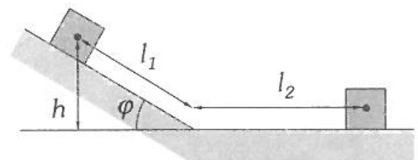
Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Septiembre de 2014
Problemas (Dos puntos por problema).



Problema 1 (Primer parcial): Un cuerpo de masa 10 kg se desliza bajando por un plano inclinado 30° sobre la horizontal. El plano tiene una longitud de 5 m y a continuación de él hay un plano horizontal como se indica en la figura. El coeficiente de rozamiento del cuerpo con el plano inclinado es de 0.25 y con el plano horizontal de 0.3. El cuerpo empieza a moverse desde la parte superior del plano inclinado. Determinar:

(a) Módulo de la velocidad del cuerpo al llegar al plano horizontal (0.8 puntos).
(b) Espacio recorrido en el plano horizontal hasta que se para (0.6 puntos).
(c) Trabajo disipado como consecuencia del rozamiento. Sabiendo que 1 caloría equivale a 4.18 J, dar el resultado en calorías (0.6 puntos).

Solución:

(a) Tomamos como configuración original del sistema aquella en la que el cuerpo está en la parte superior del plano inclinado. Como parte del reposo, la energía cinética del bloque es nula. Si escogemos como cero de energía potencial gravitatoria la altura del plano horizontal, entonces la energía potencial gravitatoria es

$$U^{(1)} = mgh = mgl_1 \sin\varphi.$$

Así pues, la energía mecánica en la configuración (1) es

$$E_{\text{mec}}^{(1)} = K^{(1)} + U^{(1)} = mgl_1 \sin\varphi.$$

Sea la configuración 2 aquella en la cual el bloque acaba de llegar al plano horizontal. En ese momento, toda la energía del sistema coincide con la energía cinética del bloque,

$$E_{\text{mec}}^{(2)} = K^{(2)} + U^{(2)} = \frac{1}{2}mv^2.$$

Como hay una fuerza disipativa (el rozamiento), entonces la variación de la energía mecánica es el trabajo realizado por dicha fuerza,

$$\Delta E_{\text{mec}} = E_{\text{mec}}^{(2)} - E_{\text{mec}}^{(1)} = W_{\text{roz}}^{(\text{plano inclinado})}. \qquad (1)$$

Dicho trabajo podemos calcularlo como el producto escalar de la fuerza de rozamiento por el desplazamiento recorrido en el plano inclinado.

$$W_{\text{roz}}^{(\text{plano inclinado})} = \vec{F}_{\text{roz}} \cdot \Delta\vec{r} = -\mu_1 N \times l_1 = -\mu_1 mgl_1 \cos\varphi. \qquad (2)$$

Sustituyendo la ecuación (2) en (1)

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgl_1 \sin\varphi = -\mu_1 mgl_1 \cos\varphi \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2gl_1\left(\sin\varphi - \mu_1\cos\varphi\right)} = 5.3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

(b) Tomamos como tercera configuración del sistema aquella en la cual el bloque se ha detenido en el plano horizontal. En ese momento, la energía mecánica del sistema se anula. Por lo tanto, como actúa una fuerza no disipativa (el rozamiento con el plano horizontal), y siguiendo el razonamiento del apartado anterior,

$$\Delta E_{\text{mec}} = E_{\text{mec}}^{(3)} - E_{\text{mec}}^{(2)} = W_{\text{roz}}^{(\text{plano horizontal})},$$

$$-\frac{1}{2}mv^2 = -\mu_2 mgl_2 \qquad \Rightarrow \qquad l_2 = \frac{v^2}{2\mu_2 g} = 4.7\text{ m}.$$

(c) Toda la energía potencial del cuerpo se ha disipado en forma de calor una vez que éste se haya parado, con lo que

