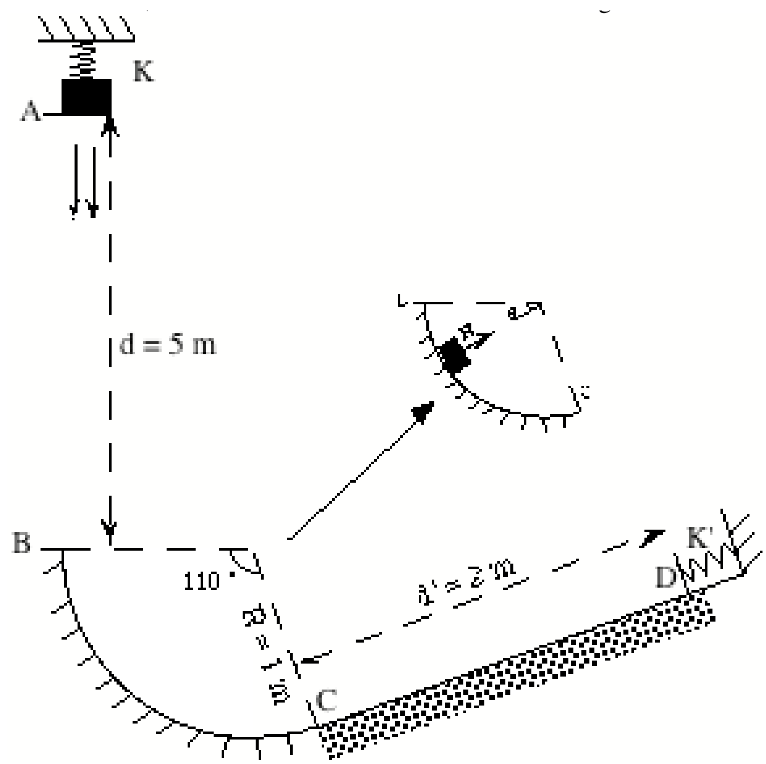
Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Septiembre de 2013
Problemas (Dos puntos por problema).

Problema 1 (Primer parcial): Un cuerpo de masa $m = 0{,}5\,\text{kg}$ se lanza hacia abajo mediante un muelle comprimido una distancia $x = 10\,\text{cm}$, siendo su constante $k = 100\,\text{N/m}$ (ver figura).



(a) Determinar con qué velocidad llega al punto B, situado $5\,\text{m}$ más abajo. (0,3 puntos) (b) A partir del punto B el cuerpo se desliza con rozamiento despreciable sobre una superficie esférica de radio $R = 1\,\text{m}$, llegando a alcanzar el punto C de la figura. Determinar la velocidad con la que llega a ese punto. (0,3 puntos) (c) Determinar las ecuaciones del movimiento en un instante t cuando el móvil ha descrito un ángulo θ (ver figura). Determínese el valor de la fuerza N ejercida por la superficie sobre el cuerpo. ¿Es constante dicha fuerza o variará con el ángulo θ? Coméntese. (0,4 puntos) (d) A partir de una de las ecuaciones del movimiento, encuéntrese que la ecuación de la velocidad viene dada por $v^2 = v_0^2 + 2gR\sin\theta$. (0,5 puntos). (e) A partir del punto C el móvil sube por una rampa cuyo coeficiente de rozamiento dinámico es $\mu_d = 0{,}4$. A dos metros se encuentra con otro muelle. Determínese cuánto debe valer la constante de ese muelle si se comprime 10 cm al recibir el impacto del cuerpo. (0,3 puntos) (f) ¿Cuánto debe valer el coeficiente de rozamiento estático μ_e para que el muelle quede comprimido? (0,2 puntos)

Solución:

(a) Podemos calcular la energía mecánica del sistema en el punto A, tomando como origen de la energía potencial gravitatoria la altura del punto B,

$$E_{\text{mec}}^{A} = K^{A} + U_{\text{pot grav}}^{A} + U_{\text{pot ela}}^{A} = mgd + \frac{1}{2}kx^2.$$

En la expresión anterior hemos tenido en cuenta que el cuerpo en A está en reposo.

