (Dos puntos por problema).

Problema 1: El rendimiento del motor de la figura es del 90 % y eleva a un cuerpo de 100 kg mediante el juego de poleas indicado en la figura. Si el cuerpo M se encontraba inicialmente en reposo sobre el suelo, y si durante todo el ascenso el cable es recogido por el motor con una aceleración $a_A = 10\ \mathrm{cm/s^2}$ (aceleración del punto *A* del cable) y en un determinado instante la velocidad del cable en *A* es $v_A = 1\ \mathrm{m/s}$, determinar en dicho instante:



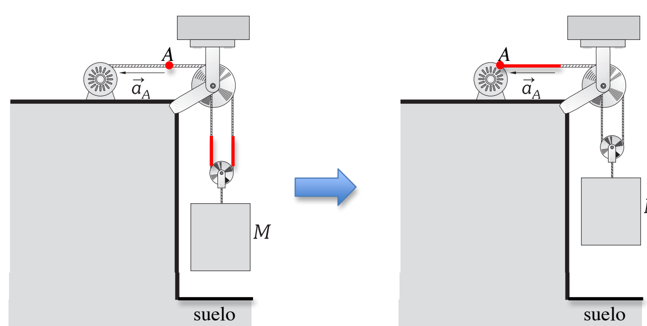
- **(a) La velocidad y la aceleración del bloque *M* (0,4 puntos).**
- **(b) La tensión de la cuerda que tira del bloque *M* (0,4 puntos),**
- **(c) La tensión de la cuerda del motor (0,4 puntos),**
- **(d) La potencia instantánea suministrada por el motor para su funcionamiento (0,4 puntos),**
- **(e) Calcular también la potencia media que se le suministra al motor durante todo el ascenso del bloque *M* desde el instante inicial en el que partió hasta el instante considerado en los apartados anteriores (0,4 puntos).**

Las masas de las poleas y del cable se consideran despreciables. Tómese $g = 9,8\ \mathrm{m/s^2}$
(Todas las respuestas tienen que venir razonadas, demostradas y apoyadas en algún tipo de cálculo matemático para ser consideradas válidas).

(Cuestión propuesta en el examen de Enero de 2017 en el Grado de Ingeniería Industrial de la Universidad de Cantabria. Prof.: Jesús Rodríguez y Javier Sandonís).

Solución:

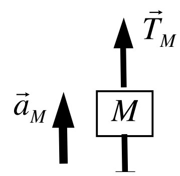
(a) El hecho de que el punto *A* está unido a un punto fijo (el eje de la polea grande) por una cuerda de longitud determinada impone una relación entre el movimiento de dicho cuerpo y el punto *M*. Cuando el punto *A* se despaza una cierta distancia hacia la izquierda, el cuerpo *M* asciende la mitad (ver figura). Si los



desplazamientos de M son siempre la mitad de los desplazamientos de A, derivando obtenemos que la relación entre velocidades es similar, y volviendo a derivar obtenemos que la relación entre aceleraciones es similar

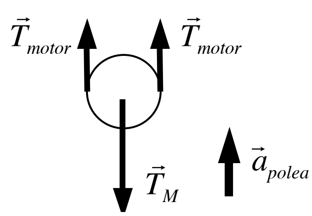
$$v_M = \frac{1}{2} v_A = 0{,}5 \text{ m/s} \qquad a_M = \frac{1}{2} a_A = 5 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$

(b) Aplicando la segunda ley de Newton para el cuerpo M



$$T_M - Mg = Ma_M \quad \Rightarrow \quad T_M = M(g + a_M) = 985 \text{ N}.$$

(c) Dado que las masas de las poleas y las cuerdas son despreciables la tensión es la misma en todos los puntos de una misma cuerda (basta con aplicar la segunda ley de Newton para rotaciones a cada polea, y tener en cuenta que su momento de inercia es nulo, para demostrar que la tensión en la cuerda a ambos lados de la polea es la misma). Aplicando la segunda ley de Newton para la traslación de la polea móvil



$$2T_{\text{motor}} - T_M = m_{\text{polea}} a_{\text{polea}} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{\text{motor}} = \frac{1}{2} T_M = 492{,}5 \text{ N}.$$

(d) La potencia aprovechada para levantar el cuerpo M en el instante indicado en el enunciado será

$$P_{\text{útil motor}} = T_{\text{motor}} v_A = T_M v_M = 492{,}5 \text{ W}.$$

Dado que el rendimiento es $\eta = 90\%$, la potencia que habrá que suministrar al motor para que realice su tarea será

$$P_{\text{suministrada}} = \frac{P_{\text{útil motor}}}{\eta} = 547{,}2 \text{ W}.$$

