Examen de Física-1, 1° del Grado en Ingeniería Química
Examen final. Septiembre de 2012
Cuestiones (Un punto por cuestión).

Cuestión 1 (Primer parcial): Un trineo se deliza por una superficie horizontal cubierta de nieve con una velocidad inicial de 4 m/s. Si el coeficiente de rozamiento entre el trineo y la nieve es 0,14, ¿qué distancia recorrerá hasta alcanzar el reposo?

Solución:

En la configuración inicial, toda la energía mecánica es cinética,

$$E_{\text{inicial}}^{\text{mecánica}} = K_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} m v_{\text{inicial}}^2 .$$

En la configuración final, el trineo está en reposo por lo que la energía mecánica del sistema se anula,

$$E_{\text{final}}^{\text{mecánica}} = 0.$$

La variación en la energía mecánica se corresponde con el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento entre el trineo y la nieve,

$$\Delta E^{\text{mecánica}} = E_{\text{final}}^{\text{mecánica}} - E_{\text{inicial}}^{\text{mecánica}} = W_{\text{rozamiento}} .$$

Este trabajo vendrá dado por el producto escalar de la fuerza de rozamiento por el desplazamiento del punto de aplicación. Tenemos que tener en cuenta que el ángulo que forman fuerza y desplazamiento en este caso es de 180°, con lo que

$$W_{\text{rozamiento}} = F_{\text{rozamiento}}\, \Delta x \cos 180^\circ = -\mu_{\text{c}} N\, \Delta x = -\mu_{\text{c}} m g\, \Delta x.$$

Por lo tanto,

$$-\frac{1}{2} m v_{\text{inicial}}^2 = -\mu_{\text{c}} m g\, \Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{v_{\text{inicial}}^2}{2\mu_{\text{c}} g} = 5{,}8 m$$

Cuestión 2 (Primer parcial): Un cuerpo inicialmente en reposo ($\theta_0 = 0, \omega_0 = 0,$ en $t_0 = 0$) es acelerado en una trayectoria circular de radio 1.3 m de acuerdo con la ecuación $\alpha = 120t^2 - 48t + 16$ (todo en unidades del SI) . Hallad:

(a) **La velocidad angular en función del tiempo,**
(b) **La posición angular como función del tiempo,**
(c) **Las componentes tangencial y normal de la aceleración**

Solución:

(a) Integrando la aceleración angular teniendo en cuenta las condiciones iniciales:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\omega = \alpha\, dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \int_0^t \left(120t^2 - 48t + 16\right) dt = 40t^3 - 24t^2 + 16t.$$

(b) Integrando ahora la velocidad angular:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\theta = \omega\, dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\theta} d\theta = \int_0^t \omega\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \int_0^t \left(40t^3 - 24t^2 + 16t\right) dt = 10t^4 - 8t^3 + 8t^2.$$

(c) Las componentes intrínsecas de la aceleración vendrán dadas por:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\omega\right) = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha = 1.3\left(120t^2 - 48t + 16\right),$$

$$a_r = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2 = 1.3\left(40t^3 - 24t^2 + 16t\right)^2.$$

(Como se indica en el enunciado las unidades utilizadas en el problema son las del SI).

Cuestión 3 (Segundo parcial): Un bloque descansa sobre un tablero de mesa que realiza un movimiento armónico simple de amplitud A y periodo T.

(a) Si la oscilación es vertical ¿cuál es el valor máximo de A que permitirá al bloque permanecer siempre en contacto con la mesa?
(b) Si la oscilación es horizontal y el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la mesa es μ, ¿cuál es el máximo valor de A para que el bloque no deslice?

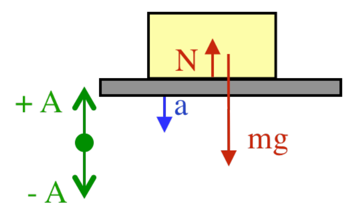
Solución:

(a) En un movimiento armónico simple,

$$x = A\cos(\omega t),$$
$$v = -A\omega\sin(\omega t),$$
$$a = -A\omega^2\cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad a_{\max} = A\omega^2.$$

En la parte superior de la oscilación, aplicando la segunda ley de Newton, y tomando como sentido positivo del eje y hacia arriba,

$$-mg + N = -ma \quad \Rightarrow \quad N = m(g-a).$$

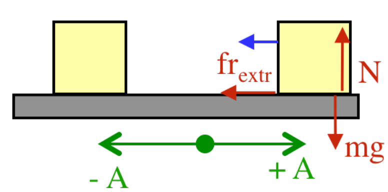


En esa parte (en la parte superior de la oscilación), la $a = a_{\max}$. La condición de contacto entre el bloque y la mesa es que la normal sea mayor o igual que cero.

$$N \geq 0 \quad \Rightarrow \quad g - a_{\max} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad g - A\omega^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad A \leq \frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} = \frac{gT^2}{4\pi^2}.$$