La energía mecánica del sistema en el punto B vendrá dada por

$$E_{\text{mec}}^{B} = K^{B} + U_{\text{pot grav}}^{B} + U_{\text{pot ela}}^{B} = \frac{1}{2}mv_B^2,$$

ya que en B, ambas energías potenciales se anulan.

Como todas las fuerzas que intervienen son conservativas, la energía mecánica total del sistema se conserva,

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgd + \frac{1}{2}kx^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_B = \sqrt{2gd + \frac{k}{m}x^2} = 10{,}86 \text{ m/s}.$$

(b) Tomando como origen de coordenadas el centro de la superficie esférica, podemos calcular las coordenadas del punto C,

$$x_C = R\sin 20,$$
$$y_C = -R\cos 20.$$

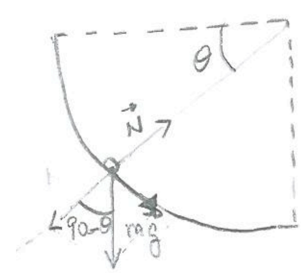
La energía mecánica del sistema en el punto C vendrá dada por

$$E_{\text{mec}}^{C} = K^{C} + U_{\text{pot grav}}^{C} + U_{\text{pot ela}}^{C} = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgy_C = \frac{1}{2}mv_C^2 - mgR\cos 20.$$

De nuevo, como todas las fuerzas son conservativas (no hay rozamiento), la energía mecánica del sistema se conserva

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 - mgR\cos 20 \qquad \Rightarrow \qquad v_c = \sqrt{v_B^2 + 2gR\cos 20} = 11{,}67 \text{ m/s}.$$

(c) En cualquier instante del tiempo, podemos descomponer las fuerzas en la dirección radial y tangencial.



En la dirección radial (tomando sentido positivo "hacia fuera" de la superficie),

$$-N + mg\cos(90-\theta) = -m\frac{v^2(\theta)}{R} \quad \Rightarrow \quad N = mg\sin\theta + m\frac{v^2(\theta)}{R}.$$

A partir de esta expresión, es obvio que la normal depende del ángulo θ.

En la dirección tangencial

$$mg\sin\left(90-\theta\right)=m\frac{dv\left(\theta\right)}{dt}.$$

(d) A partir de la ecuación de movimiento en la dirección tangencial,

$$mg\sin\left(90-\theta\right)=m\frac{dv\left(\theta\right)}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad mg\cos\theta=m\frac{dv\left(\theta\right)}{dt}.$$

Multiplicando y dividiendo por $d\theta$

$$mg\cos\theta=m\frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=m\frac{dv}{d\theta}\omega.$$

Podemos relacionar la velocidad angular con la velocidad lineal y el radio,

$$v=\omega R \qquad \Rightarrow \qquad \omega=\frac{v}{R},$$

con lo que

$$mg\cos\theta=m\frac{v}{R}\frac{dv}{d\theta} \qquad \Rightarrow \qquad g\cos\theta=\frac{v}{R}\frac{dv}{d\theta}.$$

Separando variables,

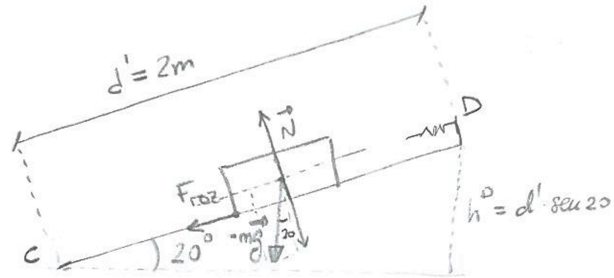
$$v\,dv=2gR\cos\theta\,d\theta.$$

Integrando esta expresión

$$\int_{v_0}^{v(\theta)}v\,dv=\int_0^{\theta}2gR\cos\theta\,d\theta,$$
$$\frac{v^2\left(\theta\right)}{2}-\frac{v_0^2}{2}=gR\sin\theta,$$
$$v^2\left(\theta\right)=v_0^2+2gR\sin\theta.$$

En la expresión anterior, v_0 se corresponde con la velocidad del cuerpo cuando el ángulo $\theta=0$. En la notación que hemos venido utilizando hasta ahora, $v_0=v_B$.

