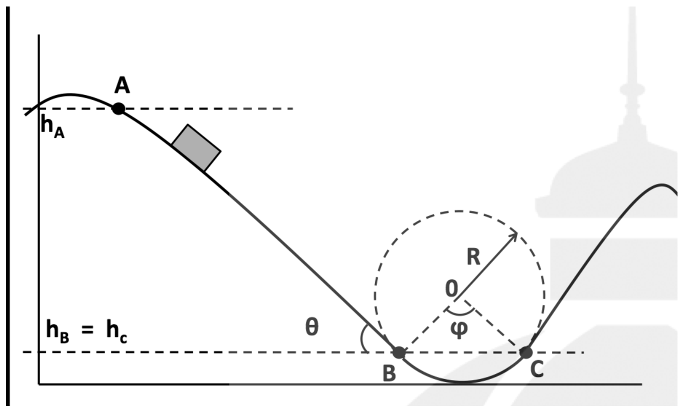
Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Septiembre de 2015
Problemas (Dos puntos por problema).



Problema 1: Un niño baja sobre un trineo por la ladera de una montaña desde un punto A a una altura h_A con una celeridad inicial v_A. Seguidamente recorre un tramo recto inclinado un ángulo $\theta = 30^\circ$ con la horizontal hasta un punto B de altura h_B, donde recorre una curva de radio R. El conjunto trineo-niño tiene masa M y el módulo de la fuerza de rozamiento F_r es el 10% del peso de dicho conjunto y se puede considerar constante durante todo el trayecto.

(a) Teniendo en cuenta el balance energético, determinar la celeridad de llegada al punto B, v_B, en función de la celeridad inicial, v_A, la masa del conjunto, las alturas y la gravedad (0.5 puntos).

(b) Determinar el valor del trabajo de la fuerza de rozamiento en el tramo BC si el ángulo $\varphi = 90^\circ$ (ver figura) (0.25 puntos).

(c) Determinar la celeridad de llegada al punto C, v_C (0.25 puntos).

(d) Obtener el valor de la fuerza normal un instante antes de llegar al punto B (0.5 puntos).

(e) Obtener el valor de la fuerza normal un instante después de pasar por el punto B (0.5 puntos).

(Problema propuesto en el examen de Junio de 2014 en el Grado de Ingeniería Química de la Universidad Politécnica de Madrid).

Solución:

(a) En la configuración inicial, aquella en la que el conjunto niño-trineo están en el punto A, la energía mecánica del sistema toma el valor

$$E_{\text{mec}}^{\text{ini}} = K^{\text{ini}} + U_{\text{pg}}^{\text{ini}} = \frac{1}{2} M v_A^2 + M g h_A,$$

donde hemos supuesto que el cero de energías potencial gravitatoria está en el suelo (en la base de la curva de radio R).

Cuando el conjunto niño-trineo lleguen al punto B, la energía mecánica del sistema vale

$$E_{\text{mec}}^{B} = K^{B} + U_{\text{pg}}^{B} = \frac{1}{2} M v_B^2 + M g h_B,$$

Sobre el sistema niño-trineo están actuando dos fuerzas: el peso (que es una fuerza conservativa) y el rozamiento (fuerza no conservativa). La variación de la energía mecánica del sistema será pués el trabajo realizado por esta última fuerza,

$$\Delta E_{\text{mec}} = E_{\text{mec}}^{B} - E_{\text{mec}}^{A} = \frac{1}{2} M \left(v_B^2 - v_A^2 \right) + M g \left(h_B - h_A \right) = W_{\text{roz}}. \qquad (1)$$

Para calcular el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento tenemos en cuenta que este siempre se opone al deslizamiento de la superficie del trineo sobre el plano inclinado y, por lo tanto, forma un ángulo de 180° con el desplazamiento,

$$W_{\text{roz}} = \int \vec{F}_{\text{roz}} \cdot d\vec{l} = \int F_{\text{roz}} \cos 180^{\circ} \, dl = -F_{\text{roz}} l.$$

La longitud del plano inclinado se puede calcular fácilmente a partir de la diferencia de alturas y del ángulo que forma el plano inclinado con la horizontal,

$$l = \frac{h_A - h_B}{\sin\theta}.$$

Como el módulo de la fuerza de rozamiento es un 10% del peso del conjunto niño-trineo, entonces

$$W_{\text{roz}} = -F_{\text{roz}} l = -0.1 M g \frac{h_A - h_B}{\sin\theta} = -0.2 \, M g \left(h_A - h_B \right).$$

Sustituyendo en la Ecuación (1)

$$\frac{1}{2} M \left(v_B^2 - v_A^2 \right) + M g \left(h_B - h_A \right) = -0.2 \, M g \left(h_A - h_B \right)$$

$$\frac{1}{2} M \left(v_B^2 - v_A^2 \right) = 0.8 \, M g \left(h_A - h_B \right)$$

$$\frac{1}{2} M v_B^2 = \frac{1}{2} M v_A^2 + 0.8 \, M g \left(h_A - h_B \right)$$

