Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Febrero de 2023
Problemas (Dos puntos por problema).

Problema 1. Un automóvil parte del reposo en una vía circular de 400 m de radio y se mueve con un movimiento uniformemente acelerado hasta que, a los 50 segundos de iniciada la marcha, alcanza una velocidad cuyo módulo vale 72 km/hora. A partir de ese momento se conserva el módulo de la velocidad. Calculad:
(a) El módulo de la aceleración tangencial y el módulo de la aceleración angular en la primera etapa del movimiento. (0,5 puntos).
(b) El módulo de la aceleración normal, el módulo de la aceleración total (ambas a los 50 s de iniciado el movimiento), el ángulo total barrido y la longitud recorrida durante los primeros 50 s. (0,5 puntos).
(c) El módulo de la velocidad angular media en la primera etapa y el módulo de la velocidad angular instantánea a los 50 s. (0,5 puntos)
(d) El tiempo que tarda el automóvil en dar 100 vueltas al circuito. (0,5 puntos)

Solución:
(a) El módulo de la velocidad va aumentando de manera constante durante los primeros 50 s. Por lo tanto,

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{dv}{dt} = \frac{20\ \mathrm{m/s}}{50\ \mathrm{s}} = 0.4\ \mathrm{m/s^2}.$$

El módulo de la aceleración angular puede calcularse a partir de

$$\alpha = \frac{a_{\mathrm{t}}}{r} = \frac{0.4\ \mathrm{m/s^2}}{400\ \mathrm{m}} = 0.001\ \mathrm{rad/s^2}.$$

(b) El módulo de la aceleración normal viene determinado por

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{r} = \frac{(20\ \mathrm{m/s})^2}{400\ \mathrm{m}} = 1\ \mathrm{m/s^2}.$$

El módulo de la aceleración total puede calcularse a partir de

$$a = \sqrt{a_{\mathrm{t}}^2 + a_{\mathrm{n}}^2} = 1.08\ \mathrm{m/s^2}.$$

Como estamos hablando de un movimiento circular, uniformemente acelerado, con ángulo inicial y velocidad angular inicial cero, entonces, el ángulo total barrido por el automóvil es

$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 = 1.25\ \mathrm{rad},$$

y, por lo tanto, la distancia recorrida toma el valor de

$$l = r\varphi = 500 \text{ m}.$$

(c) La velocidad angular media vendrá dada por

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{1{,}25 \text{ rad}}{50 \text{ s}} = 0.025 \text{ rad/s}.$$

El módulo de la velocidad angular instantánea puede calcularse de dos maneras distintas:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{20 \text{ m/s}}{400 \text{ m}} = 0.05 \text{ rad/s}.$$

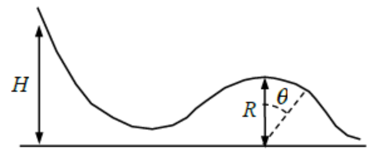
$$\omega = \alpha t = 0.001 \times 50 \text{ rad/s} = 0.05 \text{ rad/s}.$$

(d) Cien vueltas al circuito se corresponden con 200π radianes. Durante los primeros 50 segundos, mientras el automóvil mantenía un movimiento circular uniformemente acelerado, ha recorrido 1.25 radianes. Por lo tanto, le quedan por barrer (200π -1.25) radianes. Esto lo hará con una velocidad angular constante. Por lo tanto,

$$t_2 = \frac{(200\pi - 1.25) \text{ rad}}{0.05 \text{ rad/s}} = 100.66 \text{ s}.$$

Así que el tiempo total que tarda en dar las cien vueltas será de 150.66 s.

Problema 2: Un esquiador inicia desde el reposo un descenso de altura $\boldsymbol{H}$ respecto al centro de una colina circular de radio $\boldsymbol{R}$. Suponiendo despreciable el rozamiento, calcular:



(a) el valor máximo de $\boldsymbol{H}$ para el cual el esquiador permanece en contacto con la nieve en la parte superior de la colina (0,6 puntos).

Si ahora el esquiador inicia el descenso de la parte superior de la colina $\boldsymbol{H}$ con una velocidad inicial pequeña $\boldsymbol{v_0}$, calcular:

(b) su velocidad en función del ángulo $\boldsymbol{\theta}$ (0,4 puntos).

(c) el valor del ángulo para el cual pierde el contacto de los esquíes con la pendiente (1,0 punto).

Solución:

(a) Cuando el esquiador se encuentre en la parte superior de la colina, sobre el mismo estarán actuando dos fuerzas: el peso (dirección vertical y sentido hacia abajo) y la normal (dirección vertical y sentido hacia arriba).

Escogemos un sistema de ejes tal que el eje x es horizontal (sentido positivo hacia la derecha) y el eje y es vertical (sentido positivo hacia arriba).

