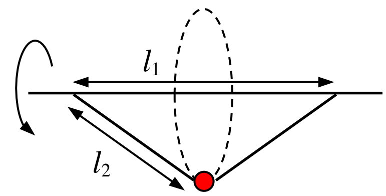
Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Enero de 2023
Problemas (Dos puntos por problema).

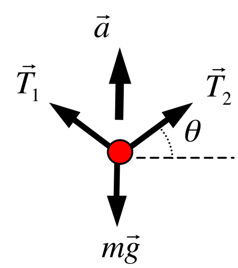
Problema 1: Una masa de 4 kg está sujeta a una barra horizontal, como indica la figura. Las cuerdas están bajo tensión cuando la barra gira alrededor de su eje. Si el módulo de la velocidad de la masa es constante e igual a 4 m/s. Calcular la tensión de las cuerdas cuando la masa está en:



(a) en su punto más bajo (0,5 puntos),
(b) en la posición horizontal (0,5 puntos) y
(c) en su punto más alto (0,5 puntos).
Si colocamos la barra vertical y la velocidad de la bola es ahora de 6 m/s, determinar:
(d) las tensiones de las cuerdas superior e inferior (0,5 puntos).
Datos: l_1 = 3 m, l_2 = 2 m.

Solución:

(a) Escogemos el eje x horizontal, sentido positivo hacia la derecha, y el eje y sentido positivo hacia arriba. Dibujamos el diagrama de fuerzas y planteamos la segunda ley de Newton teniendo en cuenta que por simetría las dos tensiones van a ser iguales en magnitud



$$\sum F_y = T_1 \sin\theta + T_2 \sin\theta - mg = ma_y = m\frac{v^2}{R},$$

$$2T\sin\theta - mg = m\frac{v^2}{R},$$

$$T = \frac{m\left(\frac{v^2}{R} + g\right)}{2\sin\theta} = \frac{m\left(\frac{v^2}{R} + g\right)}{2\frac{R}{l_2}}.$$

Teniendo en cuenta que $R = \sqrt{l_2^2 - \left(\frac{l_1}{2}\right)^2}$, entonces

$$T = \frac{1}{2}ml_2\left[v^2\frac{1}{\left(l_2^2 - \left(\frac{l_1^2}{2}\right)^2\right)} + g\frac{1}{\sqrt{l_2^2 - \left(\frac{l_1^2}{2}\right)^2}}\right] = 66.2\text{ N}.$$

(b) Cuando la masa esté en la posición horizontal, la aceleración estará dirigida a lo largo del eje x. Por lo tanto

$$\sum F_x = T_1 \sin\theta + T_2 \sin\theta = ma_x = m\frac{v^2}{R},$$
$$2T\sin\theta = m\frac{v^2}{R},$$

$$T = \frac{m\left(\frac{v^2}{R}\right)}{2\sin\theta} = \frac{m\left(\frac{v^2}{R}\right)}{2\frac{R}{l_2}} = \frac{1}{2}ml_2\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2}ml_2\frac{v^2}{\left(l_2^2 - \left(\frac{l_1^2}{2}\right)^2\right)} = 36.6\ \text{N}.$$

(c) Cuando la masa está en la parte superior, la aceleración estará dirigida en el sentido negativo del eje y. Además, las componentes de la tensión a lo largo del eje y apuntarán en el mismo sentido que el peso (hacia abajo). Por lo tanto

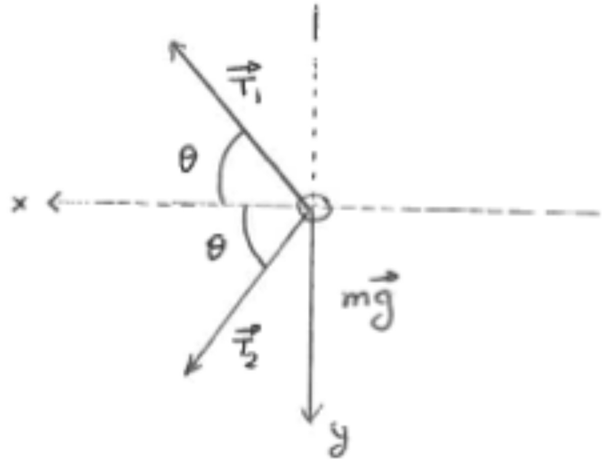
$$\sum F_y = -T_1 \sin\theta - T_2 \sin\theta - mg = ma_y = -m\frac{v^2}{R},$$

$$2T\sin\theta + mg = m\frac{v^2}{R},$$

$$T = \frac{m\left(\frac{v^2}{R} - g\right)}{2\sin\theta} = \frac{m\left(\frac{v^2}{R} - g\right)}{2\frac{R}{l_2}}.$$

$$T = \frac{1}{2}ml_2\left[v^2\frac{1}{\left(l_2^2 - \left(\frac{l_1^2}{2}\right)^2\right)} - g\frac{1}{\sqrt{l_2^2 - \left(\frac{l_1^2}{2}\right)^2}}\right] = 6.9\ \text{N}.$$

(d) Dibujamos el diagrama de fuerzas de cuerpo aislado para la partícula de masa m.



