Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Febrero de 2022
Problemas (Dos puntos por problema).

Problema 1: Un motorista se aproxima a un semáforo en verde con una velocidad v_0 en el momento en que la luz cambia a ámbar.
(a) Si su tiempo de reacción es τ, durante el cual decide parar y aprieta el freno, siendo a la aceleración máxima de frenado, ¿cuál será la distancia $s_{mín.}$ al semáforo, en el momento en que éste cambia a ámbar, que le permitirá detener su vehículo? (0,7 puntos)
(b) Si la luz ámbar dura un tiempo t_s antes de cambiar a roja, ¿cuál será la máxima distancia $s_{máx.}$ al semáforo, en el momento en que la luz cambia a ámbar, que le permita continuar a la velocidad v_0 sin saltarse la luz roja? (0,6 puntos)
(c) Demuéstrese que si su velocidad inicial v_0 es mayor que $v_{0,máx.} = 2a(t_s - \tau)$ habrá un intervalo de distancias al semáforo tal que no podrá parar a tiempo ni seguir adelante sin saltarse la luz roja. (0,6 puntos)
(d) Estime valores razonables de τ, t_s y a, (según la experiencia del estudiante) y calcúlese $v_{0,máx.}$. (0,1 puntos)
Problema propuesto por el Prof. José Javier Sandonís

Solución:

(a) Colocamos nuestro origen de coordenadas en la posición del semáforo. Tomaremos el eje horizontal con sentido positivo hacia la derecha, de modo que todo lo que esté antes del semáforo tenga una coordenada negativa y todo punto que esté más allá, pasado el semáforo, tenga coordenada positiva. Ponemos en marcha nuestro cronómetro cuando la luz cambia a ámbar, y llamamos s a la distancia del motorista al semáforo en dicho momento. Cuando el motorista reacciona, al moverse con velocidad constante, se habrá acercado una distancia $v_0\tau$ antes de empezar a frenar e iniciar un movimiento uniformemente acelerado. Las condiciones iniciales para dicho movimiento de deceleración serán

$$t_0 = \tau \qquad x_0 = -s + v_0\tau, \qquad v_0$$

La ecuación para la posición y la velocidad serán

$$x = -s + v_0\tau + v_0(t-\tau) - \frac{1}{2}a(t-\tau)^2,$$

$$v = v_0 - a(t-\tau).$$

En el momento en el que se detiene, $t = t_\mathrm{d}$

$$v(t_\mathrm{d}) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 - a(t_\mathrm{d} - \tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_\mathrm{d} = \frac{v_0}{a} + \tau.$$

En ese instante se tiene que cumplir que $x(t_\mathrm{d}) \leq 0$ (se tiene que haber detenido sin sobrepasar la posición del semáforo), con lo que

$$-s + v_0 t_d - \frac{1}{2} a (t_d - \tau)^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad s \geq \frac{v_0^2}{2a} + v_0 \tau.$$

Habrá por lo tanto una distancia mínima de frenado, $s_{mín.}$, de tal forma que si el motorista se encontrase a una distancia menor no le daría tiempo a frenar sin pasarse el semáforo.

$$s_{\min} = \frac{v_0^2}{2a} + v_0 \tau.$$

(b) Si lo que decide el motorista es continuar con su velocidad inicial sin frenar la ecuación de su posición será:

$$x = -s + v_0 \tau + v_0 (t - \tau) = -s + v_0 t,$$

Si queremos que el motorista haya sobrepasado el semáforo cuando éste cambie a rojo:

$$x(t_\mathrm{s}) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -s + v_0 t_\mathrm{s} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad s \leq v_0 t_\mathrm{s}.$$

Habrá por lo tanto una distancia máxima de mantenimiento de velocidad, $s_{máx.}$, de tal forma que si el motorista se encontrase a una distancia mayor no podría mantener su velocidad sin pasarse el semáforo,

$$s_{\max} = v_0 t_\mathrm{s}.$$

(c) Si la distancia s a la que se encontraba inicialmente el motorista verifica

$$s_{\min} \leq s \leq s_{max},$$

puede optar por lo tanto por frenar ($s_{\min} \leq s$) o por mantener la velocidad ($s \leq s_{\max}$), pero puede darse el caso en que la condición que se verifique sea

$$s_{\min} \geq s \geq s_{max}.$$

En este caso no puede optar ni por frenar ($s \leq s_{\min}$), ni por mantener la velocidad ($s_{\max} \leq s$), con lo cual se pasaría el semáforo en rojo (¡a no ser que acelere!).

