Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Septiembre de 2011
Problemas (Dos puntos por problema).

Problema 1 (Primer parcial): Una lancha de masa m navega en un lago con velocidad v_0. En el instante $t=0$ se desconecta el motor. Suponiendo que la fuerza de resistencia del agua al movimiento de la lancha es proporcional a la velocidad $\vec{f}_r = -k\vec{v}$, determinar:

(a) La velocidad en función del tiempo.
(b) Su velocidad en función de la distancia recorrida, así como la distancia recorrida hasta su parada.
(c) La velocidad media de la lancha en el transcurso del tiempo en el que la velocidad disminuye desde v_0 hasta $v_0/2$.

Si viajamos en una lancha cuyo peso total, incluidos los pasajeros, es de 400 kg a una velocidad $v_0 = 10\,\text{m/s}$ y comprobamos que para llegar al embarcadero con velocidad cero, tenemos que apagar el motor 20 m antes,

(d) ¿Cuánto vale k?. Utiliza las ecuaciones obtenidas en los apartados anteriores.

Solución:

(a) Al desconectar el motor la única fuerza que actúa es la fuerza de rozamiento que se opone al movimiento, $\vec{f}_r = -k\vec{v}$. Aplicando la segunda ley de Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ y teniendo en cuenta que el movimiento se reduce a una dimensión

$$\sum F = ma \quad \Rightarrow \quad -kv = m\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad -\frac{k}{m}dt = \frac{dv}{v}. \qquad (1)$$

Integrando la Ecuación (1),

$$\ln v = -\frac{k}{m}t + c_1, \qquad (2)$$

donde c_1 es una constante de integración. Imponiendo que para $t=0$, $v=v_0$, entonces

$$\ln v_0 = c_1. \qquad (3)$$

Sustituyendo la Ecuación (3) en la Ecuación (2),

$$\ln v = -\frac{k}{m}t + \ln v_0 \quad \Rightarrow \quad \ln v - \ln v_0 = -\frac{k}{m}t \quad \Rightarrow \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{k}{m}t.$$

$$\frac{v}{v_0} = e^{-(k/m)t} \quad \Rightarrow \quad v = v_0\, e^{-(k/m)t}.$$

(b) Para encontrar la relación entre la velocidad y la distancia, partimos de nuevo de la segunda ley de Newton, pero expresando la aceleración en función de $d\,x$

$$\sum F = m\,a \quad \Rightarrow \quad -k\,v = m\frac{d\,v}{d\,t} \quad \Rightarrow \quad -k\,v = m\frac{d\,v}{d\,x}\frac{d\,x}{d\,t} \quad \Rightarrow \quad -k\,v = m\frac{d\,v}{d\,x}v \quad \Rightarrow \quad -\frac{k}{m}d\,x = d\,v.$$

Integrando la Ecuación (4),

$$v = -\frac{k}{m}x + c_2, \qquad (5)$$

donde c_2 es una constante de integración. Imponiendo que para $x = 0, v = v_0$, entonces

$$c_2 = v_0. \qquad (6)$$

Sustituyendo la Ecuación (6) en la ecuación (5)

$$v = v_0 - \frac{k}{m}x.$$

Cuando la barca se detiene, la velocidad final vale cero, por lo que sustituyendo este valor en v encontramos el espacio recorrido $x_{\max}$,

$$0 = v_0 - \frac{k}{m}x_{\max} \quad \Rightarrow \quad x_{\max} = \frac{m\,v_0}{k}. \qquad (7)$$

(c) Primero determinamos el tiempo T que tarda en pasar de v_0 a $v_0/2$, y el espacio X recorrido durante dicho intervalo.

Partiendo de la solución del apartado (a),

$$\frac{v_0}{2} = v_0 e^{-(k/m)T} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{k}{m}\right)T \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{m}{k}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{m}{k}\ln 2.$$

Partiendo de la solución del apartado (b),

$$\frac{v_0}{2} = v_0 - \frac{k}{m}X \quad \Rightarrow \quad \frac{v_0}{2} = \frac{k}{m}X \quad \Rightarrow \quad X = \frac{m v_0}{2k}.$$

La velocidad media será el espacio recorrido dividido por el tiempo que tarda en recorrer dicho espacio

$$V_{\mathrm{m}} = \frac{X}{T} = \frac{\dfrac{m v_0}{2k}}{\dfrac{m}{k}\ln 2} = \frac{v_0}{2\ln 2} = 0,7213\ v_0.$$

(d) Utilizando la Ecuación (7) y despejando el valor de k,

$$k = \frac{m v_0}{x_{\max}} = \frac{400 \times 10}{20}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} = 200\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}.$$

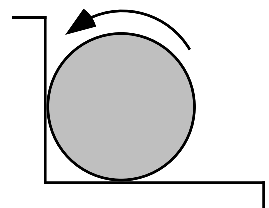
Problema 2 (Segundo parcial): Disponemos de una esfera inhomogénea de radio R, masa M, y densidad volúmica $\rho(r) = c\,r$, donde c es una constante y r es la distancia radial al centro de la esfera.