Elegimos el eje x horizontal, sentido positivo hacia la izquierda, y el eje y vertical, sentido positivo hacia abajo.

Proyectamos las fuerzas sobre los ejes y aplicamos la segunda ley de Newton en cada una de las direcciones

$$\sum F_x = T_{1x} + T_{2x} = T_1 \cos\theta + T_2 \cos\theta = m\frac{v^2}{R}, \qquad [1]$$

$$\sum F_y = -T_{1y} + T_{2y} + mg = -T_1 \sin\theta + T_2 \sin\theta + mg = 0. \qquad [2]$$

Esta segunda ecuación es debida a que la bola está en equilibrio en la dirección vertical.

El radio de giro se puede calcular mediante el teorema de Pitágoras

$$R = \sqrt{l_2^2 - \left(\frac{l_1}{2}\right)^2} =$$

$$R = \sqrt{(2.0)^2 - (1.5)^2} = 1.32 \text{ m},$$

mientras que el ángulo θ toma el valor

$$\theta = \arcsin\frac{1.5}{2.0} = 48{,}59^\circ.$$

Como la tensión tiene que llevar la dirección de la cuerda,

$$\tan\theta = \frac{T_{1y}}{T_{1x}} \quad \Rightarrow \quad T_{1y} = T_{1x}\tan\theta.$$

$$\tan\theta = \frac{T_{2y}}{T_{2x}} \quad \Rightarrow \quad T_{2y} = T_{2x}\tan\theta.$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en [2],

$$\sum F_y = -T_{1y} + T_{2y} + mg = -T_{1x}\tan\theta + T_{2x}\tan\theta + mg = 0.$$

Además, tenemos la ecuación [1] a la que podemos multiplicar por $\tan\theta$ en los dos miembros,

$$T_{1x}\tan\theta + T_{2x}\tan\theta = m\frac{v^2}{R}\tan\theta.$$

Sumando estas dos últimas ecuaciones

$$2T_{2x}\tan\theta + mg = m\frac{v^2}{R}\tan\theta.$$

Despejando T_{2x},

$$T_{2x} = \frac{m}{2\tan\theta}\left(\frac{v^2}{R}\tan\theta - g\right) = \frac{mv^2}{2R} - \frac{mg}{2\tan\theta}.$$

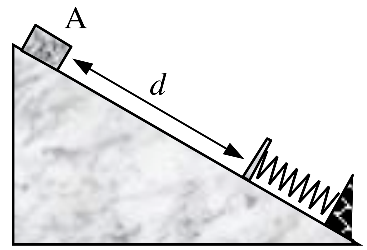
Sustituyendo los datos del problema

$$T_{2x} = 37{,}26\ \mathrm{N} \quad \Rightarrow \quad T_{2y} = T_{2x}\tan\theta = 42{,}25\ \mathrm{N} \quad \Rightarrow \quad T_2 = \sqrt{T_{2x}^2 + T_{2y}^2} = 56{,}3\ \mathrm{N}.$$

De la Ecuación (2)

$$T_{1y} = T_{2y} + mg = 81{,}45\ \mathrm{N} \quad \Rightarrow \quad T_{1x} = \frac{T_{1y}}{\tan\theta} = 71{,}83\ \mathrm{N} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \sqrt{T_{1x}^2 + T_{1y}^2} = 108{,}6\ \mathrm{N}.$$

Problema 2: El cuerpo A de la figura tiene una masa de 2 kg. Partiendo del reposo resbala d = 4 m sobre un plano inclinado $\boldsymbol{\theta}$ = 30º con la horizontal hasta que choca con un muelle cuyo extremo esta fijo al final del plano. Si la constante del muelle es k = 100 N/m calcular



(a) la máxima deformación y la posición a la que volvería el cuerpo A al estirarse de nuevo el muelle si no hubiese rozamiento.

(b) ¿Cuál hubiese sido el resultado si el coeficiente de rozamiento cinético μ_{cin} es 0.25?

