Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Febrero de 2021
Cuestiones (Un punto por cuestión).

Cuestión 1: Siendo $\vec{R}$ el vector de componentes $(\mathbf{1}, \sin t, \cos t)$, calcular:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} \qquad \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \qquad \frac{dR}{dt} \qquad \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| \qquad \int \vec{R}dt$$

Solución:

(a) Derivando componente a componente,

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = (0, \cos t, -\sin t).$$

(b) Derivando de nuevo,

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = (0, -\sin t\,, -\cos t).$$

(c) Calculando el módulo de R

$$R = \sqrt{1 + (\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{2},$$

Y derivando esta expresión,

$$\frac{dR}{dt} = 0.$$

(d) Calculando el módulo de la solución del apartado (a),

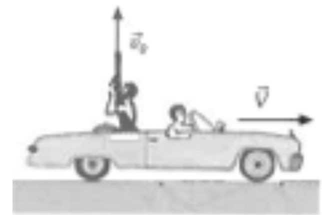
$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = \sqrt{(\cos t)^2 + (-\sin t)^2} = \sqrt{1}.$$

(e) Integrando $\vec{R}$ componente a componente,

$$\int \vec{R}dt = (t, -\cos t, \sin t) + \vec{C},$$

donde $\vec{C}$ es una constante de integración.

Cuestión 2: La figura nos representa a un individuo en un coche que se mueve horizontalmente a la velocidad de 108 km/h y que dispara su fusil en dirección vertical con velocidad de 216 km/h. Describir las ecuaciones de movimiento como función del tiempo:



(a) Desde el punto de vista del observador en el vehículo

(b) Desde el punto de vista de un observador fijo en la carretera

Nota: Tomad g = 10 m/s^2.

Problema extraído del libro Problemas de Física, Editorial Tébar, S. Burbano de Ercilla y otros, 27 Edición

Solución:

Tomando el origen de tiempo ($t = 0$) en el instante del disparo, y haciendo coincidir el origen de referencia de los sistemas fijo S (OXY) y móvil S' $(O'X'Y')$

$$(t = 0 \Rightarrow O \equiv O')$$

y llamando

$$\vec{V} = 108\,\vec{\imath}\left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right] = 30\vec{\imath}\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right],$$

$$\vec{v}' = 216\,\vec{\jmath}\left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right] = 60\vec{\jmath}\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right],$$

tenemos que:

(a) Para el sistema de referencia S' $(O'X'Y')$, un observador que se mueve con el coche, transcurrido un tiempo t después del disparo

$$x' = 0, \qquad y' = v_0't - \frac{1}{2}gt,$$

$$v_x' = 0, \qquad v_y' = v_0' - gt,$$

$$a_x' = 0, \qquad a_y' = -g.$$

Agrupando estas ecuaciones en forma vectorial

$$\vec{r}' = \left(v_0't - \frac{1}{2}gt\right)\vec{\jmath} = (60t - 5t^2)\vec{\jmath}\ \ [\text{m}],$$

$$\vec{v}' = (v_0' - gt)\vec{\jmath} = (60 - 10t)\vec{\jmath}\ \ [\text{m/s}],$$

$$\vec{a}' = (-g)\vec{j} = (-10)\vec{j} \;\; [\mathrm{m/s^2}].$$

En cualquier instante de tiempo del vuelo del proyectil se encontrará encima del vehículo y, con respecto a un observador que viaja con él, su trayectoria será una línea recta ascendente y descendente.

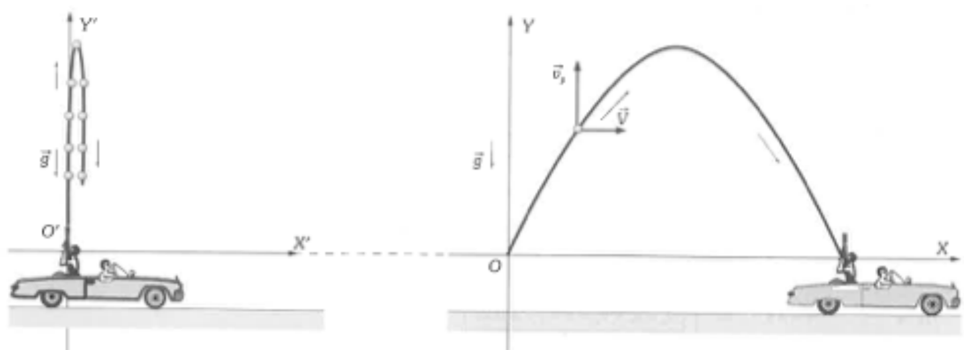
(b) Aplicando las ecuaciones de transformación de Galileo, obtendremos para el observador fijo

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r} = 30t\,\vec{\imath} + (60t - 5t^2)\vec{j} \;\; [\mathrm{m}],$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v} = 30\,\vec{\imath} + (60 - 10t)\vec{j} \;\; [\mathrm{m/s}]\,,$$

$$\vec{a} = \vec{a}' \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a} = -10\,\vec{j} \;\; [\mathrm{m/s^2}].$$

Y la trayectoria del proyectil desde $S\,(OXY)$ será una parábola como la que se representa en la Figura.



