Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Enero de 2023
Cuestiones (Un punto por cuestión, excepto las dos últimas).

Cuestión 1:
(a) Determinar el gradiente de la función escalar $\Phi = 2x^2yz^3$ (0,5 puntos)
(b) ¿Cuál sería su derivada direccional en el punto (1, 1, 1) según la dirección determinada por el vector unitario (0.6, 0.8, 0)? (0,5 puntos)

Solución:

(a) Por definición del operador vectorial diferencial nabla, y del gradiente de una función escalar:

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k} = (4xyz^3)\,\vec{\imath} + (2x^2z^3)\,\vec{\jmath} + (6x^2yz^2)\,\vec{k}.$$

El gradiente de una función escalar es un campo vectorial. Dar como un resultado un escalar es un error grave que anula por completo el ejercicio.

(b) La derivada direccional en el punto que nos dan y según el vector unitario û del enunciado será igual al producto escalar del gradiente en dicho punto por el vector unitario,

$$\vec{\nabla}\Phi \cdot \hat{u} = \left[(4)\,\vec{\imath} + (2)\,\vec{\jmath} + (6)\,\vec{k}\right] \cdot \left[(0{,}6)\,\vec{\imath} + (0{,}8)\,\vec{\jmath} + (0)\,\vec{k}\right] = 4.0$$

Cuestión 2: Durante una intensa lluvia, las gotas caen a velocidad constante, y formando un ángulo de 10° oeste respecto al eje vertical. Usted va caminando bajo la lluvia y nota que sólo la parte superior de su ropa se está mojando.

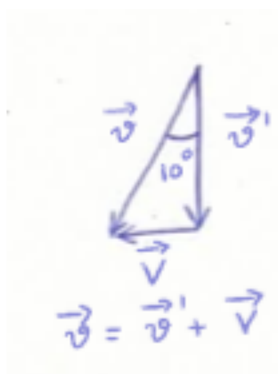
(a) ¿En qué dirección está andando?.

(b) ¿Con qué velocidad (módulo) está andando si el módulo de la velocidad de las gotas respecto al suelo es de 5,2 m/s?

Solución:

De acuerdo con los datos del problema, sabemos la dirección de la velocidad de las gotas de lluvia con respecto a un sistema de coordenadas fijo en el suelo, $\vec{v}$. Forma un ángulo de 10° oeste respecto al eje vertical como se indica en la Figura.

También sabemos que la dirección de las gotas de lluvia con respecto a un sistema de referencia móvil (el peatón caminando), $\vec{v}'$, es vertical (solo se moja la parte superior de su ropa).



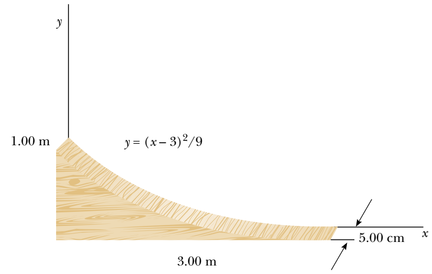
Por la ley de composición de velocidades sabemos que $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$, donde $\vec{V}$ es la velocidad del sistema de referencia móvil (el peatón) con respecto al sistema de referencia fijo en el suelo.

De acuerdo con la figura, esta velocidad relativa tiene que estar dirigida hacia el oeste.

Por otra parte

$$V = v\ \sin 10^{\circ} = 0{,}9\ \mathrm{m/s}.$$

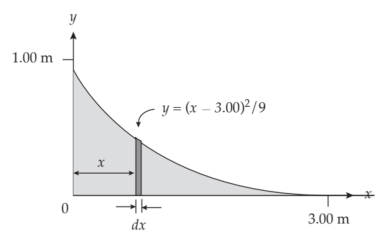
Cuestión 3: **Se construye una pista de madera para un coche de automodelismo como la que se muestra en la Figura. La pista tiene 5.00 cm de ancho, 1.00 m de alto y 3.00 m de longitud. Es sólida y homogénea. La pista se corta de manera que forme una parábola con la ecuación $y = (x-3)^2/9$. Encuentre la coordenada horizontal del centro de masas de esta pista.**



Nota: solo se pide la coordenada horizontal, es decir, la componente x del centro de masas.

Solución:

Sabiendo que la pista es homogénea, es decir que tiene la misma densidad en todos sus puntos, la coordenada x del centro de masas vendrá dada por la expresión



$$x_{\text{CM}} = \frac{\iint x\, dA}{\iint dA}.$$

Calculamos primero la integral del numerador

$$\iint x\, dA = \int_{x=0}^{x=3} x\, dx \int_{y=0}^{y=(x-3)^2/9} dy = \int_{x=0}^{x=3} x\, dx\, \left(y]_{y=0}^{y=(x-3)^2/9} \right) = \int_{x=0}^{x=3} x \frac{(x-3)^2}{9} dx =$$

$$= \frac{1}{9}\int_{x=0}^{x=3} (x^3 - 6x^2 + 9x) dx = \frac{1}{9}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} \right)\Bigg]_{x=0}^{x=3} = \frac{1}{9}\left(\frac{81}{4} - \frac{162}{3} + \frac{81}{2} \right) = \frac{9}{4} - \frac{18}{3} + \frac{9}{2} = 0.75$$

