Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Febrero de 2021
Problemas (Dos puntos por problema).

Problema 1: Una partícula se mueve en el plano XY con aceleración constante. Para $t = 0$ la partícula se encuentra en la posición $\vec{r} = 4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ [m]. Para $t = 2$s, la partícula se ha desplazado a la posición $\vec{r} = 10\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ [m], y su velocidad ha cambiado en $\Delta\vec{v} = 5\vec{\imath} - 6\vec{\jmath}$ [m/s].

(a) ¿Cuánto vale la aceleración dela partícula (0,2 puntos)
(b) ¿Cuál es el vector velocidad de la partícula en función del tiempo (0,9 puntos)
(c) ¿Cuál es el vector posición de la partícula como función del tiempo (0,9 puntos)

Solución:

(a) Como hablamos de un movimiento uniformemente acelerado

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{5\vec{\imath} - 6\vec{\jmath}}{2}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right] = 2.5\,\vec{\imath} - 3.0\,\vec{\jmath}\ \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

(b) Para conocer tanto la velocidad como la posición como función del tiempo en un movimiento uniformemente acelerado, necesitamos la velocidad inicial.

En este caso, conocemos la posición final, la posición inicial, la aceleración y el tiempo, por lo que

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_0 = \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) - \frac{1}{2}\vec{a}t^2}{t} = 0.5\,\vec{\imath} + 0.5\,\vec{\jmath}\ \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

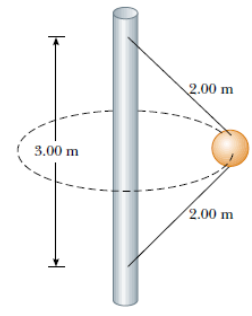
Por lo tanto, la velocidad como función del tiempo valdrá

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = (0.5 + 2.5\,t)\ \vec{\imath} + (0.5 - 3.0\,t)\,\vec{\jmath}\ \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

(c) Y para la posición como función del tiempo

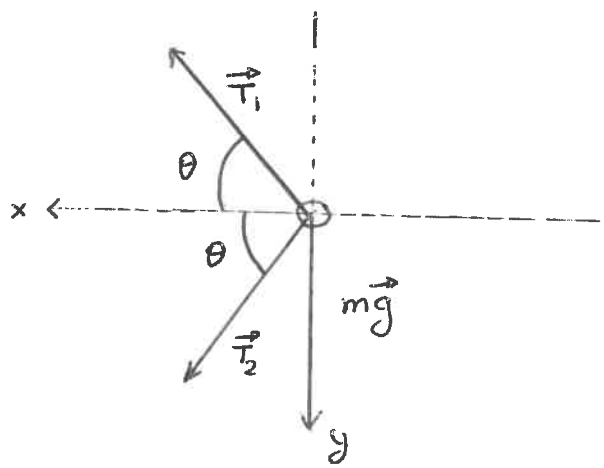
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = (4.0 + 0.5\,t + 1.25\,t^2)\,\vec{\imath} + (3.0 + 0.5 - 1.5\,t^2)\vec{\jmath}\ \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Problema 2: Un objeto de 4 kg está unido a una varilla vertical por medio de dos cuerdas, como indica la figura. El objeto gira en un plano horizontal con velocidad constante de 6 m/s. Calcular la tensión en ambas cuerdas.



Solución:

Dibujamos el diagrama de fuerzas de cuerpo aislado para la partícula de masa m.



Elegimos el eje x horizontal, sentido positivo hacia la izquierda, y el eje y vertical, sentido positivo hacia abajo.

Proyectamos las fuerzas sobre los ejes y aplicamos la segunda ley de Newton en cada una de las direcciones

$$\sum F_x = T_{1x} + T_{2x} = T_1 \cos\theta + T_2 \cos\theta = m\frac{v^2}{r}, \qquad [1]$$

$$\sum F_y = -T_{1y} + T_{2y} + mg = -T_1 \sin\theta + T_2 \sin\theta + mg = 0. \qquad [2]$$

Esta segunda ecuación es debida a que la bola está en equilibrio en la dirección vertical.

El radio de giro se puede calcular mediante el teorema de Pitágoras

$$r = \sqrt{(2.0)^2 - (1.5)^2} = 1.32 \text{ m},$$

mientras que el ángulo θ toma el valor

$$\theta = arc\sin\frac{1.5}{2.0} = 48{,}59^{\circ}.$$

Como la tensión tiene que llevar la dirección de la cuerda,

$$\tan\theta = \frac{T_{1y}}{T_{1x}} \quad \Rightarrow \quad T_{1y} = T_{1x}\tan\theta.$$

$$\tan\theta = \frac{T_{2y}}{T_{2x}} \quad \Rightarrow \quad T_{2y} = T_{2x}\tan\theta.$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en [2],

$$\sum F_y = -T_{1y} + T_{2y} + mg = -T_{1x}\tan\theta + T_{2x}\tan\theta + mg = 0.$$

Además, tenemos la ecuación [1] a la que podemos multiplicar por $\tan\theta$ en los dos miembros,

$$T_{1x}\tan\theta + T_{2x}\tan\theta = m\frac{v^2}{r}\tan\theta.$$

Sumando estas dos últimas ecuaciones

$$2T_{2x}\tan\theta + mg = m\frac{v^2}{r}\tan\theta.$$

Despejando T_{2x},

$$T_{2x} = \frac{m}{2\tan\theta}\left(\frac{v^2}{r}\tan\theta - g\right) = \frac{mv^2}{2r} - \frac{mg}{2\tan\theta}.$$