(c) En este último caso ¿qué coeficiente de rozamiento estático impediría el estiramiento posterior del muelle?

Solución:

(a) En este primer caso como las únicas fuerzas que actúan sobre el bloque o son conservativas, como el peso y la fuerza elástica, o no realizan trabajo, como la normal, podemos aplicar el principio de conservación de la energía. Llamemos x a la máxima deformación que sufre el muelle al caer el bloque. Tomando como origen de energías potenciales gravitatorias la posición en la que se encuentra el bloque cuando el muelle es contraído dicha distancia x, tendremos:

$$E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}} \quad \Rightarrow \quad mg(d+x)\sin\theta = \frac{1}{2}kx^2 \quad \Rightarrow \quad x = 0.989 \text{ m.}$$

Como la energía se conserva cuando el muelle empuje al bloque hacia arriba la energía elástica acumulada en el muelle se transformará de nuevo en energía potencial gravitatoria recuperando el bloque su posición original

$$d = 4 \text{ m.}$$

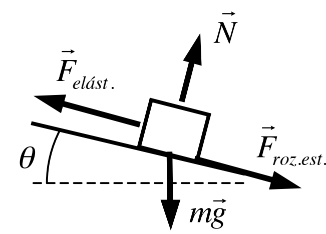
(b) Si hubiese existido rozamiento la energía del bloque no se conservaría pero su variación sería igual al trabajo (negativo) realizado por el rozamiento

$$E_{\text{final}} - E_{\text{inicial}} = W_{\text{roz}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}kx^2 - mg(d+x)\sin\theta = -\mu_{\text{cin}} mg\cos\theta(d+x) \quad \Rightarrow \quad x = 0.725 \text{ m.}$$

Cuando el muelle empuje el bloque hacia arriba el rozamiento sigue actuando, se sigue perdiendo energía. Si finalmente el bloque se separa una distancia d' del muelle tendremos que

$$E_{\text{final}} - E_{\text{inicial}} = W_{\text{roz}} \quad \Rightarrow \quad mg(d'+x)\sin\theta - \frac{1}{2}kx^2 = -\mu_{\text{cin}} mg\cos\theta(d'+x) \quad \Rightarrow \quad d' = 1.14 \text{ m.}$$

(c) Si imponemos la condición de que al alcanzarse la máxima deformación del muelle (y pararse por lo tanto el bloque) la fuerza de rozamiento estática que actúa en ese momento debe ser suficiente para anular la fuerza elástica y la componente del peso a lo largo del plano, evitando que el bloque sea lanzado nuevamente hacia arriba



$$\left.\begin{array}{l} k\,x - F_{roz.est.} - mg\,\mathrm{sen}\theta = 0 \\ \\ F_{roz.est.} \le F_{roz.est.máx.} = \mu_{est.} mg\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mu_{est.} mg\cos\theta \ge k\,x - mg\,\mathrm{sen}\theta$$

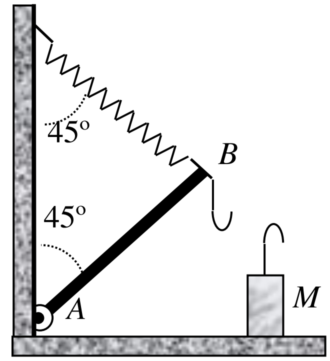
$$\Rightarrow \quad \mu_{est.} \ge \frac{k\,x}{mg\cos\theta} - \mathrm{tg}\theta = \boxed{3.69}$$

Problema 3: En el sistema de la figura la barra homogénea AB tiene una longitud de 100 cm y una masa *m*= 6 kg. En el equilibrio los ángulos en A y en C son de 45°.

(a) Si la constante elástica del resorte es *K* = 400 N/m, calcular su longitud natural (1 punto).

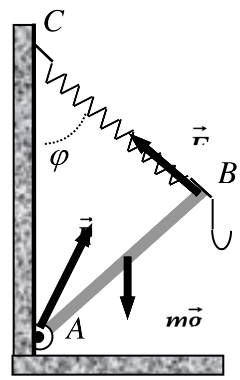
(b) Calcular el valor de la masa *M* que, colgada en el punto B, haga que el nuevo equilibrio se alcance cuando el ángulo en A sea de 60º (1 punto).

Problema propuesto por el Prof. Jesús Rodríguez



Solución:

(a) En la situación de equilibrio indicada en la figura al tener un triángulo rectángulo isósceles la longitud l del muelle será la misma que la longitud L de la barra, $l = L = 100$ cm y la distancia entre A y el enganche del muelle a la pared será $\overline{AC} = \sqrt{2}\,L = 141.4$ cm.