(a) Determinar la masa de la esfera en función de R y c.

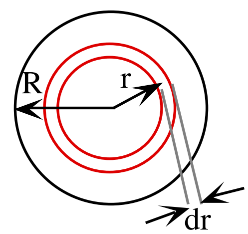
(b) Calcular el momento de inercia, respecto de un eje que pase por su centro (expresar el resultado en función de M y R).

Recordar que $\int\left(y^2+z^2\right)dm + \int\left(x^2+z^2\right)dm + \int\left(x^2+y^2\right)dm = 2\int\left(x^2+y^2+z^2\right)dm$

Si a dicha esfera se la hace girar con una velocidad ω_0 y después se coloca en una esquina (ver figura), sabiendo que el coeficiente de rozamiento con la pared y con el suelo es μ, calcular, expresándolo de la forma más simple posible, el valor de todas las fuerzas que actúan sobre la esfera.



Solución:



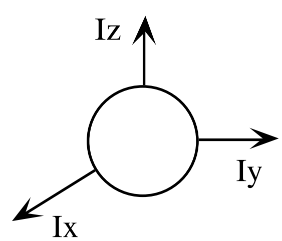
(a) Como la densidad depende de la distancia al centro de la esfera (simetría esférica), tomamos un dm encerrado en una corteza esférica de radio r y espesor dr, ya que en dicho volumen la densidad será la misma

$$dV = 4\pi r^2 dr \quad \Rightarrow \quad dm = \rho\, dV = \rho 4\pi r^2 dr = cr4\pi r^2 dr = 4\pi c\, r^3 dr \qquad (1)$$

Integrando la Ecuación (1)

$$M = \int_0^R 4\pi\, cr^3\, dr = 4\pi c \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R \quad \Rightarrow \quad M = \pi c R^4.$$

(b) La densidad no es constante, y por lo tanto no podemos considerar la esfera como una suma de discos, ya que no sabemos cuánto vale el momento de inercia de cada disco (dentro de cada disco la densidad va variando). Como la densidad depende de la distancia al centro, al igual que para la masa, las regiones en las que la densidad es constante son cortezas esféricas, por lo que tenemos que relacionar el momento de inercia con una integral de dm situadas en cortezas.



Por simetría, $I_x = I_y = I_z = I$. Además

$$I_x = \int (y^2+z^2)\,dm, \quad I_y = \int\left(x^2+z^2\right)dm, \quad \text{e} \quad I_z = \int\left(x^2+y^2\right)dm.$$

Aplicando la relación

$$\int \left(y^2+z^2\right)dm+\int \left(x^2+z^2\right)dm+\int \left(x^2+y^2\right)dm=2\int \left(x^2+y^2+z^2\right)dm=2\int r^2\,dm,$$

vemos que

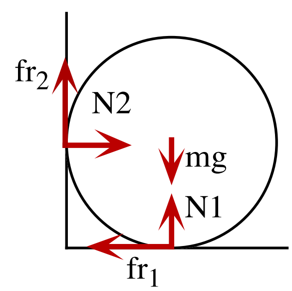
$$3I=2\int r^2\,dm \quad \Rightarrow \quad I=\frac{2}{3}\int r^2\,dm.$$

Tomamos un dm igual que para el cálculo de la masa, por lo que el momento de inercia será

$$I=\frac{2}{3}\int r^2\,dm=\frac{2}{3}\int_0^R r^2\,4\pi c\,r^3\,dr=\frac{2}{3}\int_0^R 4\pi c\,r^5\,dr=\frac{2}{3}4\pi c\left.\frac{r^6}{6}\right|_0^R=\frac{4}{9}\pi cR^6$$

$$I=\frac{4}{9}\pi c\,R^4R^2 \quad \Rightarrow \quad I=\frac{4}{9}MR^2.$$

(c) En la figura se muestran las fuerzas que actúan sobre la esfera. Como el centro de masas no se desplaza, la suma de todas esas fuerzas debe anularse, $\sum \vec{F}=0$.



$$\sum F_x=0 \quad \Rightarrow \quad N_2-fr_1=0 \qquad (2)$$
$$\sum F_y=0 \quad \Rightarrow \quad N_1+fr_2-mg=0 \qquad (3)$$

Además, como hay desplazamiento, actúa la fuerza de rozamiento máxima $\mu N \quad \Rightarrow \quad fr_1=\mu N_1,\ fr_2=\mu N_2$.
Sustituyendo estos valores en las ecuaciones anteriores,

(1) $\Rightarrow$ $N_2-\mu N_1=0$,
(2) $\Rightarrow$ $N_1+\mu N_2-mg=0$.