Para que esta peligrosa situación no se produzca es por lo tanto necesario que $s_{\min} \leq s_{\max}$, con lo que

$$\frac{v_0^2}{2a} + v_0\tau \leq v_0 t_{\mathrm{s}} \quad \Rightarrow \quad v_0 \leq v_{0,\max} = 2a(t_{\mathrm{s}} - \tau)$$

Por lo tanto si la velocidad del motorista es inferior a $v_{0,máx.}$ puede optar tanto por frenar como por mantener la velocidad, pero si es superior, se encontrará en la peligrosa situación anterior y no podrá hacer ni lo uno ni lo otro sin pasarse el semáforo en rojo.

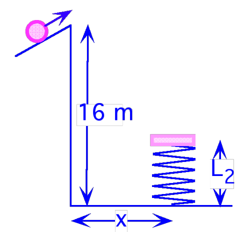
(d) Si tomamos $\tau = 0.2$ s (conductor con buenos reflejos), $t_s = 2.0$ s y $a = 8$ m/s^2 (suelo seco) o $a = 2.5$ m/s^2 (suelo húmedo) tenemos que:

$v_{0,\max} = 104\ \mathrm{km/h}$ (suelo seco).
$v_{0,\max} = 32{,}4\ \mathrm{km/h}$ (suelo húmedo).

Por ejemplo en suelo húmedo un motorista que se acerque al semáforo a 40 km/h (respetando la limitación de velocidad) tendrá problemas si ve que el semáforo cambia a ámbar cuando el se encuentra a una distancia s

$$s_{\max} = 22{,}2\ \mathrm{m} \leq s \leq s_{\min} = 26{,}9\ \mathrm{m}.$$

Problema 2: Disponemos de un muelle vertical de $k = 1000$ N/m, longitud $L_1 = 110$ cm y masa despreciable sobre el que colocamos una lámina de 10 kg.



(a) ¿Cuál es la longitud del muelle L_2 una vez colocada dicha masa? (0,5 puntos)

Desde la azotea de 16 m de altura se lanza un balón de 1 kg a una velocidad de 20 m/s formando un ángulo de 30º con la horizontal.

(b) ¿A qué distancia x debemos colocar el muelle para que el balón caiga sobre la lámina? (0,5 puntos)

(c) Una vez que el balón choca con la lámina, determinar las velocidades de ambos ($e = 0.8$) y la energía perdida en el choque. (0,5 puntos)

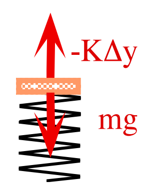
(d) ¿Cuál será la longitud mínima del muelle L_3? (0,5 puntos)

Recordad que $e = -\frac{v_B' - v_A'}{v_B - v_A}$

Problema propuesto por los profesores José Javier Sandonís y Jesús Rodríguez

Solución:

(a) Al colocar la masa el muelle se comprime un valor Δy. Como el sistema queda en equilibrio, el peso es equilibrado por la fuerza del muelle



$$mg - k\Delta y = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta y = \frac{mg}{k} = \frac{10 \times 9{,}81}{1000} \text{ m} = 0{,}0981 \text{ m}.$$

Por lo tanto,

$$L_2 = L_1 - \Delta y = (110 - \ 9.81) \text{ cm} = 100{,}2 \text{ cm}.$$

(b) Las componentes iniciales de la velocidad son

$$v_{0x} = v_0 \cos 30^\circ = 20\frac{\sqrt{3}}{2} = 17{,}32\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$v_{0y} = v_0 \sin 30^\circ = 20\frac{1}{2} = 10{,}00\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

En la dirección vertical, la ecuación de la trayectoria es

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2,$$

Por lo tanto

$$1{,}02 = 16{,}00 + 10{,}00\, t + \frac{1}{2}(-9{,}81)t^2 \quad \Rightarrow \quad -4{,}90\, t^2 + 10{,}00\, t + 14{,}98 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, obtenemos dos soluciones para el tiempo: $t = -1{,}00$ s y $t = 3{,}04$ s. La solución real corresponde al tiempo positivo (la otra no tiene significado físico).

En ese tiempo, el balón recorre una distancia horizontal de

$$\Delta x = v_{0x} t = 17{,}32 \ \times 3{,}04 \text{ m} = 52{,}70 \text{ m}.$$

(c) Antes del choque, el balón llevará una velocidades

$$v_x = v_{0x} = 17{,}32 \, \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_y = v_{0y} - gt = 10{,}00 - 9{,}81 \times 3{,}04 \, \frac{\text{m}}{\text{s}} = -19{,}85 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

La línea de choque va en la dirección vertical, por lo que el choque se produce a lo largo de esa dirección. Por la conservación del momento

$$m_{\text{b}} v_{\text{b}y} + m_1 v_{1y} = m_{\text{b}} v'_{\text{b}y} + m_1 v'_{1y} \quad \Rightarrow \quad 1(-19{,}85) + 0 = 1 v'_{\text{b}y} + 10 v'_{1y}$$