Cuestión 3: Una cadena está colocada en una mesa sin rozamiento con la quinta parte de su longitud colgando en el borde. Si su masa está distribuida uniformemente hallar el trabajo necesario para subir toda la cadena a la mesa tirando por un extremo.

Solución:

Sea una cadena uniforme de longitud l y densidad lineal $\rho = m/l$, que puede deslizar sin rozamiento sobre una mesa horizontal. En un determinado momento, la longitud del segmento vertical de la cadena que cuelga del borde de la mesa es $l' = l/5$.

Vamos a suponer que subimos toda la cadena a la mesa de forma adiabática, es decir, muy lentamente, suponiendo que la aceleración en todo momento es nula. Para ello aplicamos una fuerza en el otro extremo de la cadena y en la dirección horizontal. Esta fuerza tiene que ser igual al peso de la parte vertical que está colgando, ya que el peso de la parte horizontal que está sobre la mesa se equilibra con la reacción de la mesa.

El trabajo diferencial necesario para subir la cadena una longitud diferencial dl' vendrá dado por

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dl' = \rho l' g dl' = \frac{m}{l} l' g dl'.$$

En esta expresión hemos aplicado que la fuerza externa tira en la dirección horizontal hacia la izquierda y que el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza es dl', también orientado hacia la izquierda. Por lo tanto el coseno del ángulo entre fuerza y desplazamiento es cero.

Para calcular el trabajo total, tenemos que integrar esta expresión. Supongamos que tomo el origen de coordenadas en la dirección horizontal en el punto en el que empiezo a tirar, y que el sentido positivo va hacia la derecha. Cuando termino de tirar, el punto de aplicación de la fuerza estará en $-l/5$. Por lo tanto

$$W = \int_{l'=0}^{l'=-l/5} \frac{m}{l} l' g dl' = \frac{mg}{l} \int_{l'=0}^{l'=-l/5} l' dl' = \frac{mg}{l} \left(\frac{l'^2}{2} \right) \Bigg|_{l'=0}^{l'=-l/5} = \frac{mg}{2l} \frac{l^2}{25} = \frac{mgl}{50}.$$

Cuestión 4: Durante un día soleado, la luz del Sol calienta el suelo, que a su vez calienta el aire que está en contacto con él. ¿Cuántos Julios debe proporcionar el suelo para calentar un volumen inicial de 1.00 m^3 de aire de 0.0 °C a 10.0 °C? La presión atmosférica es estable a 1.00 atm.

Nota: la constante de los gases ideales es $R = 0.08205\ \frac{\text{atm}\times\text{l}}{\text{mol}\times\text{K}}$, y el calor específico del aire a presión constante $C_\text{p} = 29.1\ \text{J/°C}$

Problema extraído del libro Física para Ingeniería y Ciencias, H.C. Ohanian y J. T. Markert, Editorial McGraw-Hill, Tercera edición.

Solución:

Dado que la atmósfera que rodea la cantidad dada de aire proporciona una presión constante, el calor específico relevante es C_p, el calor específico a presión constante. El aire es principalmente N_2 y O_2. Para ambos gases (y por lo tanto para cualquier mezcla entre ellos), su calor específico a presión constante es de $C_\text{p} = 29.1\ \text{J/°C}$.

Durante el calentamiento, el volumen de gas se expande, pero el número de moles permanece constante. Este puede calcularse a partir del volumen y la temperatura iniciales, a partir de la ley de los gases ideales,

$$PV = nRT \quad \Rightarrow \quad n = \frac{PV}{RT} = \frac{1\ \text{atm}\ \times\ 1000\ \text{l}}{0.08205\ \frac{\text{atm}\times\text{l}}{\text{mol}\times\text{K}} \times 273{,}15\ \text{K}} = 44.6\ \text{mol}.$$

Por tanto, la cantidad de calor absorbida por el aire es

$$Q = nC_\text{p}\Delta T = 44.6\ \text{mol}\ \times 29.1\ \text{J/°C} \times 10\text{°C}\ = 12798.6\ \text{J} \approx 1.30\times10^4\ \text{J}.$$

Ésta es una cantidad de calor bastante pequeña. Por comparación, si se quiere calentar un volumen de 1 m^3 de agua en 10.0 °C, se necesitaría suministrar aproximadamente 4×10^7 J.