De la primera ecuación despejamos el valor de N_2, $N_2=\mu N_1$, y lo introducimos en la segunda

$$N_1+\mu\,\mu N_1-mg=0 \quad \Rightarrow \quad N_1\left(1+\mu^2\right)=mg \quad \Rightarrow \quad N_1=\frac{mg}{\left(1+\mu^2\right)}.$$

Y sustituyendo este valor en $N_2,\ fr_1,\ fr_2$

$$N_2 = \frac{mg\mu}{\left(1+\mu^2\right)},$$

$$fr_1 = \frac{mg\mu}{\left(1+\mu^2\right)},$$

$$fr_2 = \frac{mg\mu^2}{\left(1+\mu^2\right)}.$$

Problema 3 (Segundo parcial): Un vehículo espacial de 200 kg pasa para $t = 0$ por el origen de coordenadas de un sistema de referencia inercial *Oxyz* con velocidad $\vec{v}_0 = 150\,\vec{i}$ m/s relativa al sistema. Tras la detonación de unas cargas explosivas, el vehículo se separa en tres partes A, B, y C de masas 100, 60, y 40 kg respectivamente. Sabiendo que para $t = 2{,}5$ s las posiciones de las partes A y B son respectivamente (555, -180, 240) y (255, 0, -120) donde las coordenadas se expresan en m, determinar la posición de la parte C en ese instante.

Solución:

Todas las fuerzas implicadas en la explosión son internas al sistema. Como no hay fuerzas externas, la aceleración del centro de masas se anula,

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{CM}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{\text{CM}} = 0.$$

Por otra parte

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{\text{tot}} \text{ se conserva},$$

donde $\vec{p}_{\text{tot}}$ para un sistema de n partículas se define como

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i .$$

Antes de la explosión, solo teníamos una partícula, con lo que el momento total del sistema vale

$$\vec{p}_{\text{tot}}^{\,\text{inicial}} = 200 \text{ kg} \times 150\,\vec{i} \text{ m/s} = 3\times 10^4\,\vec{i} \text{ kg m/s}.$$

Después de la explosión, podemos considerar que no actúan fuerzas sobre las partes A, B, y C, por lo que su velocidad se puede considerar constante. Si consideramos que el vehículo explosiona en el origen de coordenadas, podemos calcular la velocidad y el momento de cada uno de los fragmentos por separado

<u>Fragmento A:</u>

Masa: $m_{\text{A}} = 100$ kg.

Velocidad: $\vec{v}_{\text{A}} = \left(\dfrac{555}{2{,}5}, \dfrac{-180}{2{,}5}, \dfrac{240}{2{,}5}\right)\dfrac{\text{m}}{\text{s}} = (222, -72, 96)\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}.$

Momento: $\vec{p}_{\text{A}} = m_{\text{A}}\vec{v}_{\text{A}} = 100 \text{ kg} \times (222, -72, 96)\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} = (22200, -7200, 9600)\,\dfrac{\text{kg m}}{\text{s}}.$

Fragmento B:

Masa: $m_B = 60$ kg.

Velocidad: $\vec{v}_B = \left(\frac{255}{2,5}, \frac{0}{2,5}, \frac{-120}{2,5}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}} = (102, 0, -48)\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Momento: $\vec{p}_B = m_B\vec{v}_B = 60\text{ kg} \times (102, 0, -48)\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = (6120, 0, -2880)\,\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$.

Fragmento C:

Masa: $m_C = 40$ kg.

Velocidad: $\vec{v}_C = (v_{Cx}, v_{Cy}, v_{Cz})\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Momento: $\vec{p}_C = m_C\vec{v}_C = 40\text{ kg} \times (v_{Cx}, v_{Cy}, v_{Cz})\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = (40\,v_{Cx}, 40\,v_{Cy}, 40\,v_{Cz})\,\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$.

El momento total del sistema después de la explosión será entonces

$$\vec{p}_{\text{total}}^{\text{final}} = \vec{p}_A + \vec{p}_B + \vec{p}_C = (28320 + 40\,v_{Cx}, -7200 + 40\,v_{Cy},\ 6720 + 40\,v_{Cz})\frac{\text{kg m}}{\text{s}}.$$

Como el momento total se tiene que conservar, igualando los momentos del sistema antes y después de la explosión llegamos a las siguientes ecuaciones

$$30000 = 28320 + 40\,v_{Cx} \quad \Rightarrow \quad v_{Cx} = 42\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$0 = -7200 + 40\,v_{Cy} \quad \Rightarrow \quad v_{Cy} = 180\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$0 = 6720 + 40\,v_{Cz} \quad \Rightarrow \quad v_{Cz} = -168\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Por último, conociendo la velocidad de la partícula C, y sabiendo que ésta permanece constante tras la explosión, podemos conocer su posición al cabo de 2,5 s

$$x_C = 2,5 \times 42\text{ m} = 105\text{ m},$$
$$y_C = 2,5 \times 180\text{ m} = 450\text{ m},$$
$$z_C = 2,5 \times (-168)\text{ m} = -420\text{ m}.$$