Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Septiembre de 2016
Problemas (Dos puntos por problema).

Problema 1: El vector de posición de una partícula que describe un movimiento curvilíneo en el espacio, viene dado por $\vec{r} = 3\cos t\,\vec{i} + 3sen\,t\,\vec{j} + 8t\,\vec{k}$ donde todas las magnitudes están medidas en el SI. Determinar:

(a) Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria (es decir, expresadas como función del parámetro tiempo) y la ecuación de la trayectoria proyectada en el plano xy (es decir, que figura geométrica describiría la partícula si siguiéramos sus componentes en ese plano) (0,4 puntos)

(b) Los vectores velocidad y aceleración y sus módulos (0,6 puntos)

(c) Los vectores aceleración tangencial y normal y sus módulos (0,6 puntos)

(d) Describir y dibujar un esquema del movimiento de la partícula. (0,4 puntos)

Solución:

(a) Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria son las componentes del vector de posición

X=3cost m.

Y=3sent m.

Z=8t m.

La ecuación de la trayectoria la obtenemos eliminando el tiempo en las ecuaciones paramétricas, por tanto elevando al cuadrado x e y y sumando obtenemos

$x^2+y^2=3^2$ Ecuación de una circunferencia de radio 3m

(b)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \quad 3sent\vec{i} + 3\cos t\vec{j} + 8\vec{k}\ m/s$$

$$v = \sqrt{(\quad 3sent)^2 + (3\cos t)^2 + 8^2} = \sqrt{9(sen^2 t + \cos^2 t) + 64} = \sqrt{73} m/s$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \quad 3\cos t\vec{i} \quad 3sent\vec{j}\ m/s^2$$

$$a = \sqrt{9(\cos^2 t + sen^2 t)} = 3\ m/s^2$$

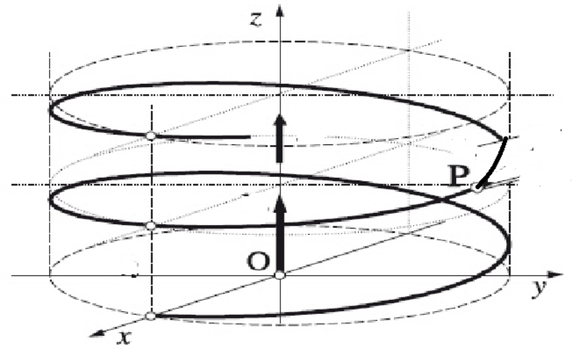
(c)

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{\ } = 0 \qquad ya\ que\ v = cte$$

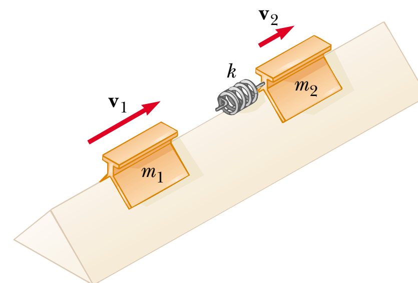
$$\vec{a}_n = \vec{a} \quad solo\,hay\ \ aceleración\ normal$$

$$a_n = 3m/s^2$$

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, la partícula describe trayectorias circulares de radio 3m en el plano xy que se desplazan a 8m/s en la dirección del eje z.



Problema 2: Dos deslizadores se ponen en movimiento sobre un carril horizontal (sin inclinación) con colchón de aire (consideramos que no hay rozamiento), como se muestra en la Figura. Un muelle con constante de recuperación k está unido al extremo de uno de los deslizadores. El primer deslizador de masa m_1 tiene una velocidad $\vec{v}_1$ y el segundo deslizador de masa m_2 se mueve más lentamente con una velocidad $\vec{v}_2$ como se indica en la Figura. Cuando m_1 colisiona con el muelle unido a m_2 y comprime el muelle hasta su compresión máxima $x_{\max}$, la velocidad de los deslizadores es $\vec{v}$. En función de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, m_1, m_2 y k, calcular:



- **(a) la velocidad $\vec{v}$ para la posición de la compresión máxima $x_{\max}$ (0,5 puntos)**
- **(b) la compresión máxima $x_{\max}$ (0,5 puntos)**
- **(c) la velocidad de cada deslizador después de que m_1 pierda contacto con el muelle (1 punto)**

(Problema extraído del Serway, Raymod A. Serway y John W. Jewett, Jr. Cengage Learning , ISBN 978-970-686-822-0. Séptima edición).

Solución:

(a) Cuando el muelle está totalmente comprimido, los dos deslizadores se desplazan con la misma velocidad $\vec{v}$. Si aplicamos el principio de conservación del momento lineal (que rige en todas las colisiones) al sistema formado por los dos deslizadores,

$$\vec{p}_{ini} = \vec{p}_{fin} \qquad \Rightarrow \qquad m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \left(m_1 + m_2\right)\vec{v} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

(b) Como no hay rozamiento, solo hay fuerzas conservativas por lo que la variación de la energía mecánica es nula, $\Delta E = 0$.