(e) Según se asciende por la rampa, el rozamiento disipa energía. Podemos calcular el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento sobre el bloque



$$W_{\text{roz}} = F_{\text{roz}} d^{'} \cos\theta = \mu_d N d^{'} \cos\theta = -\mu_d m g d^{'} \cos 20 = -3{,}87 \text{ J}.$$

En la expresión anterior, $d^{'}$ es la distancia recorrida por el plano inclinado más la que se encoge el muelle ($d^{'} = 2{,}1 \text{ m}$).

La energía mecánica con la que el objeto impacta el muelle es

$$E_{\text{mec}}^{D} = E_{\text{mec}}^{C} + W_{\text{roz}} = \frac{1}{2} m v_C^2 + W_{\text{roz}} = 30{,}18 \text{ J}.$$

Nótese como para la resolución de este apartado hemos modificado el origen de la energía potencial gravitatoria, haciéndolo coincidir con la altura inicial del plano inclinado.

Esta energía se transformará en energía potencial elástica y gravitatoria

$$\frac{1}{2} k x^2 + m g d^{'} \sin 20 = E_{\text{mec}}^{D},$$
$$k = \frac{2\left(E_{\text{mec}}^{D} - m g d^{'} \sin 20\right)}{x} = 5342{,}6 \text{ N/m}.$$

(f) En ese caso la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el bloque debe anularse, con lo que

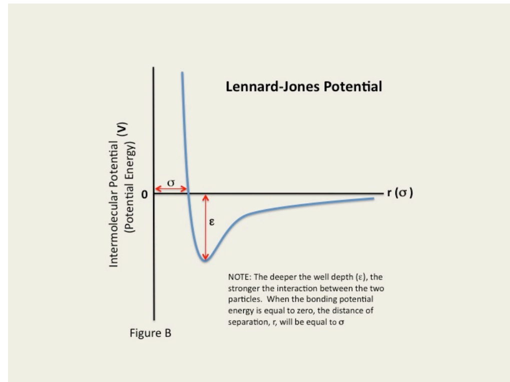
$$-m g \sin 20 - k x + F_{\text{roz}} = 0,$$
$$-m g \sin 20 - k x + \mu_{\text{e}} N = -k x + \mu_{\text{e}} m g \cos 20 - m g \sin 20 = 0,$$
$$\mu_{\text{e}} = \frac{k x + m g \sin 20}{m g \cos 20} = 116{,}4.$$

Este valor para la constante de rozamiento estática no tiene sentido físico.

Problema 2 (Segundo parcial): Una partícula de masa m, que se puede mover a lo largo del eje x, está sometida a una fuerza que deriva de la función energía potencial

$$E_p(x) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right],$$

donde σ y ε son constantes positivas. Esta función es conocida como el potencial de Lennard-Jones



Encontrar:

(a) **Posiciones de equilibrio, indicando su carácter estable o inestable. (0,5 puntos)**
(b) **La expresión de la fuerza. (0,5 puntos)**
(c) **El periodo de pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio estable. (1 punto)**

Solución:

(a) Las posiciones de equilibrio corresponden a máximos y mínimos de la energía potencial, ya que en los máximos y en los mínimos la fuerza es 0. Así pues, los máximos y los mínimos corresponden a posiciones donde la derivada de E_p sea cero.

$$\frac{dE_p}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right]\right\} = 4\varepsilon\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right] =$$

$$= 4\varepsilon\left[-12\frac{\sigma^{12}}{x^{13}} + 6\frac{\sigma^{6}}{x^{7}}\right] = \frac{24\varepsilon}{x}\left(-2\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} + \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right).$$