Sobre la barra están actuando cuatro fuerzas: el peso (aplicado en el centro de masas que, como la barra es homogénea coincide con el centro geométrico), la fuerza elástica, aplicada en su extremo y la fuerza que ejerce la bisagra, aplicada en el punto A.

Fuerza	Punto de aplicación	Momento
Peso: $(0, -mg, 0)$	Centro de masas: $(L/2\cos 45^\circ, L/2\sin 45^\circ, 0)$	$\left(0,0,-\frac{L}{2}mg\cos 45^\circ\right)$
Reacción A: $(R_{A,x}, R_{A,y}, 0)$	Punto A: (0,0,0)	Cero
Fuerza elástica: $(-k\Delta l\ \cos 45^\circ, k\Delta l\ \sin 45^\circ, 0)$	Punto B: $(L\cos 45^\circ, L\sin 45^\circ, 0)$	$(0,0,k\Delta l\ L)$

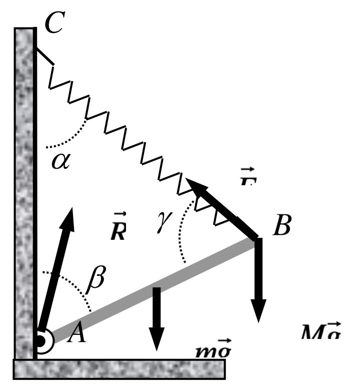
Si imponemos que el momento de fuerzas total respecto de A sea nulo podemos calcular la longitud natural del muelle:

$$kL\Delta l - \frac{L}{2}mg\cos 45^\circ = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta l = \frac{1}{2k}mg\cos 45^\circ = 5.20 \text{ cm.}$$

Por lo tanto,

$$l - l_0 = \Delta l \qquad \Rightarrow \qquad l_0 = l - \Delta l = 94.80 \text{ cm.}$$

(b) Si ahora colgamos del extremo la masa M el nuevo diagrama de fuerzas será el representado en la figura. Con los datos del enunciado vamos a calcular los demás ángulos.



El ángulo α lo podemos poner en función de β, que es conocido, razonando sobre el triángulo:

$$\left.\begin{aligned} l\,\mathrm{sen}\alpha &= L\,\mathrm{sen}\beta \\ l\cos\alpha &= \sqrt{2}\,L - L\cos\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{sen}\beta}{\sqrt{2}\ -\cos\beta} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 43.45^{\mathrm{o}}$$

El ángulo γ será: $\gamma = 180^{\mathrm{o}} - \alpha - \beta = 76.55^{\mathrm{o}}$

Aplicando el teorema de los senos para los ángulos α y β podemos calcular la nueva longitud del muelle y su alargamiento:

$$\frac{\mathrm{sen}\beta}{l} = \frac{\mathrm{sen}\alpha}{L} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{\mathrm{sen}\beta}{\mathrm{sen}\alpha} L = 125.93\ \mathrm{cm} \quad \Rightarrow \quad \Delta l = l - l_0 = 31.13\ \mathrm{cm}$$

Replanteamos el equilibrio volviendo a calcular momentos respecto de A:

Fuerza	**Punto de aplicación**	**Momento**
Peso: $(0, -mg, 0)$	Centro de masas: $(L/2\cos 30^\circ, L/2\sin 30^\circ, 0)$	$\left(0,0,-\frac{L}{2}mg\cos 30^\circ\right)$
Reacción A: $\left(R_{\mathrm{A,x}}, R_{\mathrm{A},y}, 0\right)$	Punto A: $(0,0,0)$	Cero
Fuerza elástica: $(-k\Delta l\ \cos(90-\alpha), k\Delta l\ \sin(90-\alpha), 0)$	Punto B: $(L\cos 30^\circ, L\sin 30^\circ, 0)$	$\big(0,0,k\Delta l\ L(\cos 30^\circ\cos\alpha + \sin 30^\circ\sin\alpha)\big)$
Peso externo: $(0, -Mg, 0)$	Centro de masas: $(L\cos 30^\circ, L\sin 30^\circ, 0)$	$\left(0,0,-LMg\cos 30^\circ\right)$

$$k\Delta l\ L(\cos 30^\circ\cos\alpha + \sin 30^\circ\sin\alpha) - \frac{L}{2}mg\cos 30^\circ - LMg\cos 30^\circ = 0$$

$$M = \frac{k\Delta l\ (\cos 30^\circ\cos\alpha + \sin 30^\circ\sin\alpha)}{g\cos 30^\circ} - \frac{m}{2} = 11.25\ \mathrm{kg}.$$