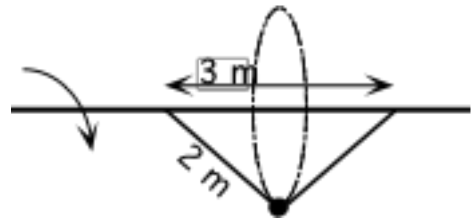
Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Enero de 2019
Problemas (Dos puntos por problema).

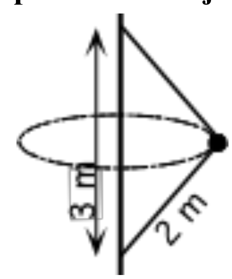
Problema 1: Una masa de 4 kg está sujeta a una barra horizontal, como indica la figura. Las cuerdas están bajo tensión cuando la barra gira alrededor de su eje.



- **(a) Calcula la distancia que separa la masa del eje (0,25 puntos)**

Si la velocidad de la masa es constante e igual a 4 m/s,

- **(b) Calcula la aceleración centrípeta (0,25 puntos)**
- **(c) Calcula la tensión de las cuerdas cuando la masa está en su punto más bajo (0,25 puntos)**
- **(d) Calcula la tensión de las cuerdas cuando la masa está en su punto más alto (0,25 puntos)**



Ahora colocamos la barra vertical, y la velocidad de la masa es de 6 m/s,

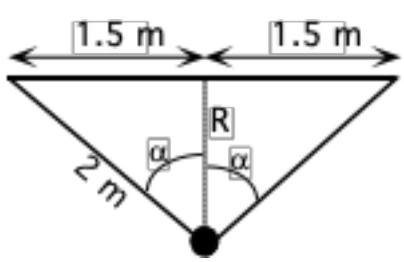
- **(e) Calcula la tensión de la cuerda inferior (0,5 puntos)**
- **(f) Calcula la tensión de la cuerda superior (0,5 puntos)**

Nota: en los apartados anteriores, como paso previo para resolverlos, representa todas las fuerza que actúan sobre la masa

Problema propuesto por el Prof. Jesús Fernández-Rodríguez

Solución:

(a) Primero calculamos los ángulos del triángulo formado por las cuerdas y la barra:



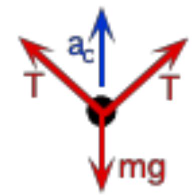
Sen $(\alpha) = 1.5/2 \Rightarrow \boxed{\alpha = 48.59^\circ}$

La distancia de la masa a la barra es $R = 2 \cos(\alpha) = 1.323$ m

(b) La aceleración centrípeta vale $\boxed{a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{4^2}{1.323} = 12.09 \text{ m/s}^2}$

Como la velocidad es constante, la aceleración centrípeta vale lo mismo en la parte superior e inferior.

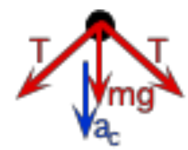
(c) Si la masa está en su punto más bajo, las fuerzas que actúan son:



Aplicando la 2ª ley de Newton $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ a lo largo de la dirección vertical y teniendo en cuenta que por simetría las tensiones de las dos cuerdas son iguales

$$2T\cos(\alpha) - mg = ma_c \;\Rightarrow\; T = \frac{m(a_c + g)}{2\cos(a)} = \frac{4(12.09 + 9.81)}{2\cos(48.59)} = \boxed{66.22\text{ N}}$$

(d) Cuando la masa está en su punto más alto, las fuerzas que actúan son



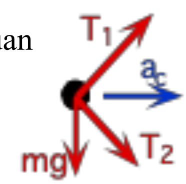
Aplicando la 2ª ley de Newton $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ a lo largo de la dirección vertical y teniendo en cuenta que por simetría las tensiones de las dos cuerdas son iguales

$$2T\cos(\alpha) + mg = ma_c \;\Rightarrow\; \boxed{T =} \frac{m(a_c - g)}{2\cos(a)} = \frac{4(12.09 - 9.81)}{2\cos(48.59)} = \boxed{6.89\text{ N}}$$