Los puntos en los que esta derivada se hace cero son:

$$x_1 \to \infty$$

$$-2\sigma^{12}x_2^{-12} + \sigma^{6}x_2^{-6} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2\sigma^{6}x_2^{-6} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \sqrt[6]{2}\sigma.$$

Las posiciones de equilibrio estable son las correspondientes a mínimos de la energía potencial, ya que ante cualquier desviación de la posición de equilibrio aparece una fuerza que nos devuelve a la misma. Por el contrario, las posiciones de equilibrio inestable corresponden a los máximos, ya que ante cualquier desviación de la posición de equilibrio, aparece una fuerza que nos aleja de la misma. Para saber si son máximos o mínimos calculamos la derivada segunda en las posiciones de equilibrio. Si la derivada segunda es positiva un mínimo (equilibrio estable), mientras que si la derivada segunda es negativa, estamos ante un máximo (equilibrio inestable).

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left\{4\varepsilon\left[-12\frac{\sigma^{12}}{x^{13}} + 6\frac{\sigma^6}{x^7}\right]\right\} = 4\varepsilon\left(12\times 13\times\frac{\sigma^{12}}{x^{14}} - 6\times 7\times\frac{\sigma^6}{x^8}\right) = \frac{4\varepsilon}{x^2}\left[12\times 13\times\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - 6\times 7\times\left(\frac{\sigma}{x}\right)^6\right].$$

El valor de esta derivada segunda en el mínimo es

$$\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x_2} = \frac{4\varepsilon}{2^{1/3}\sigma^2}\left(12\times 13\times\frac{1}{2^2} - 6\times 7\times\frac{1}{2}\right) = \frac{4\varepsilon}{2^{1/3}\sigma^2}(39-21) = \frac{72\varepsilon}{2^{1/3}\sigma^2} = \frac{36\varepsilon}{2^{2/3}\sigma^2}.$$

Como las constantes son positivas, la derivada segunda es positiva y por lo tanto, estamos tratando con un mínimo de la energía potencial.

(b) La fuerza se define como menos el gradiente de la energía potencial

$$\vec{F} = -\nabla E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right).$$

En nuestro caso, la energía potencial solo depende de x, por lo que la fuerza solo tiene componente a lo largo del eje x,

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{24\varepsilon}{x}\left[2\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^6\right].$$

(c) Expandiendo en serie de Taylor el potencial alrededor de la posición de equilibrio x_2,

$$E_p(x) = E_p(x_2) + \left.\frac{dE_p(x)}{dx}\right|_{x=x_2}(x-x_2) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_p(x)}{dx^2}\right|_{x=x_2}(x-x_2)^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3E_p(x)}{dx^3}\right|_{x=x_2}(x-x_2)^3 + \ldots$$

Esta expresión se puede simplificar porque:

- En el mínimo, $\left.\frac{dE_p(x)}{dx}\right|_{x=x_2} = 0.$

- Suponiendo que nos movemos alrededor del mínimo y $(x-x_2)$ es pequeño, entonces $(x-x_2)^3 << (x-x_2)^2$.

Entonces,

$$E_p(x) \approx E_p(x_2) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_p(x)}{dx^2}\right|_{x=x_2}(x-x_2)^2$$
$$= E_p(x_2) + \frac{1}{2}k(x-x_2)^2,$$

donde $k = \left.\frac{d^2E_p(x)}{dx^2}\right|_{x=x_2}$. Esta es la expresión de un potencial armónico simple.

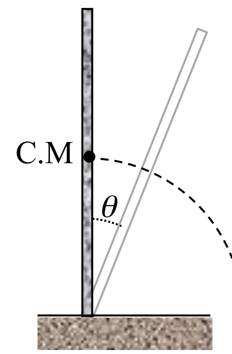
Una vez conocida esta constante k, podemos calcular el periodo de oscilación

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Para calcular k necesitamos conocer la posición de equilibrio y evaluar la derivada segunda en esa posición. Pero es, precisamente, lo que hemos hecho en los apartados anteriores,

$$k = \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_2} = \frac{36\varepsilon}{2^{2/3}\sigma^2},$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2^{2/3}m\sigma^2}{36\varepsilon}} = \frac{2\pi\sigma}{6}\sqrt{\frac{2^{2/3}m}{\varepsilon}}.$$