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 1.6 g \left(h_A - h_B \right)}$$

(b) Para calcular el trabajo de la fuerza de rozamiento en el tramo desde B hasta C procedemos como hicimos anteriormente

$$W_{\text{roz}}^{BC} = \int \vec{F}_{\text{roz}} \cdot d\vec{l} = \int F_{\text{roz}} \cos 180^\circ \, dl = -F_{\text{roz}} l = -0.1\, Mg \frac{\pi}{2} R = -0.05\pi MgR.$$

(c) La energía mecánica en C toma el valor

$$E_{\text{mec}}^{C} = K^{C} + E_{\text{pg}}^{C} = \frac{1}{2} M v_C^2 + Mgh_C = \frac{1}{2} M v_C^2 + Mgh_{B,}$$

donde hemos tenido en cuenta que las alturas en B y en C son iguales

Como el rozamiento ha realizado un trabajo, disipa energía. Como ya pasaba en el apartado (a)

$$\Delta E_{mec}^{BC} = W_{roz}^{BC}$$

$$E_{\text{mec}}^{C} - E_{\text{mec}}^{B} = \frac{1}{2} M v_C^2 - Mgh_B - \frac{1}{2} M v_B^2 - Mgh_B = W_{\text{roz}}^{BC}$$

$$\frac{1}{2} M v_C^2 - \frac{1}{2} M v_B^2 = -0.05\pi MgR$$

$$v_C = \sqrt{v_B^2 - 0.1\pi g R}$$

(a) Un instante antes de llegar al punto B el trineo se mueve por una línea recta que forma un ángulo de 30° con la horizontal. El sumatorio de todas las fuerzas que actúan en la dirección perpendicular al plano inclinado (que denotaremos por y, con sentido positivo según nos separamos del plano inclinado) debe anularse. Por lo tanto,

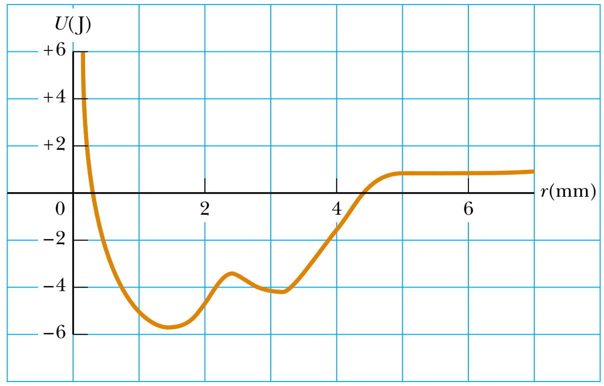
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \quad N - Mg\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad N = Mg\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} Mg.$$

(b)Un instante después de haber pasado por el punto B, el trineo se mueve en una trayectoria circular de radio R. Por lo tanto, el trineo tendrá una aceleración normal, dirigida hacia el centro del círculo. Aplicando la segunda ley de Newton en este caso,

$$\sum F_n = Ma_n \Rightarrow \quad N - Mg\cos\theta = M\frac{v_B^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N = Mg\cos\theta + M\frac{v_B^2}{R}.$$

$$N = \frac{\sqrt{3}}{2}Mg + \frac{M}{R}\left[v_A^2 + 1.6g\left(h_A - h_B\right)\right].$$

Problema 2: Una partícula se mueve a lo largo de una línea, en la que la energía potencial del sistema depende de la posición r de la partícula como se indica en la figura. En el límite, cuando $r \to \infty$, $U(r)$ se aproxima a +1 J.



(a) Identificar cada una de las posiciones de equilibrio de esta partícula. Indicar si cada una de ellas es un punto de equilibrio estable o inestable (0.3 puntos).

(b) ¿Qué rango de valores debe tener la energía total del sistema para que la partícula esté ligada? (0.3 puntos).

Suponga ahora que el sistema tiene una energía de -3 J. Determinar

(c) el rango de posiciones en las que se puede encontrar la partícula (0.35 puntos),

(d) su energía cinética máxima (0.35 puntos),

(e) la posición donde es máxima la energía cinética (0.35 puntos),

(f) su energía de enlace, es decir, la energía cinética adicional que habrá que proporcionar a la partícula para que esta se desplace hasta $r \to \infty$ (0.35 puntos).

Razonad todas las respuestas. Simplemente un valor numérico no se considerará como una respuesta válida.

Solución:

(a) Existirá un punto de equilibrio allá donde la función de energía potential sea un máximo o un mínimo local. Es decir, donde la figura de la energía potential sea horizontal.

Si es un máximo local se trata de un punto de equilibrio inestable. Hay uno alrededor de $r = 2.3$ mm.

Si es un mínimo local se trata de un punto de equilibrio estable. Hay dos: uno en $r = 1.5$ mm y otro en $r = 3.2$ mm.