(e) y (f) En este caso la velocidad es diferente, por la que la aceleración centrípeta vale

$$\boxed{a_c} = \frac{v^2}{R} = \frac{6^2}{1.323} = \boxed{27.21\text{ m/s}^2}$$

Las tensiones no valen lo mismo en las dos cuerdas, y las fuerzas que actúan son:



$$\text{x:}\quad T_1\cos(\alpha) + T_2\cos(\alpha) = ma_c \;\Rightarrow\; T_1 = \frac{ma_c}{\cos(a)} - T_2 \qquad (1.1)$$

$$\text{y:}\quad T_1\,\text{sen}(\alpha) - T_2\,\text{sen}(\alpha) - mg = 0 \qquad (1.2)$$

Sustituyendo el valor de T_1 en la ecuación 1.2 :

$$\left(\frac{ma_c}{\cos(a)} - T_2\right)\text{sen}(\alpha) - T_2\,\text{sen}(\alpha) - mg = 0 \;\Rightarrow$$

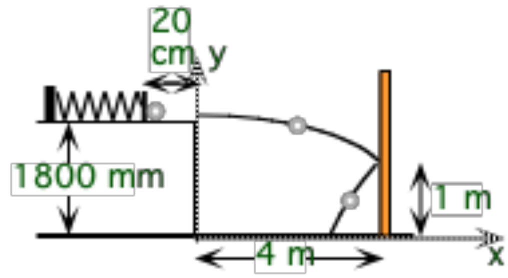
$$ma_c\,\text{tg}(\alpha) - 2\,T_2\,\text{sen}(\alpha) - mg = 0 \;\Rightarrow$$

$$\boxed{T_2} = \frac{m\,(a_c\, tg(a) - g)}{2\ sen\ (a)} = \frac{4\ (27.21\ tg(4859) - 9.81)}{2\ sen\ (4859)} = \boxed{56.11\ N}$$

Finalmente, sustituyendo este valor en la ecuación (1.1):

$$\boxed{T_1} = \frac{4\ \ 27.21}{cos\ (48.59)} - 56.11 = \boxed{107.7\ N}$$

Problema 2: Tenemos un muelle sobre una superficie horizontal a una altura de 1800 mm y una pared vertical lisa a 4 m de distancia. Utilizamos el muelle para lanzar una bola de 2 kg de peso, para lo cual, lo comprimimos 20 cm. Sabiendo que la bola choca con la pared a una altura de 1 m y que el coeficiente de restitución entre ambos es de e = 0.5, determinar:



(a) La constante del muelle (0,75 puntos).
(b) El punto del eje x en el cual la bola llega al suelo (0,75 puntos).
(c) Angulo que forma la trayectoria con la horizontal en dicho punto (0,25 puntos).
(d) Ecuación de la trayectoria que sigue la bola desde que abandona el muelle hasta que choca contra la pared (0,25 puntos).

Nota: el coeficiente de restitución se define como $e = -\frac{v'}{v}$

Problema propuesto por el Prof. Jesús Rodríguez

Solución:

(a) En la dirección vertical, el movimiento es uniformemente acelerado $\Rightarrow$

$y = y_0 + v_{0y}\, t + (1/2)\, a_y\, t^2 \Rightarrow$

$1.0 = 1.8 + 0 + (1/2)\,(-9.81)\, t^2 \;\Rightarrow\; t^2 = (2\bullet 0.8)/\,9.81 \;\Rightarrow\qquad \boxed{t = 0.4039\ s}$

Este es el tiempo que la pelota tarda en llegar desde el muelle (y = 1.8 m) hasta la pared (y = 1 m).

