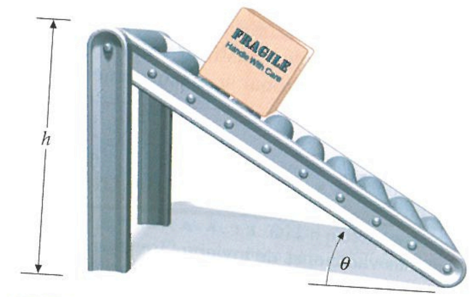
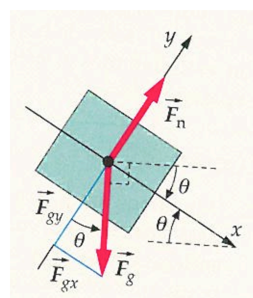
Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Septiembre de 2012
Problemas (Dos puntos por problema).



Problema 1 (Primer parcial): Suponga que trabaja para una gran compañía de transporte y que debe descargar de un camión una caja enorme y frágil usando una rampa como la que se muestra en la figura. Si la velocidad vertical con que llega la caja al final de la rampa es superior a 2,5 m/s, su carga se daña. ¿Cuál es el mayor ángulo posible al que se puede instalar la rampa para conseguir una descarga segura? La rampa debe superar un metro de altura, está formada por rodillos (se puede suponer que no ejerce rozamiento) y está inclinada con la horizontal un ángulo θ.
Nota: por vertical se quiere decir hacia abajo, hacia el centro de la Tierra.

Solución:



Dibujamos el diagrama de fuerzas, como se muestra en la figura, donde vemos que actúan dos fuerzas, el peso y la normal. Elegimos la dirección de la aceleración en la dirección de la rampa hacia abajo como dirección $+x$.
Como se ve en el diagrama, el ángulo entre la fuerza de la gravedad $\vec{F}_g$ y el sentido negativo del eje y es el mismo que el ángulo entre la pendiente de la rampa y la horizontal. También se puede ver que $F_{gx} = F_g \sin\theta$.

Para determinar a_x aplicamos a la caja la segunda ley de Newton. Tenemos en cuenta que la normal $\vec{F}_n$ es perpendicular al eje x y $F_g = mg$:

$$F_{nx} + F_{gx} = m a_x, \quad \text{donde}$$
$$F_{nx} = 0 \quad \text{y} \quad F_{gx} = F_g \sin\theta = mg\sin\theta.$$

Se substituye y se despeja la aceleración, obteniendo

$$0 + mg\sin\theta = m a_x \quad \text{por lo que} \quad a_x = g\sin\theta.$$

Se establece una relación entre la componente vertical de la velocidad de la caja (v_v) y la velocidad v_x a lo largo de la rampa,

$$v_v = v_x \sin\theta.$$

La velocidad está relacionada con el desplazamiento Δx a lo largo de la rampa mediante la siguiente ecuación cinemática:

$$v_x^2 = v_{0,x}^2 + 2a_x\Delta x.$$

Se sustituye a_x en la ecuación (1), haciendo $v_0 = 0$, con lo cual,

$$v_x^2 = 2g\sin\theta\Delta x.$$

De la figura se ve que cuando Δx es la longitud de la rampa, $\Delta x \sin\theta = h$, donde h es la altura de la rampa. Así,

$$v_x^2 = 2gh.$$

Mediante el uso de $v_v = v_x \sin\theta$, se obtiene para v_v:

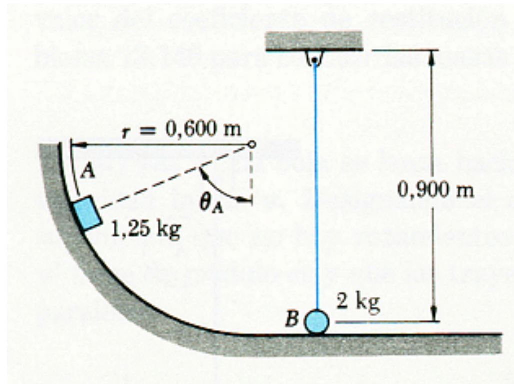
$$v_v = \sqrt{2gh}\sin\theta.$$

Sustituyendo datos para el ángulo máximo:

$$2{,}50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \sqrt{2\left(9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(1{,}00\,\mathrm{m})}\,\sin\theta_{\max},$$

Y, por lo tanto, $\theta_{\max} = 34{,}4^\circ$.

Problema 2 (Segundo parcial): Se deja en libertad un bloque A cuando $\theta_A = 90^\circ$ y desliza sin rozamiento, hasta chocar con la bola B. Suponemos que la bola B no apoya sobre la superficie, de modo que la fuerza normal es que ejerce la superficie sobre ella es cero. Sabiendo que el coeficiente de restitución en el choque es $e = 0.90$, calcular:



(a) Las velocidades de A y B inmendiatamente después del choque.
(b) La máxima tensión que soporta el hilo que sostiene B.
(c) La altura máxima a la que se eleva B.
(d) La energía perdida en el choque.