(b) El punto más bajo de la energía se encuentra alrededor de -5.6 J. Por otra parte, si la energía de la partícula es superior a +1 J, esta no está ligada (podría llegar a estar en una posición $r \to \infty$. Por lo tanto, la partícula está ligada si

$$-5.6 \text{ J} < E < +1 \text{ J}.$$

(c) Si la energía del sistema es de -3 J, entonces la energía potencial debe ser menor o igual a -3 J. De esta manera, la posición de la partícula está acotada entre

$$0.6 \text{ mm} < r < 3.6 \text{ mm}.$$

(d) Como la energía mecánica se define a partir de $E = K + U$ y es constante (no estamos tratando con fuerzas disipativas, todas las fuerzas que tenemos derivan de una energía potencial) , entonces la energía cinética será máxima cuando la energía potencial sea mínima,

$$K_{\mathrm{max}} = E - U_{\mathrm{min}} = -3.0\ \mathrm{J} - \left(-5.6\ \mathrm{J}\right) = 2.6\ \mathrm{J}.$$

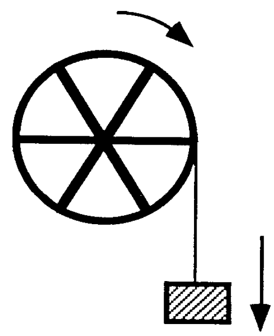
(e) Este valor se alcanzará para el r en el cuál la energía potencial sea mínima $r = 1.5\ \mathrm{mm}$

(f) La suma de la energía de enlace, W , con la energía de la partícula debe ser igual a la energía necesaria para que la partícula llegue a $r \to \infty$ (+1 J).

Entonces,

$$-3.0\ \mathrm{J} + W = 1\ \mathrm{J} \qquad \Rightarrow \qquad W = 4\ \mathrm{J}.$$

Problema 3: En la periferia de una rueda de radio 1 m capaz de girar alrededor de un eje horizontal se ha enrollado una cuerda de 5 m de longitud y de peso despreciable de la que cuelga una masa de 10 kg. El anillo y los seis radios que constituyen la rueda son homogéneos y su densidad lineal es de 1 kg/m. Calcular:



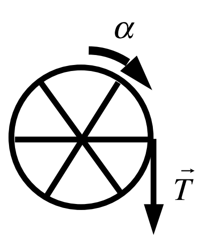
(a) el momento de inercia de la rueda con respecto a un eje que pasa por su centro (0.6 puntos),
(b) la aceleración de caída de la masa (0.6 puntos),
(c) la tensión en la cuerda (0.6 puntos),
(d) el tiempo que tarda la cuerda en desenrollarse por completo (0.2 puntos).
Nota: Recordad que el momento de inercia de un anillo con respecto de un eje que pasa por su centro es $I_{\text{anillo}} = MR^2$ y el de una varilla $I_{\text{radio}} = \frac{1}{3}MR^2$.

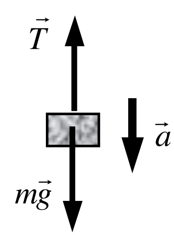
Solución:

(a) El momento de inercia de la rueda será:

$$I_{\text{rueda}} = I_{\text{anillo}} + I_{\text{radios}} = M_{\text{anillo}}R^2 + 6\left[\frac{1}{3}M_{\text{radio}}R^2\right] = (\lambda 2\pi R)R^2 + 6\left[\frac{1}{3}(\lambda R)R^2\right]$$
$$= 2(1+\pi)\lambda R^3 = 8.28\ \text{kg}\times\text{m}^2$$

(b) y (c) Tomando como el sentido positivo para la traslación del bloque el vertical hacia abajo y como sentido positivo de rotación para la rueda el horario y planteando la segunda ley de Newton para cada cuerpo,





$$TR = I_{rueda}\alpha \qquad\qquad mg - T = ma$$

Dos ecuaciones que junto con la relación $a = \alpha R$ completan un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas cuya solución es

$$\boxed{\begin{aligned} T &= \left[\frac{2(1+\pi)\lambda R}{m + 2(1+\pi)\lambda R}\right] mg = 44.4\ \mathrm{N} \\ a &= \left[\frac{m}{m + 2(1+\pi)\lambda R}\right] g = 5.36\ \mathrm{m/s^2} \\ \alpha &= \left[\frac{m}{m + 2(1+\pi)\lambda R}\right] \frac{g}{R} = 5.36\ \mathrm{rad/s^2} \end{aligned}}$$

(d) La longitud de la cuerda desenrollada en cualquier instante (suponiendo que estaba completamente enrollada será

$$l(t) = \frac{1}{2} a t^2 .$$

Cuando se desarrolla por completo,

$$L = \frac{1}{2} a t_{\text{desenrollado}}^2 \quad \Rightarrow \quad t_{\text{desenrollado}} = \sqrt{\frac{2L}{a}} = 1.37\ s.$$