En la dirección horizontal, el movimiento es uniforme $\Rightarrow$

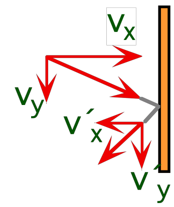
$v_x = x/t = 4\,/\,0.4039 \;\Rightarrow\; \boxed{v_x = 9.9034\ m/s}$

Cuando la bola sale despedida por el muelle, solo tiene velocidad horizontal: $v_x = 9.9045$ m/s. Para calcular la constante del muelle, utilizamos el que la energía potencial elástica del muelle se convierte en energía cinética:

$1/2\ Kx^2 = 1/2\ mv^2 \;\Rightarrow$

$K = mv^2/\,x^2 = 2\bullet (9.9045)^2/\,(0.2)^2 = \boxed{4905\ N/m}$

(b) Las componentes de la velocidad de la bola al llegar a la pared son:



$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= \qquad\qquad\qquad = \ 9.9045 \text{ m/s} \\ v_y &= -\,g\,t = -9.81\bullet 0.4039 = -\,3.9623 \text{ m/s} \end{aligned}}$$

El choque que realiza la bola contra la pared es oblicuo, por lo que en la dirección y la velocidad no cambia,

$$\boxed{v'_y = v_y = -\,3.9623 \text{ m/s}}$$

mientras que en la dirección x hay que aplicar la ecuación del coeficiente de restitución:

$$e = -\,\frac{v'_x - v'_{Px}}{v_x - v_{Px}} \qquad \text{con } v'_{Px} = v_{Px} = 0 \quad \Rightarrow \quad e = -\,\frac{v'_x}{v_x} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{v'_x = -\,e\,v_x = -\,0.5\bullet 9.9045 \text{ m/s} = -\,4.9523 \text{ m/s}}$$

para calcular el tiempo que tarda en llegar de la pared (y = 1 m) al suelo(y = 0 m), recordamos que en la dirección vertical el movimiento es uniformemente acelerado $\Rightarrow$ $y = y_0 + v_{0y}\,t + (1/2)\,a_y\,t^2 \Rightarrow$

$$0 = 1 - 3.9623\,t + (1/2)\,(-9.81)\,t^2 \quad \Rightarrow \quad 4.905\,t^2 + 3.9623\,t - 1 = 0$$

Es una ecuación de segundo grado con dos soluciones: una negativa, y la otra

$$\boxed{t = 0.2019 \text{ s}}$$

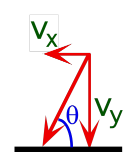
El espacio en la dirección x que recorre desde la pared es $\Delta x = v_x t = -\,4.9523\bullet 0.2019 = -\,0.9999$ m $\Rightarrow$

la coordenada x es $\boxed{x = 4 - 0.999 = 3.0001 \text{ m}}$

(c) Al llegar al suelo, las velocidades son: $v_x = -\,4.9523$ m/s

$v_y = -\,3.9623 - 9.81\bullet 0.2019 = -\,5.9429$ m/s

y $\operatorname{tg}\theta = -\,v_y / -v_x = 5.9429 / 4.9523 \Rightarrow \boxed{\theta = 50.19°}$



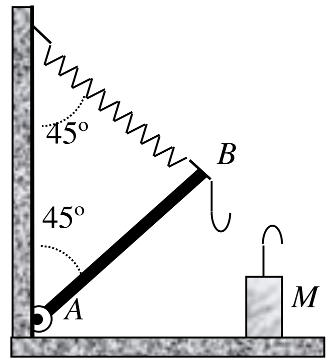
(d) $x = 9.9034\ t \quad \Rightarrow \quad t = x/9.903$

$y = 1.8 - (1/2)\ 9.81\ t^2 \quad \Rightarrow \quad$ (sustituyendo t) $\quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 1.8 - 0.05\ x^2}$

Problema 3: En el sistema de la figura la barra homogénea AB tiene una longitud de 100 cm y una masa de 6 kg. En el equilibrio los ángulos en A y en C son de 45° (el triángulo es isósceles). Si la constante elástica del resorte es *K* = 400 N/m,

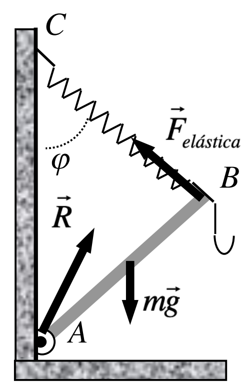
(a) Calcular su longitud natural (1 punto).