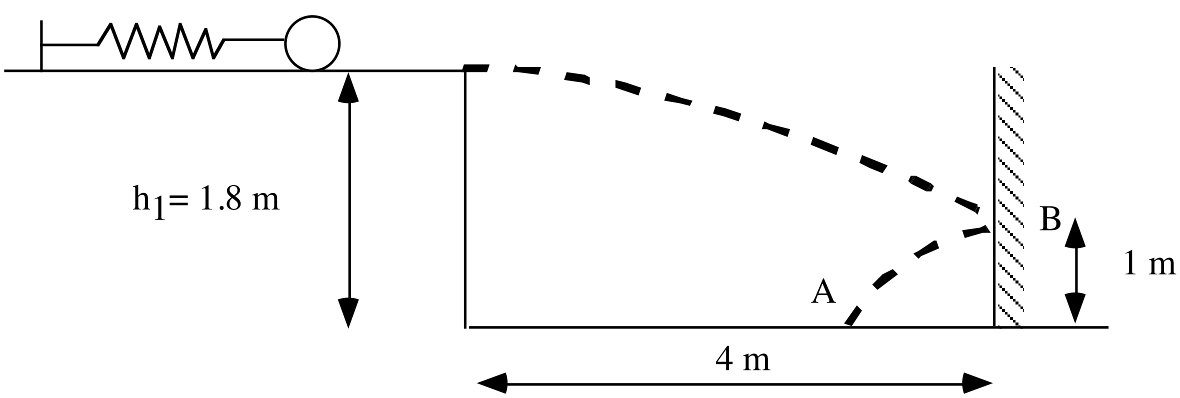
$$W_{\text{roz}} = W_{\text{roz}}^{(\text{plano inclinado})} + W_{\text{roz}}^{(\text{plano horizontal})} = E_{\text{mec}}^{(1)} = mgl_1 \sin\varphi = 245\text{ J} = 58.6\text{ cal}.$$

Problema 2 (Segundo parcial): Supongamos un muelle de constante k sobre una superficie horizontal (sin rozamiento) a una altura h_1 = 1.8 m. A una distancia d = 4 m se coloca una pared vertical, (coeficiente de restitución e = 0.5) tal y como se muestra en la figura. Presionamos el muelle 30 cm con una esfera maciza de 2 kg de peso y R = 2 cm.

(a) Determinar la constante k del muelle sabiendo que la esfera choca con la pared a una altura h_2 = 1 m. (1 punto).

(b) Hallar la ecuación de la trayectoria (coordenada y como función de la coordenada x) de la esfera en su caída hasta llegar a la pared. ¿Qué tipo de trayectoria es? ¿Cuál es el origen físico de este tipo de movimiento? (0.25 puntos).

(c) Determinar el punto A en el que la esfera llega al suelo ¿Con qué ángulo incide? En el caso que el choque sea elástico como se modificarían la posición y el ángulo anteriores? (0.75 puntos).



Solución:

(a) Al descomprimir el muelle, toda la energía potencial elástica se transforma en energía cinética,

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x.$$

donde v es el módulo de la velocidad con la que la partícula llega al salto (que denotaremos como punto C). Tomando como el eje x horizontal (sentido positivo hacia la derecha) y el eje y vertical (sentido positivo hacia arriba), entonces el vector velocidad en el instante del salto vale

$$\vec{v}^{\mathrm{C}} = v_x^{\mathrm{C}}\vec{i} = \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x\,\vec{i}\,.$$

Durante la caída, la componente de la velocidad a lo largo del eje x no cambia (no hay aceleración en esa dirección). Luego podemos calcular el tiempo de vuelo a partir de las ecuaciones del movimiento rectilíneo y uniforme,

$$t_{\mathrm{vuelo}}^{\mathrm{C}\to\mathrm{B}} = \frac{d}{v_x^{\mathrm{C}}} = \frac{d}{\sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x}.$$

A lo largo del eje y la partícula ha seguido un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado con $y_0 = 1.8\ \mathrm{m}$, $y = 1.0\ \mathrm{m}$, $v_{0y} = 0$, $a_y = -g$. Luego podemos calcular la componente y de la velocidad con la que la partícula llega a B,

$$v_y^{\mathrm{B}} = v_{oy} - g t_{\mathrm{vuelo}}^{\mathrm{C}\to\mathrm{B}} = -\frac{gd}{\sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x}.$$

Con lo que la velocidad tomará el valor

$$\vec{v}^{\mathrm{B}} = v_x^{\mathrm{B}}\vec{i} + v_y^{\mathrm{B}}\vec{j} = \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x\,\vec{i} - \frac{gd}{\sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x}\vec{j}.$$

Su módulo al cuadrado es

$$v^{\mathrm{B}^2} = \frac{k}{m}\Delta x^2 + \frac{g^2 d^2}{\frac{k}{m}\Delta x^2}.$$