Notas: Tomad $g = 9.80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

El coeficiente de restitución se define como $e = -\dfrac{v'_B - v'_A}{v_B - v_A}$

Solución:

(a) Aplicando la ley de conservación de la energía, podemos calcular la velocidad con la que el bloque A impacta con la bola B. Tomamos como cero de energía potencial gravitatoria la posición del suelo. Entonces,

$$m_A g\, r = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \quad \Rightarrow \quad v_A = \sqrt{2\, g\, r} = 3.43 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Durante el choque, aplicaremos la ley de conservación del momento lineal y la definición del coeficiente de restitución. Supondemos el sentido positivo de velocidades hacia la derecha, y denotaremos las velocidades antes del choque sin primas y las velocidades después del choque con primas.

$$\left.\begin{array}{lll} m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B & \Rightarrow & m_A v_A = m_A v'_A + m_B v'_B \\ e = -\dfrac{v'_B - v'_A}{v_B - v_A} & \Rightarrow & e = \dfrac{v'_B - v'_A}{v_A} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v'_A = \dfrac{m_A - e\, m_B}{m_A + m_B} v_A = -0.58 \, \dfrac{\text{m}}{\text{s}} \\ v'_B = \dfrac{(1+e) m_A}{m_A + m_B} v_A = 2.51 \, \dfrac{\text{m}}{\text{s}} \end{array}\right.$$

Vemos que el bloque A retrocede hacia la izquierda después del choque.

(b) La máxima tensión en la cuerda se produce cuando B se encuentra en el punto más bajo (justo después del choque). En ese momento, la velocidad de B es máxima, y por lo tanto tiene una mayor aceleración normal (también llamada aceleración radial en algunos textos). Recordemos que esta aceleración va siempre dirigida hacia el centro del círculo y tiene por módulo ${v_B'^2}/{L}$. Esta aceleración tiene que ser producida por la tensión menos la componente del peso a lo largo de la dirección y, que en esa situación es máxima. Si tomamos sentido positivo del eje y hacia arriba, entonces

$$T - m_B g = m_B \frac{v_B'^2}{L} \quad \Rightarrow \quad T = m_B g + m_B \frac{v_B'^2}{L} = 33.6 \text{ N}.$$

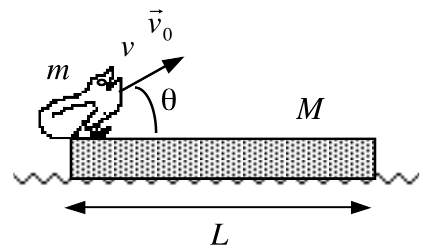
(c) Aplicando la ley de conservación de la energía entre la posición inicial, justo después del choque, y la posición final cuando ha ascendido una altura h,

$$\frac{1}{2} m_B v_B'^2 = m_B g\, h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v_B'^2}{2g} = 0.32 \text{ m}.$$

(d) La variación de energía producida en el choque será

$$\left(\frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m_A v_A^2 \right) = 0.86 \text{ J}$$

Problema 3 (Segundo parcial): Una rana de masa m está situada en el extremo de una tabla recta de masa M y longitud L. La tabla se encuentra en reposo y flotando sobre las aguas tranquilas de un estanque. La rana da un salto a lo largo de la tabla con un ángulo de elevación θ sobre la horizontal. Si la rana cae en el otro extremo de la tabla, calcular:
(a) el espacio horizontal recorrido por la rana,
(b) el módulo de la velocidad inicial v_0.



<u>Nota</u>: **se desprecia el rozamiento entre la tabla y el agua, y se considera a la rana como una masa puntual.**
Para la realización de este problema, considerad el sistema formado por la rana y la tabla.

Solución:

(a) Consideraremos el sistema formado por la rana y la tabla. Sobre el sistema solo actúa una fuerza externa (la que ejerce el agua del estanque), que lleva una dirección vertical. Todas las demás fuerzas son internas al sistema. Como las fuerzas exteriores no tienen componente a lo largo de la dirección horizontal, el momento total del sistema a lo largo de esa dirección se conserva.

Cuando la rana salta, por conservación del momento lineal horizontal, la tabla se mueve ligeramente hacia atrás. Debido a ello si la rana cae en el otro extremo de la tabla no habrá recorrido horizontalmente una distancia L, sino una distancia d más pequeña. En todo caso, como el centro de masas (C.M.) del sistema rana-tabla se encontraba inicialmente en reposo en la situación final se encontrará en la misma posición. Si colocamos el origen de coordenadas en la posición inicial de la rana:

Inicialmente: $x_{\text{rana}} = 0$, $\quad x_{\text{tabla}} = \dfrac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad x_{\text{C.M.}} = \dfrac{m x_{\text{rana}} + M x_{\text{tabla}}}{m+M} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M}{m+M}\right)L,$

Finalmente: $x'_{\text{rana}} = d$, $\quad x'_{\text{tabla}} = d - \dfrac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad x'_{\text{C.M.}} = \dfrac{m x'_{\text{rana}} + M x'_{\text{tabla}}}{m+M} = \dfrac{m d + M\left(d - \frac{L}{2}\right)}{m+M}.$

Igualando los dos resultados:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{M}{m+M}\right)L = \frac{m d + M\left(d - \frac{L}{2}\right)}{m+M} \quad \Rightarrow \quad d = \left(\frac{M}{m+M}\right)L$$

(b) La trayectoria de la rana se corresponde con la de un tiro parabólico cuyo alcance máximo es d y cuyo ángulo inicial de lanzamiento es θ. A partir de la expresión del punto de máximo alcance, podemos calcular el módulo de la velocidad en el instante del salto, v_0.

$$d = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{d\,g}{\sin(2\theta)}}.$$