(e) Para calcular la potencia media aprovechada para levantar el cuerpo M desde que parte del reposo hasta que alcanza la velocidad v_M y una altura h podemos calcular el trabajo que realiza sobre el sistema bloque+Tierra durante todo el proceso y dividirlo por el tiempo empleado Δt.

$$\left.\begin{aligned} v_M &= a_M \Delta t \\ h &= \frac{1}{2} a_M \Delta t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \Delta t = 10 \text{ s}, \qquad h = 2{,}5 \text{ m}.$$

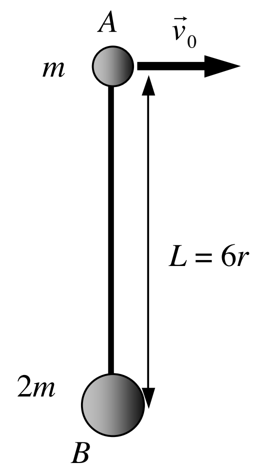
$$W_{\text{motor}} = \Delta E_{\text{sistema}} = \frac{1}{2} M v_M^2 + Mgh = 2462{,}5 \text{ J}.$$

$$P_{\text{media útil motor}} = \frac{W_{\text{motor}}}{\Delta t} = 246{,}25 \text{ W} = \frac{1}{2} P_{\text{útil motor.}}$$

$$P_{\text{media suministrada al motor}} = \frac{P_{\text{media útil motor}}}{\eta} = 273{,}6 \text{ W} = \frac{1}{2} P_{\text{suministrada al motor.}}$$

Las potencias medias resultan ser la mitad de las potencias instantáneas finales ya que las tensiones son constantes a lo largo de todo el proceso y a que en un movimiento uniformemente acelerado en el que se parte del reposo la velocidad media es la mitad de la velocidad final. Aplicando el cálculo del apartado d) a las velocidades medias se obtiene este resultado.

Problema 2: Dos esferas pequeñas A y B de masa m y $2m$, respectivamente, están unidas por medio de una barra rígida de masa despreciable de forma que sus centros están separados una distancia $L = 6r$ (ver figura). Las dos esferas descansan sobre una superficie horizontal sin rozamiento cuando repentinamente se le proporciona a A la velocidad $\vec{v}_0 = v_0\hat{\imath}$. Determínense para todo el sistema en función de $m, r,$ y v_0:



(a) la distancia del centro de masas al centro de la esfera pequeña (0,3 puntos),
(b) su momento de inercia respecto a un eje perpendicular a la figura y que pase por su centro de masas (0,3 puntos),
(c) la velocidad de traslación del centro de masas (0,3 puntos),
(d) el momento angular respecto a su centro de masas (0,3 puntos),
(e) la velocidad angular de rotación (0,3 puntos),
(f) las velocidades de A y B después de que la barra AB haya girado 90° (0,4 puntos), y
(g) las velocidades de A y B después de que la barra AB haya girado 180° (0,1 puntos).

Nota: Momento de inercia de una esfera respecto de un eje que pasa por su C.M.: $I = \frac{2}{5}MR^2$.

(Cuestión propuesta en el examen de Enero de 2017 en el Grado de Ingeniería Industrial de la Universidad de Cantabria. Prof.: Jesús Rodríguez y Javier Sandonís).

Solución:

(a) Si colocamos el origen de coordenadas en la esfera pequeña A y orientamos el eje X horizontalmente hacia la derecha, el eje Y verticalmente hacia arriba y el eje Z perpendicular al plano de la figura y hacia fuera de ésta tenemos que

$$\vec{r}_{\text{C.M.}} = \frac{m\vec{r}_A + 2m\vec{r}_B}{m + 2m} = \frac{m(0,0,0) + 2m(0,-6r,0)}{m + 2m} = (0,-4r,0),$$

con lo que la distancia desde la esfera A al centro de masas del sistema será

$$d = |\vec{r}_{\text{C.M.}}| = 4r.$$

(b) El momento de inercia de la esfera *A* con respecto a un eje perpendicular a la figura y que pase por el centro de la esfera *A* será

$$I_A^{\text{centro de A}} = \frac{2}{5}mr^2.$$

De la misma manera, el momento de inercia de la esfera B con respecto a un eje perpendicular a la figura y que pase por el centro de la esfera B se

$$I_B^{\text{centro de } B} = \frac{2}{5}(2m)(2r)^2.$$

Teniendo en cuenta la distancia de cada esfera al centro de masas del sistema y aplicando el teorema de Steiner podemos calcular su momento de inercia respecto de un eje que pase por el centro de masas del sistema. Sumando luego los dos momentos de inercia tendremos el momento de inercia que nos piden,

$$I_{\text{C.M.}} = I_A + I_B = \left[\frac{2}{5}mr^2 + m(4r)^2\right] + \left[\frac{2}{5}(2m)(2r)^2 + (2m)(2r)^2\right] = \frac{138}{5}mr^2.$$