Problema 3 (Segundo parcial): La barra de la figura se separa muy ligeramente de la posición vertical de forma que empieza a caer. Calcular en función del ángulo de inclinación θ : (a) su velocidad angular (0,4 puntos), (b) su aceleración angular (0,4 puntos), (c) la aceleración de su centro de masas (0,4 puntos), (d) la fuerza de rozamiento y la reacción en el punto de apoyo (0,4 puntos). Si el punto de contacto de la barra con el suelo comienza a deslizar cuando el ángulo de inclinación es de 30º calcular (e) el coeficiente de rozamiento estático con el suelo (0,4 puntos).

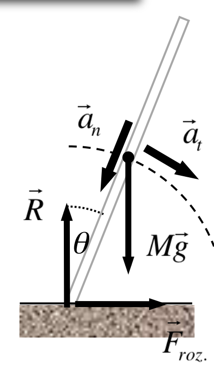


Solución:

(a) Aplicando la conservación de la energía desde que estaba prácticamente vertical hasta que forma un ángulo θ , y teniendo en cuenta el momento de inercia de la barra respecto a su extremo tenemos que:

$$\left.\begin{array}{c} Mg\dfrac{L}{2} = Mg\dfrac{L}{2}\cos\theta + \dfrac{1}{2}I\omega^2 \\ I = \dfrac{1}{3}ML^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\omega(\theta) = \sqrt{3\left(\dfrac{g}{L}\right)(1-\cos\theta)}}$$

(b) Dibujando el diagrama de fuerzas sobre la barra y teniendo en cuenta que su centro de masas está realizando un movimiento circular de radio $r_{giro} = \dfrac{L}{2}$ y que por lo tanto su aceleración tendrá una parte tangencial y otra normal, al aplicar la segunda ley de Newton para el movimiento angular tenemos que:



$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad Mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta = \left(\frac{1}{3}ML^2\right)\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha(\theta) = \frac{3}{2}\left(\frac{g}{L}\right)\operatorname{sen}\theta}$$

(c) Con lo cual las aceleraciones normal y tangencial de su centro de masas serán:

$$\boxed{a_n = \omega^2 r_{giro} = \omega^2\left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)g(1-\cos\theta) \qquad a_t = \alpha\, r_{giro} = \alpha\left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)g\operatorname{sen}\theta}$$

(d) Planteando la segunda ley de Newton para las fuerzas del diagrama anterior:

$$\sum_i \vec{F}_i = M\vec{a} = M\left(\vec{a}_t + \vec{a}_n\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_{roz.} = M\left(a_t \cos\theta - a_n \operatorname{sen}\theta\right) \\ R - Mg = M\left(-a_t \operatorname{sen}\theta - a_n \cos\theta\right) \end{cases}$$

Sistema cuya solución es:

$$\boxed{F_{roz.} = \frac{3}{2} Mg \operatorname{sen}\theta\left(\frac{3}{2}\cos\theta - 1\right) \qquad R = Mg\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\cos\theta\left(\frac{3}{2}\cos\theta - 1\right)\right]}$$

(e) Si la barra comienza a deslizar cuando $\theta = \theta_d = 30^{\circ}$, entonces en dicho instante la fuerza de rozamiento, que era estática, habrá alcanzado su máximo valor permitido:

$$F_{roz.}\left(\theta_d\right) = \mu_e R\left(\theta_d\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2} Mg \operatorname{sen}\theta_d\left(\frac{3}{2}\cos\theta_d - 1\right) = \mu_e Mg\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\cos\theta_d\left(\frac{3}{2}\cos\theta_d - 1\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \mu_e = \frac{6 \operatorname{sen}\theta_d\left(\frac{3}{2}\cos\theta_d - 1\right)}{1 + 6\cos\theta_d\left(\frac{3}{2}\cos\theta_d - 1\right)} = \quad \boxed{0.35}$$