Y la energía mecánica de la partícula en B

$$E_{\mathrm{mec}}^{\mathrm{B}} = K^{\mathrm{B}} + U_{\mathrm{pot\ grav}}^{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}mv^{\mathrm{B}^2} + mgh_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}m\left(\frac{k}{m}\Delta x^2 + \frac{g^2 d^2}{\frac{k}{m}\Delta x^2}\right) + mgh_{\mathrm{B}},$$

donde hemos tomado como cero de energías potenciales gravitatorias el suelo. Durante el vuelo, la energía mecánica del sistema se conserva,

$$E_{\text{mec}}^{\text{C}} = \frac{1}{2} m v^{\text{C}^2} + mgh_{\text{C}} = \frac{1}{2} m \frac{k}{m} \Delta x^2 + mgh_{\text{C}}$$

$$E_{\text{mec}}^{\text{C}} = E_{\text{mec}}^{\text{B}}$$

$$\frac{1}{2} m \frac{k}{m} \Delta x^2 + mgh_{\text{C}} = \frac{1}{2} m \frac{k}{m} \Delta x^2 + \frac{1}{2} m \frac{g^2 d^2}{\frac{k}{m} \Delta x^2} + mgh_{\text{B}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{m^2 g^2 d^2}{k \Delta x^2} = mg\left(h_{\text{C}} - h_{\text{B}}\right),$$

de donde podemos despejar la constante del muelle

$$k = \frac{1}{2} \frac{g d^2 m}{\Delta x^2 \left(h_{\text{C}} - h_{\text{B}}\right)}.$$

Sustituyendo los datos del problema,

$$k = 2.17 \times 10^3 \, \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

(b) Las coordenadas de la partícula a lo largo de x e y como función del tiempo vendrán dadas por

$$x(t) = x_0 + v_{ox} t \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = v_{0x} t = v_x^{\text{C}} t,$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = h_{\text{C}} - \frac{g}{2} t^2,$$

donde se ha escogido como origen de tiempos el instante en el que la partícula está en el punto C. Despejando el tiempo en el primera ecuación y sustituyendo en la segunda,

$$t = \frac{x}{v_x^{\text{C}}},$$

$$y = h_{\text{C}} - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_x^{\text{C}}} \right)^2 = h_{\text{C}} - \frac{g}{2 \frac{k}{m} \Delta x^2} x^2.$$

Sustituyendo los datos del problema,

$$y = 1.8 - 0.05 x^2 \, [\text{m}].$$

El movimiento de la partícula describirá entonces una trayectoria parabólica. El origen físico del movimiento es la fuerza de la gravedad, que hace que la partícula esté sometida a un movimiento uniformemente acelerado en la dirección vertical mientras que sigue un movimiento uniforme en la dirección horizontal.

(c) Al chocar contra la pared, ésta ejerce una fuerza sobre la partícula en la dirección normal (dirección x). Por lo tanto, solo cambiará el momento lineal a lo largo de esta dirección. El choque no modifica el momento a lo largo de la dirección y (en esta dirección el movimiento sigue siendo uniformemente acelerado). Podemos calcular el tiempo de vuelo de la pelota desde el punto B hasta el punto A, sabiendo que, en este caso, $y_0 = 1.0 \text{ m}$, $y_f = 0 \text{ m}$, $v_{0y} = -\frac{gd}{\sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x}$, $a_y = -g$. Por lo tanto

$$y_f = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a t^2,$$

$$0 = y_0 - \frac{gd}{\sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x} t_{\text{vuelo}}^{\text{B}\to\text{A}} - \frac{1}{2} g t_{\text{vuelo}}^{\text{B}\to\text{A}^2}$$

$$t_{\text{vuelo}}^{\text{B}\to\text{A}} = \frac{\frac{gd}{\sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x} \pm \sqrt{\frac{g^2 d^2}{\frac{k}{m}\Delta x^2} + 2 g y_0}}{2\left(-\frac{1}{2} g\right)} = 0.20 \text{ s}.$$

La segunda solución es negativa y carece de sentido físico.