(c) Para la velocidad del centro de masas del sistema, aplicamos directamente la definición,

$$\vec{v}_{\text{C.M.}} = \frac{m\vec{v}_A + 2mv}{m + 2m} = \frac{m\vec{v}_0 + 2m0}{m + 2m} = \frac{1}{3}\vec{v}_0.$$

Otra forma de llegar al mismo resultado:

$$\left.\begin{aligned} \vec{P}_{\text{sistema}} &= m\vec{v}_A + 2m\vec{v}_B \\ \vec{P}_{\text{sistema}} &= M_{\text{sistema}}\vec{v}_{\text{C.M.}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{v}_{\text{C.M.}} = \frac{1}{3}\vec{v}_0.$$

Al estar el sistema aislado (no hay fuerzas externas a lo largo de la superficie horizontal de la mesa) su momento lineal permanece constante, y por lo tanto también la velocidad de su centro de masas.

(d) Si indicamos con primas las magnitudes referidas o medidas respecto al centro de masas del sistema, el momento angular del sistema respecto a su centro de masas será:

$$\vec{L}'_{sist.} = \vec{L}'_A + \vec{L}'_B = \vec{r}'_A \times \vec{p}'_A + \vec{r}'_B \times \vec{p}'_B =$$
$$= \left(\vec{r}_A - \vec{r}_{C.M.}\right) \times m\left(\vec{v}_A - \vec{v}_{C.M.}\right) + \left(\vec{r}_B - \vec{r}_{C.M.}\right) \times 2m\left(\vec{v}_B - \vec{v}_{C.M.}\right) =$$
$$= \left(4r\hat{j}\right) \times m\left(\frac{2}{3}v_0\hat{i}\right) + \left(-2r\hat{j}\right) \times 2m\left(-\frac{1}{3}v_0\hat{i}\right) = \boxed{4mv_0 r\left(-\hat{k}\right)}$$

Otra forma de llegar al mismo resultado sería calcular el momento angular respecto del origen de coordenadas y relacionarlo con el momento angular respecto al centro de masas:

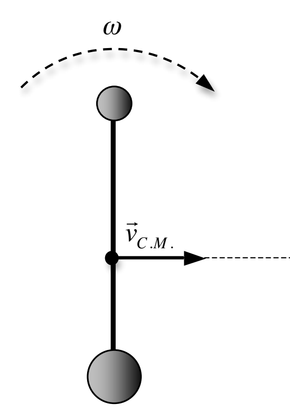
$$\left.\begin{array}{l} \vec{L}_{\substack{sist.\\ resp.\\ origen}} = \vec{r}_A \times \vec{p}_A + \vec{r}_B \times \vec{p}_B = 0 \\ \vec{L}_{\substack{sist.\\ resp.\\ origen}} = \vec{L}'_{sist.} + \vec{r}_{C.M.} \times \vec{P}_{sist.} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}'_{sist.} = -\vec{r}_{C.M.} \times \vec{P}_{sist.} = -\left(-4r\hat{j}\right) \times (3m)\left(\frac{1}{3}v_0\hat{i}\right) = 4mv_0 r\left(-\hat{k}\right)$$

Al estar el sistema aislado su momento angular permanece constante, y por lo tanto también la velocidad angular de rotación que calcularemos en el siguiente apartado.

(e) La velocidad angular de rotación alrededor del eje que pasa por el centro de masas del sistema vendrá dada por:

$$\vec{L}'_{sist.} = I_{C.M.}\vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} = \frac{\vec{L}'_{sist.}}{I_{C.M.}} = \boxed{\frac{10}{69}\frac{v_0}{r}\left(-\hat{k}\right)}$$

(f) El movimiento del sistema es la combinación de una traslación con la velocidad del centro de masas junto con una rotación alrededor de un eje que pasa por su centro de masas y con velocidad angular la obtenida en el apartado anterior.