Si descomponemos las fuerzas en las direcciones de los ejes y aplicamos la segunda ley de Newton

$$\sum F_y = N - mg = -m\frac{v^2}{R}.$$

El esquiador perderá el contacto con el suelo cuando la normal se anule, y esto ocurrirá cuando el módulo de la velocidad en la parte alta de la colina tome el valor límite de

$$mg = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{Rg}.$$

Pero podemos calcular el valor del módulo de la velocidad con la que el esquiador llega a lo alto de la colina. Como no hay rozamiento, la energía mecánica inicial (cuando sale de una altura H tiene que ser igual a la energía mecánica cuando llega a lo alto de la colina. Por lo tanto,

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 + mgR \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = 2g(H - R).$$

De esta forma, la altura H necesaria para que el esquiador llegue a lo alto de la colina con la velocidad límite $v = \sqrt{Rg}$ es

$$Rg = 2g(H - R) \qquad \Rightarrow \qquad H = \frac{3}{2}R.$$

(b) De nuevo, por conservación de la energía, la energía mecánica cuando el esquiador se encuentre en la parte superior de la colina tiene que preservarse según vaya descendiendo con un ángulo θ,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgH = \frac{1}{2}mv_\theta^2 + mgR\cos\theta,$$

$$v_\theta^2 = v_0^2 + 2g(H - R\cos\theta).$$

(c) Cuando la partícula se encuentre formando un ángulo θ con la vertical, sobre ella actuarán dos fuerzas: la normal y el peso. Escogemos ahora un sistema de ejes en el cual el eje x sea tangente a la trayectoria y el eje y vaya en la dirección radial (sentido positivo hacia fuera). Si descomponemos las fuerzas en esta dirección y aplicando la segunda ley de Newton,

$$\sum F_y = N - mg\cos\theta = -m\frac{v_\theta^2}{R}.$$

De nuevo el caso límite para que el esquiador esté en contacto con la colina es que $N = 0$. En este caso límite

$$mg\cos\theta = m\frac{v_\theta^2}{R} \quad \Rightarrow \quad Rg\cos\theta = v_\theta^2 = v_0^2 + 2g(H - R\cos\theta),$$

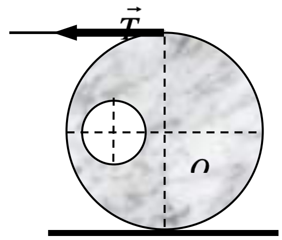
$$3gR\cos\theta = v_0^2 + 2gH,$$

$$\cos\theta = \frac{v_0^2 + 2gH}{3gR}.$$

Si la velocidad inicial es pequeña, este resultado podemos aproximarlo por

$$\cos\theta \approx \frac{2H}{3R}.$$

Problema 3: El cilindro uniforme de radio *a* de la figura pesaba en un principio 80 N. Después de taladrársele un agujero cilíndrico de eje paralelo al anterior su peso es de 75 N. (a) Determinar el radio del agujero. (b) Suponiendo que el cilindro no desliza sobre la mesa ¿Cuál debe ser la tensión de la cuerda que le impida moverse en la situación representada?. (c) Determinar el coeficiente de rozamiento mínimo para que no deslice. $\overline{OO'} = \frac{2}{3}a$ **.**



Problema propuesto en el segundo parcial de Enero de 2013

Solución:

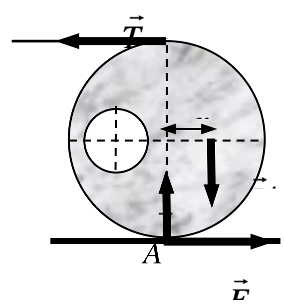
(a) Llamemos P y P' al peso del cilindro antes y después de hacerle el agujero. Llamemos r al radio del agujero, H a la altura del cilindro y ρ a su densidad. Con los datos que nos dan en el enunciado podemos calcular r:

$$P' = \left[\left(\pi a^2 - \pi r^2\right)H\rho\right]g = \pi a^2 H\rho g\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right) = P\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad r = a\sqrt{1-\frac{P'}{P}} = \frac{a}{4}$$

(b) Si ponemos el origen de coordenadas en O podemos calcular donde se encuentra el C.M. del cilindro agujereado (por simetría la coordenada $y_{C.M.}$ será nula). El cálculo de la componente x del centro de masas puede realizarse descomponiendo el cilindro agujereado en dos elementos: un cilindro macizo (por simetría el centro de masas se encuentra en el origen), y un agujero cilíndrico (es decir, suponemos que su masa es negativa) que, por simetría, tiene como coordenada x del centro de masas 2/3 a.

$$x_{C.M.} = \frac{0-(P-P')\left(-\frac{2}{3}a\right)}{P'} = \frac{2}{45}a$$



Aplicando las condiciones de la estática:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_{roz.} - T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = F_{roz.} \\ N - P' = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P' \end{cases}$$

$$\sum_i \vec{\tau}_i^{\,A} = 0 \quad \Rightarrow \quad T(2a) - P'\,x_{C.M.} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \left(\frac{x_{C.M.}}{2a}\right)P' = \boxed{\frac{1}{\;}\ \mathrm{N}}$$

(c) La fuerza de rozamiento es estática y debe ser menor que su valor máximo:

$$F_{roz.} = T \le F_{roz.máx.} = \mu N = \mu P' \quad \Rightarrow \quad \mu \ge \frac{T}{P'} = \boxed{2{,}2\cdot 10^{-2}}$$