(b) La fuerza que produce la aceleración es la fuerza de rozamiento,

$$f_{\text{roz}} = ma = m\left[-A\omega^2\cos(\omega t)\right].$$



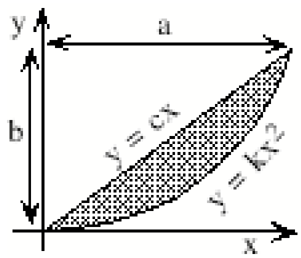
Esta fuerza tiene valor máximo en los extremos de la trayectoria,

$$f_{\mathrm{roz}}^{\mathrm{extremos}} = m A\omega^2 .$$

Además, la fuerza de rozamiento siempre tiene que ser menor que la fuerza de rozamiento máxima, $f_{\mathrm{roz}}^{\mathrm{max}} = \mu N$, con lo que

$$f_{\mathrm{roz}}^{\mathrm{extremos}} \le f_{\mathrm{roz}}^{\mathrm{max}} \quad \Rightarrow \quad m A\omega^2 \le \mu m g \quad \Rightarrow \quad A \le \frac{\mu g}{\omega^2} = \frac{\mu g}{\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2} = \frac{\mu g T^2}{4\pi^2} .$$

Cuestión 4 (segundo parcial): Determinar el centro de gravedad de la placa de la figura. Suponed que la superficie es homogénea.



Solución:

Recordando la definición de centro de masas de una superficie homogénea, $x_{\mathrm{CM}} = \dfrac{\int x\,da}{\int da}$, y teniendo en cuenta que $da = dx\,dy$, donde este diferencial de área se integra en el área sombreada delimitada por una recta y una parábola de coeficientes $c = \dfrac{b}{a}$ y $k = \dfrac{b}{a^2}$ respectivamente, llegamos a la ecuación de partida,

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_0^a x\,dx \int_{kx^2}^{cx} dy}{\int_0^a dx \int_{kx^2}^{cx} dy} = \frac{\int_0^a x\,dx\left(y\big|_{kx^2}^{cx}\right)}{\int_0^a dx\left(y\big|_{kx^2}^{cx}\right)} = \frac{\int_0^a x\left(cx-kx^2\right)dx}{\int_0^a \left(cx-kx^2\right)dx}, \qquad (1)$$

donde primero hemos integrado dy entre la parábola $\left(kx^2\right)$ y la recta (cx) y posteriormente integraremos la variable x entre 0 y a. Ahora solo nos queda por terminar la integración de la Ec. (1)

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{\int_0^a x\left(cx-kx^2\right)dx}{\int_0^a \left(cx-kx^2\right)dx} = \frac{\int_0^a \left(cx^2-kx^3\right)dx}{\int_0^a \left(cx-kx^2\right)dx} = \frac{\left(\frac{cx^3}{3}\Big|_0^a\right)-\left(\frac{kx^4}{4}\Big|_0^a\right)}{\left(\frac{cx^2}{2}\Big|_0^a\right)-\left(\frac{kx^3}{3}\Big|_0^a\right)} = \frac{c\frac{a^3}{3}-k\frac{a^4}{4}}{c\frac{a^2}{2}-k\frac{a^3}{3}}$$

$$= \frac{\frac{b}{a}\frac{a^3}{3}-\frac{b}{a^2}\frac{a^4}{4}}{\frac{b}{a}\frac{a^2}{2}-\frac{b}{a^2}\frac{a^3}{3}} = \frac{ba^2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)}{ba\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{ba^2}{12}}{\frac{ba}{6}} = \frac{1}{2}a.$$

Procediendo de manera análoga para la coordenada y,

$$y_{\text{CM}} = \frac{\iint y\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_0^a dx \int_{kx^2}^{cx} y\,dy}{\int_0^a dx \int_{kx^2}^{cx} dy} = \frac{\int_0^a dx \left(\left. \frac{y^2}{2} \right|_{kx^2}^{cx} \right)}{\int_0^a dx \left(\left. y \right|_{kx^2}^{cx} \right)} = \frac{\int_0^a \frac{\left(c^2x^2 - k^2x^4\right)}{2}}{\int_0^a \left(cx - kx^2\right) dx}$$

$$= \frac{\left(\left. \frac{c^2}{2}\frac{x^3}{3} \right|_0^a \right) - \left(\left. \frac{k^2}{2}\frac{x^5}{5} \right|_0^a \right)}{\left(\left. \frac{cx^2}{2} \right|_0^a \right) - \left(\left. \frac{kx^3}{3} \right|_0^a \right)} = \frac{\frac{c^2}{2}\frac{a^3}{3} - \frac{k^2}{2}\frac{a^5}{5}}{c\frac{a^2}{2} - k\frac{a^3}{3}}$$

$$= \frac{\frac{b^2}{2a^2}\frac{a^3}{3} - \frac{b^2}{2a^4}\frac{a^5}{5}}{\frac{b}{a}\frac{a^2}{2} - \frac{b}{a^2}\frac{a^3}{3}} = \frac{b^2a\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right)}{ba\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{2}{30}b^2a}{\frac{ba}{6}} = \frac{2}{5}b = 0.4\,b$$