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)v^2 + \frac{1}{2}kx_{\max}^2.$$

Si sustituimos la velocidad obtenida en el apartado (a) y despejamos el valor de $x_{\max}$

$$\begin{aligned}
x_{\max}^2 &= \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - \left(m_1 + m_2\right) v^2}{k} \\
&= \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - \left(m_1 + m_2\right) \dfrac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2 m_1 m_2 v_1 v_2}{\left(m_1 + m_2\right)^2}}{k} \\
&= \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - \dfrac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2 m_1 m_2 v_1 v_2}{\left(m_1 + m_2\right)}}{k} \\
&= \frac{m_1 \left(m_1 + m_2\right) v_1^2 + m_2 \left(m_1 + m_2\right) v_2^2 - m_1^2 v_1^2 - m_2^2 v_2^2 - 2 m_1 m_2 v_1 v_2}{\left(m_1 + m_2\right) k} \\
&= \frac{m_1 m_2 v_1^2 + m_2 m_1 v_2^2 - 2 m_1 m_2 v_1 v_2}{\left(m_1 + m_2\right) k} \\
&= \frac{m_1 m_2 \left(v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2\right)}{\left(m_1 + m_2\right) k} \\
&= \frac{m_1 m_2}{\left(m_1 + m_2\right) k} \left(v_1 - v_2\right)^2 .
\end{aligned}$$

De donde inmediatamente se deduce que

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{\left(m_1 + m_2\right) k}} \left(v_1 - v_2\right).$$

(c) Después de haber alcanzado la posición de máxima compresión, entonces los dos deslizadores se vuelven a separar. Como no hay fuerzas no conservativas, el choque puede considerarse como elástico. Por lo tanto se tiene que conservar el momento lineal

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \qquad \Rightarrow \qquad m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \qquad \Rightarrow \qquad m_1 \left(\vec{v}_1 - \vec{v}_{1f}\right) = m_2 \left(\vec{v}_{2f} - \vec{v}_2\right),$$

y la energía cinética

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \\
&m_1 \left(v_1^2 - v_{1f}^2\right) = m_2 \left(v_{2f}^2 - v_2^2\right)
\end{aligned}$$

Esta última expresión se puede factorizar como una suma por una diferencia

$$m_1 \left(\vec{v}_1 + \vec{v}_{1f}\right)\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_{1f}\right) = m_2 \left(\vec{v}_{2f} + \vec{v}_2\right)\left(\vec{v}_{2f} - \vec{v}_2\right)$$

Utilizando la expresión anterior que viene de la conservación del momento lineal

$$\left(\vec{v}_1 + \vec{v}_{1f}\right) = \left(\vec{v}_{2f} + \vec{v}_2\right)$$
$$\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} + \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \qquad (1)$$

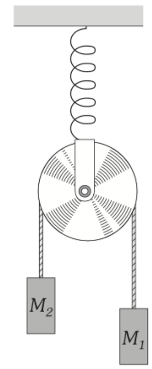
Y reemplazando esta ecuación en la ley de conservación del momento lineal

$$m_1\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_{2f} - \vec{v}_2 + \vec{v}_1\right) = m_2\left(\vec{v}_{2f} - \vec{v}_2\right)$$
$$2m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_2 - m_1\vec{v}_{2f} = m_2\vec{v}_{2f} - m_2\vec{v}_2$$
$$\left(m_1 + m_2\right)\vec{v}_{2f} = 2m_1\vec{v}_1 + \left(m_2 - m_1\right)\vec{v}_2$$
$$\vec{v}_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)\vec{v}_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)\vec{v}_2.$$

Sustituyendo esta expresión en (1)

$$\vec{v}_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)\vec{v}_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)\vec{v}_2.$$

Problema 3: En el sistema representado en la figura $M_1 = 2\text{ kg}$, $M_2 = 1\text{ kg}$, la constante del resorte vale 500 N/m y su longitud natural es $L_0 = 20\text{ cm}$. Las masas del cable y la polea son despreciables.



Si la polea está bloqueada y no puede girar, determinar:

(a) La longitud L del resorte (0,3 puntos)

Si la polea está girando y no se desplaza verticalmente, determinar:

(b) Los vectores aceleración de los bloques respecto al suelo (0,3 puntos).

(c) El vector aceleración relativa del bloque 1 respecto del 2 (0,3 puntos).

(d) La longitud L del resorte (0,3 puntos).

Si durante el movimiento vertical de los bloques la polea se bloquease repentinamente dejando de girar, determinar:

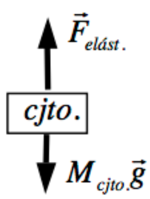
(e) El vector aceleración inicial del movimiento vertical de la polea (0,3 puntos).

(f) La amplitud del movimiento armónico simple que realizará la polea (0,5 puntos).