La componente de la velocidad a lo largo de x cambia. Como la pared no se mueve, aplicando la definición del componente de restitución

$$e = -\frac{v_{x,\text{después}}}{v_{x,\text{antes}}} \qquad \Rightarrow \qquad v_{x,\text{después}} = -e v_{x,\text{antes}} = -e\sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x = -4.94 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Después del choque, esta componente de la velocidad se mantiene constante, con lo que la distancia recorrida es (medida desde la pared)

$$x = v_{x,\text{después}} t_{\text{vuelo}}^{\text{B}\to\text{A}} = -0.99 \text{ m},$$

lo que equivale a 3.01 m medido desde el punto C.

Las componentes de la velocidad en el punto A serían

$$v_x^{\mathrm{A}} = -4.94\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

$$v_y^{\mathrm{A}} = v_y^{\mathrm{B}} - g t_{\text{vuelo}}^{\mathrm{B}\to\mathrm{A}} = -5.93\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

El ángulo que forma la velocidad con el eje de las x es

$$\alpha = \arctan\left(-\frac{5.93}{4.94}\right) = 50.20^{\circ}.$$

Si ahora suponemos que el choque es elástico ($e = 1$),

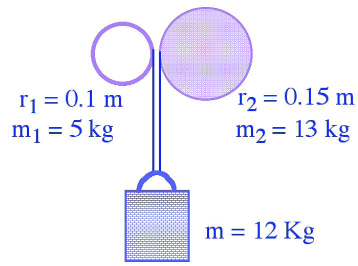
$$e = -\frac{v_{x,\text{después}}}{v_{x,\text{antes}}} \qquad \Rightarrow \qquad v_{x,\text{después}} = -e v_{x,\text{antes}} = -e\sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x = -9.88\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Y el ángulo que forma la velocidad con el eje de las x es

$$\alpha = \arctan\left(-\frac{5.93}{9.88}\right) = 30.97^{\circ}.$$

La partícula caería a $x = v_{x,\text{después}} t_{\text{vuelo}}^{\mathrm{B}\to\mathrm{A}} = -1.97\ \mathrm{m}$ de la pared (lo que equivale a 2.03 m desde el punto C).

Problema 3 (Segundo parcial): El sistema que muestra la figura está constituido por un anillo de radio $r_1 = 0{,}1\,\mathrm{m}$ y masa $m_1 = 5{,}0\,\mathrm{kg}$, un cilindro homogéneo de radio $r_2 = 0{,}15\,\mathrm{m}$ y masa $m_2 = 13{,}0\,\mathrm{kg}$ y una masa $m = 12{,}0\,\mathrm{kg}$. Soltamos esta última desde el reposo y la dejamos caer 6 m. Despreciando el rozamiento circular, calcular:



(a) Los momentos de inercia del anillo y del cilindro (0.25 puntos).
(b) Utilizando el principio de conservación de la energía, calcular la velocidad final de la masa cuando ha descendido los 6 m (0.5 puntos).
(c) La aceleración (0.75 puntos).
(d) La aceleración angular del anillo y del cilindro (0.25 puntos).
(e) La tensión en ambas cuerdas (0.25 puntos).

Solución:

(a) El anillo tiene toda su masa en el borde, a una distancia r_1 del eje, por lo que el momento de inercia es

$$I_1 = m_1 r_1^2 = 5{,}0\ \mathrm{kg} \times 0{,}1^2\ \mathrm{m}^2 = 0{,}05\,\mathrm{kg} \times \mathrm{m}^2.$$

El cilindro, al ser homogéneo, tiene el momento de inercia igual al de un disco,

$$I_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 = \frac{1}{2} \times 13{,}0\ \mathrm{kg} \times 0{,}15^2\ \mathrm{m}^2 = 0{,}146\,\mathrm{kg} \times \mathrm{m}^2.$$

(b) La velocidad se puede calcular por energías: la pérdida de energía potencial se convierte en energía cinética de traslación y de rotación.

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2.$$

Teniendo en cuenta la relación entre la velocidad lineal y la velocidad angular para un punto en el borde del anillo y del disco, y teniendo en cuenta que la velocidad lineal de dichos puntos es igual a la velocidad de caída de la masa m