Cuando la barra haya girado 90° tenemos:

$$\vec{v}_{A,90^\circ} = \vec{v}_{C.M.} - (4r)\omega\hat{j} = \frac{1}{3}v_0\hat{i} - (4r)\left(\frac{10}{69}\frac{v_0}{r}\right)\hat{j} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{40}{69}\right)v_0$$
$$\vec{v}_{B,90^\circ} = \vec{v}_{C.M.} + (2r)\omega\hat{j} = \frac{1}{3}v_0\hat{i} + (2r)\left(\frac{10}{69}\frac{v_0}{r}\right)\hat{j} = \left(\frac{1}{3}, \frac{20}{69}\right)v_0$$

(g) Cuando la barra haya girado 180° tenemos:

$$\vec{v}_{A,180^\circ} = \vec{v}_{C.M.} - (4r)\omega\hat{i} = \frac{1}{3}v_0\hat{i} - (4r)\left(\frac{10}{69}\frac{v_0}{r}\right)\hat{i} = \left(-\frac{17}{69}, 0\right)v_0$$

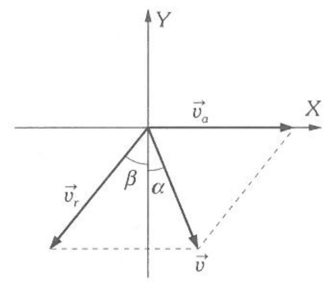
$$\vec{v}_{B,180^\circ} = \vec{v}_{C.M.} + (2r)\omega\hat{i} = \frac{1}{3}v_0\hat{i} + (2r)\left(\frac{10}{69}\frac{v_0}{r}\right)\hat{i} = \left(\frac{43}{69}, 0\right)v_0$$

Problema 3: Un autobús marcha por una carretera recta en un día de lluvia. Un pasajero mide el ángulo que forman las gotas de lluvia con la vertical y obtiene que, cuando el autobús va a 80 km/h el ángulo es de 30° hacia la parte trasera, y cuando va a 100 km/h el ángulo aumenta a 45°. Calcular la velocidad de las gotas y el ángulo de caída medidos por un peatón parado en el arcén.

Problema tomado del libro Problemas de Física, S. Burbano de la Ercilla *et al.*, Editorial Tébar, 27ª Edición.

Solución:

Llamaremos $\vec{v}$ a la velocidad de las gotas de lluvia respecto del observador fijo, $\vec{V}$ a la velocidad del autobús con respecto al observador fijo, y $\vec{v}'$ a la velocidad de las gotas de lluvia respecto del pasajero.



Como $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$, entonces las correspondientes ecuaciones expresadas en términos de las componentes a lo largo de los ejes cartesianos x (horizontal) e y (vertical) serán

$$v \sin\alpha\, \vec{\imath} - v\cos\alpha\, \vec{\jmath} = -v' \sin\beta\, \vec{\imath} - v' \cos\beta\, \vec{\jmath} + V\vec{\imath}$$

O, escrito en otra forma,

$$\begin{aligned} v\sin\alpha &= -v'\sin\beta + V, \\ -v\cos\alpha &= -v'\cos\beta. \end{aligned}$$

Ahora particularizamos estas ecuaciones a los dos casos que se nos indican en el enunciado:

Caso 1: cuando el autobús va a 80 km/h el ángulo es de 30° hacia la parte trasera

$$\beta = 30^\circ: \quad \begin{aligned} v\sin\alpha &= 80 - v'\sin 30^\circ = 80 - \frac{v'}{2}, \\ v\cos\alpha &= v'\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}v'}{2}. \end{aligned}$$

De la primera ecuación se deduce que

$$v' = 2(80 - v\sin\alpha),$$

y reemplazando esta ecuación en la segunda

$$v\cos\alpha = \sqrt{3}(80 - v\sin\alpha). \qquad [1]$$

Caso 2: cuando el autobús va a 100 km/h el ángulo es de 45° hacia la parte trasera

$$\beta = 45^{\circ}: \quad \begin{aligned} v\sin\alpha &= 100 - v'\sin 45^{\circ} = 100 - \frac{\sqrt{2}v'}{2}, \\ v\cos\alpha &= v'\cos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}v'}{2}. \end{aligned}$$

De la primera ecuación se deduce que

$$v' = \frac{2}{\sqrt{2}}(100 - v\sin\alpha),$$

y reemplazando esta ecuación en la segunda

$$v\cos\alpha = (100 - v\sin\alpha). \qquad [2]$$

De [1] y [2] resulta que:

$$\sqrt{3}(80 - v\sin\alpha) = (100 - v\sin\alpha),$$

$$v\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}\times 80 - 100}{\sqrt{3} - 1} = 52{,}68. \quad [3]$$

Reemplazando [3] en [2]

$$v\cos\alpha = 100 - v\sin\alpha = 47{,}32 \qquad [4]$$

Dividiendo [3] entre [4]

$$\tan\alpha = \frac{52{,}68}{47{,}32} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 48^{\circ}.$$

Y sustituyendo este valor del ángulo en [4]

$$v = 70{,}8\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$