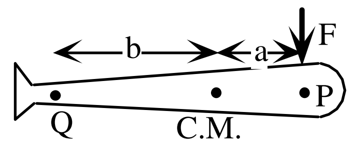
Sustituyendo los datos del problema

$$T_{2x} = 37{,}26\ \text{N} \quad \Rightarrow \quad T_{2y} = T_{2x}\tan\theta = 42{,}25\ \text{N} \quad \Rightarrow \quad T_2 = \sqrt{T_{2x}^2 + T_{2y}^2} = 56{,}3\ \text{N}.$$

De la Ecuación (2)

$$T_{1y} = T_{2y} + mg = 81{,}45\ \text{N} \quad \Rightarrow \quad T_{1x} = \frac{T_{1y}}{\tan\theta} = 71{,}83\ \text{N} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \sqrt{T_{1x}^2 + T_{1y}^2} = 108{,}6\ \text{N}.$$

Problema 3: Una varilla de longitud *L* y masa *m* reposa sobre un plano horizontal sin fricción. Durante un intervalo de tiempo muy corto Δt, una fuerza F que actúa sobre aquella produce un impulso I. La fuerza actúa en un punto P situado a una distancia *a* del centro de masas. Encontrar:



- **(a) La velocidad del centro de masas**
- **(b) La velocidad angular con respecto al centro de masas.**
- **(c) Determinar el punto Q que inicialmente permanece en reposo en el sistema L, demostrando que *b=K²/a*, siendo K el radio de giro con respecto al centro de masas. El punto Q se denomina centro de percusión (por ejemplo, un jugador de béisbol debe sostener el bate en el centro de percusión para evitar sentir la sensación de dolor cuando él golpea la pelota. Demostrar también que si la fuerza da en Q, el centro de percusión se encuentra en P.**

Solución:

(a) Por el teorema del impulso, el impulso mecánico es la variación del momento lineal. Si tomamos la dirección y como vertical, tanto la fuerza como el impulso como la variación del momento van en esa misma dirección. Prescindiendo del símbolo de vector y asumiendo que podemos calcular el momento lineal del sistema a partir de la velocidad del centro de masas con toda la masa del sistema localizada en el mismo, podemos escribir

$$I = F\,\Delta t = \Delta p = m\left(v_{\mathrm{CM}}^{f} - v_{\mathrm{CM}}^{i}\right) \qquad \Rightarrow \qquad v_{\mathrm{CM}}^{f} = \frac{I}{m}.$$

Tal cual está dibujado en la figura, esta velocidad apuntará hacia abajo.

(b) Tomamos el sistema de referencia con origen en el centro de masas. Una fuerza $\vec{F}$ (dirección vertical sentido hacia abajo) actuando en un punto a una distancia a (sentido horizontal, dirección hacia la derecha), produce un momento de módulo Fa y cuya dirección se mete en el plano del papel.

Este momento será igual a la variación del momento angular (medido con respecto al centro de masas) respecto del tiempo. Como tanto el momento angular como el momento de la fuerza están dirigidos en la misma dirección, prescindimos del símbolo de vectores y escribimos

$$M_{\mathrm{CM}} = \frac{dL_{\mathrm{CM}}}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \int dL_{\mathrm{CM}} = \int M_{\mathrm{CM}}\,dt = \int Fa\,dt = a\int F\,dt = aI.$$

La integral del momento angular es trivial. Como inicialmente la varilla está en reposo no tiene momento angular y por tanto

$$aI = \Delta L_{\mathrm{CM}} = L_{\mathrm{CM}}^{f} - L_{\mathrm{CM}}^{i} = L_{\mathrm{CM}}^{f}.$$

Si escribimos este momento en función del radio de giro con respecto al centro de masas

$$mK^2\omega = Ia \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{Ia}{mK^2}.$$

(c) Cuando la varilla comienza a rotar, el centro de masas se desplazará hacia abajo [ver apartado (a)]. Al mismo tiempo, y como consecuencia del movimiento de rotación en torno al centro de masas, los puntos situados a la izquierda del centro de masas tienden a moverse simultáneamente hacia arriba. Denotaremos estas velocidades con respecto al centro de masas con primas. Habrá un punto para el cual esta velocidad compense exactamente con la velocidad de traslación del centro de masas. Ese punto estará en reposo con respecto a un sistema de referencia de laboratorio,

$$v_a = v_{CM} + v_{a'} \quad \Rightarrow \quad Si\ v_a = 0 \quad \Rightarrow \quad -v_{CM} = v_{a'} \quad \Rightarrow \frac{I}{m} = \omega b,$$

donde b es la distancia que separa ese punto que no se desplaza en el sistema de laboratorio con respecto al centro de masas. Sustituyendo el valor de la velocidad angular

$$b = \frac{I}{m\omega} = \frac{I}{m\dfrac{Ia}{mK^2}} = \frac{K^2}{a}.$$

(d) Intercambiando b por a

$$\omega = \frac{Ib}{mK^2},$$

y el nuevo centro de percusión estará en c tal que

$$c = \frac{K^2}{b} = a,$$