Por otra parte, por la ecuación del coeficiente de restitución sabemos que

$$e = -\frac{\left(v'_{1y} - v'_{\text{b}y}\right)}{\left(v_{1y} - v_{\text{b}y}\right)} \quad \Rightarrow \quad 0{,}8 = -\frac{\left(v'_{1y} - v'_{\text{b}y}\right)}{[0 - (-19{,}85)]} \quad \Rightarrow \quad 15{,}88 = v'_{\text{b}y} - v'_{1y}.$$

Multiplicando la segunda ecuación por 10, y sumándosela a la primera

$$158{,}8 - 19{,}85 = 10 v'_{\text{b}y} + v'_{\text{b}y} \quad \Rightarrow \quad v'_{\text{b}y} = 12{,}63 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Sustituyendo este valor en una de las dos ecuaciones anteriores, obtenemos que $v'_{1y} = -3{,}25 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

En la dirección horizontal, las velocidades del balón y la placa no cambian

$$v'_{\text{b}x} = v_{\text{b}x} = 17{,}32 \, \frac{m}{s}.$$

$$v'_{1x} = v_{1x} = 0.$$

El módulo de la velocidad del balón antes del choque es

$$v_{\mathrm{b}} = \sqrt{19{,}85^2 + 17{,}32^2} = 26{,}34\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

y después del choque

$$v_{\mathrm{b}}' = \sqrt{12{,}63^2 + 17{,}32^2} = 21{,}44\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Durante el choque no se producen cambios ni de energía potencial, ni elástica, solo de energía cinética

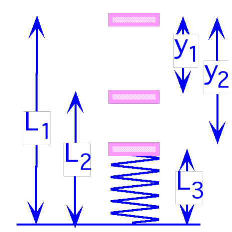
$$K_{\mathrm{ini}} = \frac{1}{2} m_{\mathrm{b}} v_{\mathrm{b}}^2 = 366{,}9\ \mathrm{J},$$

$$K_{\mathrm{fin}} = \frac{1}{2} m_{\mathrm{b}} v_{\mathrm{b}}'^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 21{,}44^2 + \frac{1}{2} \times 10 \times 3{,}25^2 = 282{,}6\ \mathrm{J}.$$

De esta manera la energía perdida en el choque es

$$\Delta K = K_{\mathrm{ini}} - K_{\mathrm{fin}} = 64{,}3\ \mathrm{J}.$$

(c) Para encontrar la mínima longitud del muelle, aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica de la lamina entre el punto inmediatamente después del choque y el punto de máxima compresión, donde la energía cinética será cero. Tenemos que recordar que en la posición inicial (inmediatamente después del choque) el muelle está comprimido una longitud y_1 , por lo que ya tenemos la energía potencial elástica



$$m_1 g L_2 + \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} k y_1^2 = \frac{1}{2} k y_2^2 + m g L_3$$

$$m_1 g (L_2 - L_3) + \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} k y_1^2 = \frac{1}{2} k y_2^2$$

$$m_1 g (y_2 - y_1) + \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} k y_1^2 = \frac{1}{2} k y_2^2$$

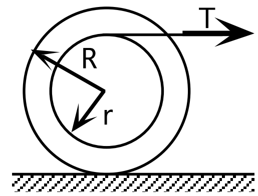
$$10 \times 9{,}81 \times (y_2 - 0{,}0981) + \frac{1}{2} \times 10 \times 3{,}25^2 + \frac{1}{2} \times 1000 \times 0{,}0981^2 = \frac{1}{2} \times 1000 \times y_2^2$$

$$500 y_2^2 - 98{,}1 y_2 - 48 = 0$$

Y resolviendo esta ecuación de segundo grado, obtenemos una solución negativa sin sentido físico $y_2 = -0{,}227$ m, y una solución positiva, $y_2 = 0{,}423$ m.
Por lo tanto,

$$L_3 = L_1 - y_2 = 1{,}1 - 0{,}423 = 0{,}677 \text{ m.}$$

Problema 3: Un cilindro pesado tiene una masa m y un radio R. Se ve acelerado por una fuerza T que se aplica mediante una cuerda arrollada a lo largo de un tambor ligero de radio r unido al cilindro (ver Figura). El coeficiente de rozamiento estático es suficiente para que el cilindro ruede sin deslizar.