Calculamos ahora la integral del denominador

$$\iint dA = \int_{x=0}^{x=3} dx \int_{y=0}^{y=(x-3)^2/9} dy = \int_{x=0}^{x=3} dx\, \left(y]_{y=0}^{y=(x-3)^2/9} \right) = \int_{x=0}^{x=3} \frac{(x-3)^2}{9} dx =$$

$$= \frac{1}{9}\int_{x=0}^{x=3} (x^2 - 6x + 9) dx = \frac{1}{9}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 9x \right)\Bigg]_{x=0}^{x=3} = \frac{1}{9}\left(\frac{27}{3} - \frac{54}{2} + 27 \right) = 1 - 3 + 3 = 1.0$$

Por la coordenada x del centro de masas estará localizada en

$$x_{\text{CM}} = \frac{\iint x\, dA}{\iint dA} = \frac{0.75}{1.00} = 0.75 \text{ m.}$$

Cuestión 4: ¿Cuánto calor es necesario suministrar para transformar 1,5 kg de hielo a -20°C y 1 atm en vapor? (0,5 puntos).

Nota 1: Este proceso consta de cuatro partes: (1) elevar la temperatura del hielo desde -20°C a 0°C, (2) fundir el hielo, (3) elevar la temperatura del agua desde 0°C a 100°C, y (4) evaporar el agua.

Nota 2:
El calor específico del hielo es de $c = 2,05$ kJ/kg·K.
El calor latente de fusión del hielo es $L_\mathrm{f} = 333,5$ kJ/kg.
El calor específico del agua es de $c = 4,18$ kJ/kg·K.
El calor latente de vaporización del agua es $L_\mathrm{v} = 2257$ kJ/kg.

Problema extraído del libro Física para la Ciencia y la Tecnología, Tipler y Mosca, Editorial Reverté, Sexta edición.

Solución:

Utilizamos $Q_1 = mc\Delta T$ para hallar el calor necesario para elevar la temperatura del hielo a 0°C

$$Q_1 = mc\Delta T = (1,5 \text{ kg})\times(2,05 \text{ kJ/kg·K}) \times (20 \text{ K}) = 61,5 \text{ kJ} = 0,0615 \text{ MJ}.$$

Posteriormente, utilizamos el calor latente de fusión para hallar el calor Q_2, necesario para fundir el hielo

$$Q_2 = mL_\mathrm{f} = (1,5 \text{ kg}) \times (333,5 \text{ kJ/kg}) = 500 \text{ kJ} = 0,500 \text{ MJ}.$$

En tercer lugar, determinamos el calor necesario Q_3 para elevar la temperatura del agua de 0°C a 100°C

$$Q_3 = mc\Delta T = (1,5 \text{ kg})\times(4,18 \text{ kJ/kg·K}) \times (100 \text{ K}) = 627 \text{ kJ} = 0,627 \text{ MJ}.$$

Por último, utilizamos el calor latente de vaporización para hallar el calor Q_4, necesario para vaporizar el agua

$$Q_4 = mL_\mathrm{v} = (1,5 \text{ kg}) \times (2257 \text{kJ/kg}) = 3385 \text{ kJ}.$$

Finalmente, el calor total es la suma de los cuatro calores obtenidos anteriormente

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 4,57 \text{ MJ}.$$

Cuestión 5:

(a) Reescribe los siguientes resultados en su forma más clara, con un número adecuado de cifras significativas (0,25 puntos):

- **Altura medida = 5.03 $\pm$ 0.04329 m**
- **Carga medida = -3.21$\times$ $10^{-19}$$\pm$ 2.67$\times$$10^{-20}$ C**
- **Longitud de onda medida = 0.000 000 563 $\pm$ 0.000 000 07 m**
- **Momento medido = 3.267 $\times$ $10^3$$\pm$ 42 g cm/s**

(b) Suponga que ha medido tres cantidades x, y, y z con los siguientes valores

$\boldsymbol{x = 8.0 \pm 0.2}$, $\boldsymbol{y = 5.0 \pm 0.1}$, $\boldsymbol{z = 4.0 \pm 0.1}$

Expresar las incertidumbres en porcentajes, y calcular $q = xy/z$ con su incertidumbre δq (0,25 puntos)

Problemas extraídos del libro "An introduction to error analysis", J. R. Taylor, University of California Books.

Solución:

(a) Altura medida = (5.03 $\pm$ 0.04) m
Carga medida = (-3.2 $\pm$ 0.3)$\times$$10^{-19}$ C
Longitud de onda medida = (5.6 $\pm$ 0.7) $\times$ 10^{-7} m
Momento medido = (3.27$\pm$ 0.04) $\times$ 10^3 g cm/s.

(b) Las incertidumbre expresadas en porcentajes para x, y, y z serían 2.5%, 2%, y 2.5%, respectivamente.

El valor de $q = 10.0$, y su incertidumbre

$$\frac{\delta q}{q} = \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y} + \frac{\delta z}{z} = \frac{0.2}{8.0} + \frac{0.1}{5.0} + \frac{0.1}{4.0} \quad \Rightarrow \quad \delta q = 0.7.$$

Por lo tanto, $q = 10.0 \pm 0.7$.