(b) Calcular el valor de la masa *M* que, colgada en el punto B, haga que el nuevo equilibrio se alcance cuando el ángulo en A sea de 60º (1 punto).



Problema propuesto por el Prof. Jesús Rodríguez

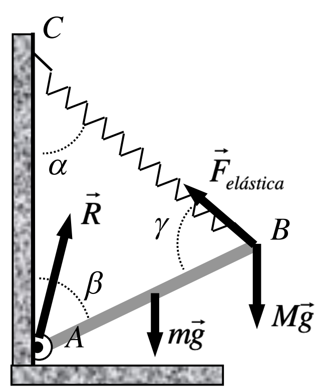
Solución:



(a) En la situación de equilibrio indicada en la figura al tener un triángulo rectángulo isósceles la longitud l del muelle será la misma que la longitud L de la barra, $l = L = 100\text{ cm}$, y la distancia entre A y el enganche del muelle a la pared será $\overline{AC} = \sqrt{2}\,L = 141.4\text{ cm}$. Como la barra está en equilibrio, si imponemos que el momento de fuerzas total respecto de A sea nulo podemos calcular la longitud natural del muelle:

$$F_{elástica}L - mg\left(\frac{L}{2}\right)\text{sen}\,\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad k\,\Delta l = \frac{1}{2}mg\,\text{sen}\,\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \Delta l = \frac{mg}{2k}\text{sen}\,\varphi = 5.20\text{ cm} \quad \Rightarrow \quad l_0 = l - \Delta l = \boxed{94.80\text{ cm}}$$



Si ahora colgamos del extremo la masa M el nuevo diagrama de fuerzas será el representado en la figura. Con los datos del enunciado vamos a calcular los demás ángulos.

El ángulo α lo podemos poner en función de β, que es conocido, razonando sobre el triángulo:

La distancia desde la pared al punto B la podemos calcular a partir de l y $\sin\alpha$, o partir de L y $\sin\beta$, con lo que tendríamos que

$$l\sin\alpha = L\sin\beta.$$

Por otra parte, la suma de las proyecciones sobre la pared vertical tiene que ser igual a la distancia entre A y B, con lo que
$l\cos\alpha + L\cos\beta = \sqrt{2}L$.

Si juntamos estas dos ecuaciones,

$$\left.\begin{array}{r} l\,\mathrm{sen}\alpha = L\,\mathrm{sen}\beta \\ l\cos\alpha = \sqrt{2}L - L\cos\beta \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{sen}\beta}{\sqrt{2} - \cos\beta} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 43.45^{\circ}$$

El ángulo γ será: $\gamma = 180^{\circ} - \alpha - \beta = 76.55^{\circ}$

Aplicando el teorema de los senos para los ángulos α y β podemos calcular la nueva longitud del muelle y su alargamiento:

$$\frac{\mathrm{sen}\beta}{l} = \frac{\mathrm{sen}\alpha}{L} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{\mathrm{sen}\beta}{\mathrm{sen}\alpha}L = 125.93\,\mathrm{cm} \quad \Rightarrow \quad \Delta l = l - l_0 = 31.13\,\mathrm{cm}$$

Replanteamos el equilibrio volviendo a calcular momentos respecto de *A*:

$$F_{elástica} L\,\mathrm{sen}\gamma - mg\left(\frac{L}{2}\right)\mathrm{sen}\beta - MgL\,\mathrm{sen}\beta = 0$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{F_{elástica}\,\mathrm{sen}\gamma}{g\,\mathrm{sen}\beta} - \frac{1}{2}m = \frac{k\,\Delta l\,\mathrm{sen}\gamma}{g\,\mathrm{sen}\beta} - \frac{1}{2}m = \boxed{11.27\,\mathrm{kg}}$$