(a) **Representar todas las fuerzas que actúan sobre el cilindro (0,2 puntos)**
(b) **Hallar la fuerza de rozamiento en función de los datos (T, r, R y m) (0,5 puntos)**
(c) **Hallar la aceleración del centro del cilindro en función de los datos (T, r, R y m) (0,5 puntos)**
(d) **¿Es posible escoger r de modo que la aceleración sea mayor que $\frac{T}{m}$? ¿Cómo? (0,5 puntos)**
(e) **¿Cuál es la fuerza de rozamiento en la circunstancia descrita en el apartado d? (0,3 puntos).**

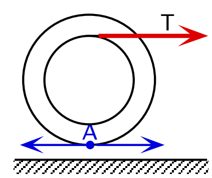
Problema propuesto por los profesores José Javier Sandonís y Jesús Rodríguez

Solución:

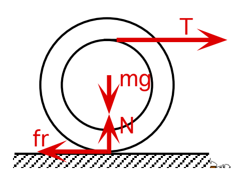
(a) La tensión produce una traslación del centro de masas y una rotación entorno al mismo.

En ausencia de suelo, dependiendo del valor de r, el efecto de la rotación es mayor o menor que el de la traslación. Por lo tanto el punto A podría tratar de ir hacia la izquierda (si el efecto de la rotación es mayor que el de la traslación) o hacia la derecha (si el efecto de la rotación es menor que el de la traslación).

El suelo ejerce una fuerza de rozamiento que evita que dicho punto "deslice", y podrá llevar el mismo sentido que la tensión (si A trata de ir hacia la izquierda) o el contrario (si A trata de ir hacia la derecha).



Si suponemos que el punto A trata de moverse (deslizar) en la dirección de la tensión, la fuerza de rozamiento se opone a este movimiento (deslizamiento), por lo que las fuerzas que actúan son las de la figura.



(b) Para el movimiento de traslación del centro de masas, aplicamos la segunda ley de Newton de las traslaciones

$$T - f_{\mathrm{r}} = m a_{\mathrm{CM}} \qquad \Rightarrow \qquad a_{\mathrm{CM}} = \frac{T - f_{\mathrm{r}}}{m}.$$

Para el movimiento de rotación, aplicamos la segunda ley de Newton para las rotaciones. Consideramos el origen de coordenadas en el centro del cilindro.

$$Tr + f_{\mathrm{r}}R = I\alpha \qquad \Rightarrow \qquad Tr + f_{\mathrm{r}}R = \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{a_{\mathrm{CM}}}{R}\right).$$

En la última expresión, hemos utilizado las relaciones $I = \frac{1}{2}mR^2$, y como rueda sin deslizar $\alpha = \frac{a_{\mathrm{CM}}}{R}$. Sustituyendo el valor de la aceleración del centro de masas de la primera ecuación en la segunda

$$Tr + f_{\mathrm{r}}R = \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{T - f_{\mathrm{r}}}{mR}\right) = \frac{1}{2}R(T - f_{\mathrm{r}}) = \frac{RT}{2} - \frac{Rf_{\mathrm{r}}}{2}.$$

Transponiendo términos

$$f_{\mathrm{r}}R + \frac{Rf_{\mathrm{r}}}{2} = \frac{RT}{2} - Tr \qquad \Rightarrow \qquad f_{\mathrm{r}}\left(R + \frac{R}{2}\right) = T\left(\frac{R}{2} - r\right) \qquad \Rightarrow \qquad f_{\mathrm{r}}\frac{3R}{2} = T\left(\frac{R}{2} - r\right)$$

Con lo que despejando la fuerza de rozamiento

$$f_r = T\frac{(R - 2r)}{3R}.$$

(c) Introduciendo el valor de la fuerza de rozamiento en la ecuación de movimiento para las traslaciones

$$a_{\mathrm{CM}} = \frac{T - f_{\mathrm{r}}}{m} = \frac{T - T\frac{(R-2r)}{3R}}{m} = \frac{T\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{2r}{3R}\right)}{m} = \frac{T\left(\frac{2}{3} + \frac{2r}{3R}\right)}{m} = \frac{2}{3}\frac{T}{m}\left(1 + \frac{r}{R}\right).$$

(d) Si $a_{\mathrm{CM}} > \frac{T}{m}$, entonces

$$\frac{2}{3}\frac{T}{m}\left(1 + \frac{r}{R}\right) > \frac{T}{m} \quad \Rightarrow \quad \left(1 + \frac{r}{R}\right) > \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{R} > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad r > \frac{R}{2}.$$

Por lo tanto si es posible, siempre que $r > \frac{R}{2}$.

(e) El que a_{CM} sea mayor que $\frac{T}{m}$ solo puede ser debido a que existe otra fuerza que acelera aún más el centro de masas del cilindro al actuar en la misma dirección que la tensión, y esta fuerza es la fuerza de rozamiento. Sí pues, cuando $r > \frac{R}{2}$ la fuerza de rozamiento lleva el mismo sentido que la tensión, de hecho, si $r > \frac{R}{2}$ la fuerza de rozamiento sale negativa, lo que significa que tiene sentido contrario al tomado inicialmente en la figura superior.