$$\omega_1 = \frac{v}{r_1}, \qquad \omega_2 = \frac{v}{r_2},$$

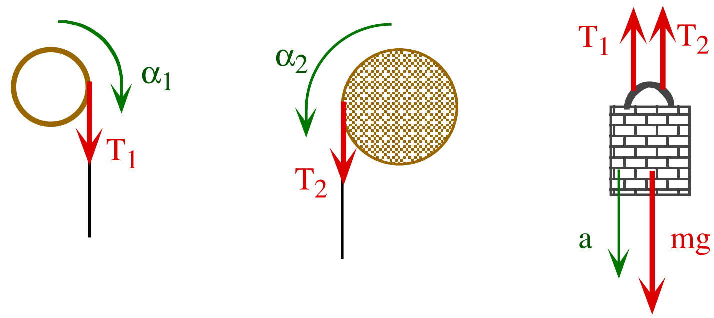
con lo que

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_1 \left(\frac{v}{r_1}\right)^2 + \frac{1}{2} I_2 \left(\frac{v}{r_2}\right)^2 = \frac{1}{2} v^2 \left(m + \frac{I_1}{r_1^2} + \frac{I_2}{r_2^2}\right) = \frac{1}{2} v^2 \left(m + m_1 + \frac{m_2}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + m_1 + \frac{m_2}{2}}} = \sqrt{\frac{2 \times 12{,}0\,\mathrm{kg} \times 9.81\,\mathrm{m/s^2} \times 6\,\mathrm{m}}{\left(12{,}0 + 5{,}0 + \frac{13{,}0}{2}\right)\mathrm{kg}}} = 7{,}75\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

(c) Para calcular la aceleración aplicamos la segunda ley de Newton de las traslaciones ($\sum \vec{F} = m\vec{a}$) para la masa y la segunda ley de Newton de las rotaciones ($\sum M = I\alpha$) para el anillo y para el disco.



Para el anillo el sentido de giro es horario, con lo que con el criterio convencional de signos, la aceleración angular es negativa. Por otra parte, el momento apuntará hacia dentro del plano del papel. Si tomamos como sentido positivo el que sale del plano del papel, también el momento tendrá signo negativo. Por lo tanto, teniendo en cuenta que el radio vector que determina el punto de aplicación de la fuerza y la tensión son perpendiculares, entonces

$$-r_1 T_1 = -I_1 \alpha_1.$$

Con un razonamiento análogo para el disco llegamos a la conclusión de que

$$r_2 T_2 = I_2 \alpha_2.$$

Por último, para la masa que cuelga de las cuerdas, si tomamos como positivo el sentido hacia abajo, tenemos que

$$mg - T_1 - T_2 = ma.$$

De la primera de estas tres ecuaciones deducimos que

$$-r_1 T_1 = -I_1 \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{I_1 \alpha_1}{r_1} = \frac{m_1 r_1^2 \left(\frac{a}{r_1} \right)}{r_1} = m_1 a.$$

Hemos hecho uso de la relación entre la aceleración lineal de un punto en el borde del anillo con la aceleración angular del mismo, y del hecho de que la aceleración lineal de un punto del borde y de la masa que cuelga deben ser iguales.

De la segunda de las ecuaciones,

$$r_2 T_2 = I_2 \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{I_2 \alpha_2}{r_2} = \frac{\frac{1}{2} m_2 r_2^2 \left(\frac{a}{r_2}\right)}{r_2} = \frac{1}{2} m_2 a.$$

Sustituyendo el valor de las tensiones en la tercera ecuación,

$$mg - m_1 a - \frac{1}{2} m_2 a = ma \quad \Rightarrow \quad \left(m + m_1 + \frac{m_2}{2}\right) a = mg \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m}{\left(m + m_1 + \frac{m_2}{2}\right)} g.$$

Reemplazando los valores numéricos,

$$a = 5{,}01 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

(d) Para conocer las aceleraciones angulares, simplemente aplicamos la relación entre la aceleración lineal de un punto de la periferia del anillo y del disco con la aceleración angular,

$$\alpha_1 = \frac{a}{r_1} = \frac{5{,}01\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}1\,\mathrm{m}} = 50{,}1 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2},$$
$$\alpha_2 = \frac{a}{r_2} = \frac{5{,}01\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}15\,\mathrm{m}} = 33{,}4 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2},$$

(e) Finalmente, podemos calcular las tensiones reemplazando los valores obtenidos en las ecuaciones anteriores

$$T_1 = m_1 a = 5\,\mathrm{kg} \times 5{,}01\,\mathrm{m/s^2} = 25{,}05\,\mathrm{N},$$
$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 a = \frac{1}{2} 13\,\mathrm{kg} \times 5{,}01\,\mathrm{m/s^2} = 32{,}56\,\mathrm{N}.$$