Problema propuesto por los profesores Jesús Rodríguez y Javier Sandonís

Solución:

(a) Si el sistema se encuentra en equilibrio, con la polea sin girar y los cuerpos sin desplazarse, podemos considerar como sistema al conjunto bloques y polea. Dicho sistema se encuentra colgado de un muelle, con lo que el diagrama de fuerzas que actúan sobre él será:



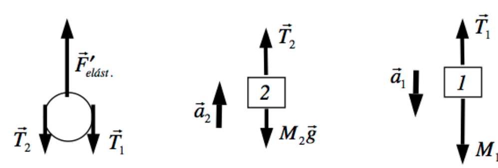
Aplicando la segunda ley de Newton,

$$\vec{F}_{elást.} + M_{cjto.}\vec{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{elást.} = M_{cjto.}g$$

$$\Rightarrow \quad k\Delta l = M_{cjto.}g \quad \Rightarrow \quad \Delta l = \frac{M_{cjto.}g}{k}$$

$$L = L_0 + \Delta l = L_0 + \frac{M_{cjto.}g}{k} = \boxed{25.88\text{ cm}}$$

(b) Si la polea está en equilibrio de traslación (no se desplaza verticalmente) pero gira al tiempo que los bloques se desplazan, los diagramas de fuerza para cada cuerpo serán:



Teniendo en cuenta que la polea es de masa despreciable su momento de inercia es nulo con lo que aplicando la segunda ley de Newton para las rotaciones deducimos que $T_1 = T_2$.

$$T_1R - T_2R = \cancel{I_{polea}}\,\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2 = T$$

Como la cuerda es inextensible, la aceleración con la que el bloque 1 baja es la misma en magnitud a la aceleración con la que bloque 2 sube, $a_1 = a_2 \equiv a$.

Aplicando la segunda ley de Newton para traslaciones en los dos bloques:

$$\left.\begin{array}{l} M_1 g - T = M_1 a \\ T - M_2 g = M_2 a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \left(\dfrac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}\right) g = \dfrac{1}{3} g \\ T = \left(\dfrac{2M_1M_2}{M_1 + M_2}\right) g \end{array}\right.$$

Tomando el eje z positivo verticalmente hacia arriba, entonces

$$\boxed{\vec{a}_1 = -\frac{1}{3} g\hat{k} \quad , \quad \vec{a}_2 = \frac{1}{3} g\hat{k}}$$

(c) El vector aceleración relativa del bloque 1 respecto del 2 viene dado por

$$\vec{a}_{1\,respecto\,de\,2} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \boxed{-\frac{2}{3} g\hat{k}}$$

(d) Si la polea está en equilibrio de traslación (no se desplaza verticalmente) aplicando la segunda ley de Newton para la traslación,

$$\vec{F}'_{elást.} + 2\vec{T} = 0 \quad \Rightarrow \quad F'_{elást.} = 2T = 2\left(\frac{2M_1M_2}{M_1 + M_2}\right) g$$

$$\Rightarrow \quad k\Delta l' = \left(\frac{4M_1M_2}{M_1 + M_2}\right) g \quad \Rightarrow \quad \Delta l' = \left(\frac{4M_1M_2}{M_1 + M_2}\right) \frac{g}{k}$$

$$L' = L_0 + \Delta l' = L_0 + \left(\frac{4M_1M_2}{M_1 + M_2}\right) \frac{g}{k} = \boxed{25.23 \text{ cm}}$$

(e) Si en un momento determinado un agente externo se encarga bruscamente de bloquear la polea y de detener todo el movimiento en el sistema, nos encontramos de repente en la situación del apartado (a) pero con el sistema fuera del equilibrio (ya que el muelle está alargado 25,23 cm en vez de los 25,88 cm). Aplicando la segunda ley de Newton para la traslación de la polea,

$$\vec{F}'_{eláść.} + M_{cjto.}\vec{g} = M_{cjto.}\,\vec{a}_{cjto.} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{4M_1M_2}{M_1+M_2}\right)g\hat{k} - M_{cjto.}g\hat{k} = M_{cjto.}\,\vec{a}_{cjto.}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_{cjto.} = \left[\frac{4M_1M_2}{(M_1+M_2)^2} - 1\right]g\hat{k} = \boxed{-\frac{1}{9}g\hat{k}}$$

(f) La polea (junto con los bloques) va a iniciar, partiendo del reposo, un movimiento oscilatorio armónico alrededor de la posición de equilibrio $L = 25.88$ cm [ver apartado (a)]. Como parte de $L^{'} = 25{,}23$ cm, la amplitud del MAS será

$$A = L - L' = 6{,}5 \text{ mm}$$

Otra forma de calcularla sería utilizando la relación que se da en el MAS entre la aceleración máxima (apartado anterior) y la amplitud

$$a_{cjto.} = \omega^2 A = \left(\frac{k}{M_{cjto.}}\right)A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{M_{cjto}a_{cjto.}}{k} = \frac{1}{9}(M_1+M_2)\frac{g}{k}$$