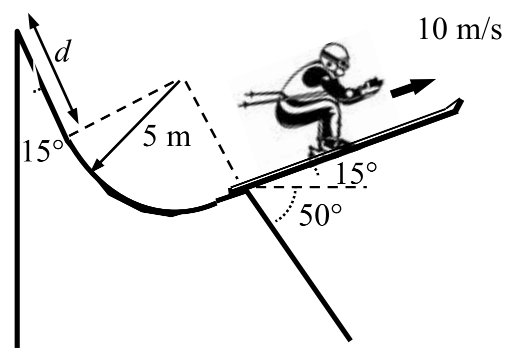
Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Enero de 2018
Problemas (Dos puntos por problema).



Problema 1: Un esquiador de 80 kg de masa deja una rampa de salto con una velocidad de 10 m/s formando 15° con la horizontal (ver figura). La inclinación del costado de la montaña es de 50° y la resistencia del aire es despreciable. Halle:

a) La distancia a la que cae el esquiador a lo largo del costado de la montaña. (0,5 puntos)
b) Las componentes de la velocidad justamente en el instante en el que cae. (0,5 puntos)
Si la rampa de descenso posee un rozamiento despreciable y consta de un tramo recto de longitud *d* y una inclinación de 15º con la vertical seguido de un cuarto de circunferencia de radio 5 m determinar:
c) la longitud de descenso *d* que permite al esquiador salir con la velocidad indicada de 10 m/s. (0,5 puntos)
d) Repetir el apartado anterior si cuando se realiza el salto está presente un viento horizontal hacia la izquierda que ejerce sobre el esquiador una fuerza horizontal de 200 N. (0,5 puntos)
Problema propuesto por el Prof. Jesús Rodríguez.

Solución:

a) Si ponemos el origen de coordenadas en la posición en la que el esquiador sale de la rampa, en ese momento ponemos a cero el cronómetro, y orientamos los ejes X e Y hacia la derecha y hacia arriba, las ecuaciones del movimiento parabólico del esquiador serán ($\theta = 15º$):

$$x(t) = v_0 \cos\theta\, t \qquad v_x(t) = v_0 \cos\theta$$

$$y(t) = v_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \quad v_y(t) = v_0 \operatorname{sen}\theta - g t$$

Por otro lado cuando el esquiador entre en contacto con el suelo de la ladera tenemos que ($\beta = 50º$):

$$\left.\begin{array}{ll} x_{suelo} = v_0 \cos\theta \, t_{suelo} & \dfrac{y_{suelo}}{x_{suelo}} = -\text{tg}\beta \\ y_{suelo} = v_0 \,\text{sen}\theta \, t - \dfrac{1}{2} g t_{suelo}^2 & \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} t_{suelo} = 2.877 \text{ s} \\ x_{suelo} = 27.79 \text{ m} \\ y_{suelo} = -33.12 \text{ m} \end{array}\right.$$

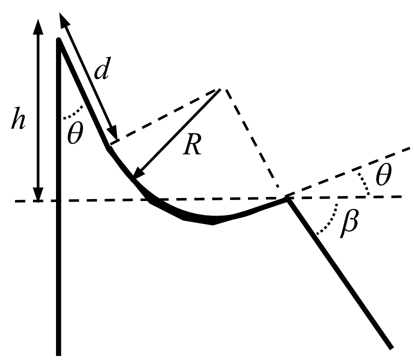
La distancia recorrida a lo largo de la montaña será: $d = \sqrt{x_{suelo}^2 + y_{suelo}^2} = \boxed{43.24 \text{ m}}$

b) La velocidad cuando el esquiador entre en contacto con el suelo de la ladera será:

$$v_x\left(t_{suelo}\right) = v_0 \cos\theta = \boxed{9.659 \text{ m/s}}$$

$$v_y\left(t_{suelo}\right) = v_0 \,\text{sen}\theta - g t_{suelo} = \boxed{-25.61 \text{ m/s}}$$

c) De la figura se obtiene que:



$$h = \left(d + R\right)\cos\theta - R\,\text{sen}\theta$$

Aplicando la conservación de la energía entre la posición inicial y final:

$$\Delta E_{sist.} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_{\substack{pot.\\grav.}} + \Delta E_{cinet.} = 0$$

$$\Rightarrow \quad Mg\Delta y + \left(\frac{1}{2}Mv^2 - 0\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad -Mgh + \frac{1}{2}Mv^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -Mg\left[\left(d+R\right)\cos\theta - R\,\text{sen}\theta\right] + \frac{1}{2}Mv^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad d = \left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{g\cos\theta} + R\tan\theta\right) - R = \boxed{1.622 \text{ m}}$$

d) Ahora tenemos que tener en cuenta que el viento realiza un trabajo sobre el sistema variando la energía de éste:

$$\Delta E_{sist.} = W_{viento} = \vec{F}_{viento}\Delta\vec{r} = F_{viento,x}\Delta x = \left(-F_{viento}\right)\left[\left(d+R\right)\text{sen}\theta + R\cos\theta\right]$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{\substack{pot.\\grav.}} + \Delta E_{cinet.} = -F_{viento}\left[\left(d+R\right)\text{sen}\theta + R\cos\theta\right]$$

$$\Rightarrow \quad -Mg\left[\left(d+R\right)\cos\theta - R\text{sen}\theta\right] + \frac{1}{2}Mv^2 = -F_{viento}\left[\left(d+R\right)\text{sen}\theta + R\cos\theta\right]$$

$$\Rightarrow \quad d = \left[\frac{1}{2}\frac{v^2}{g} + R\text{sen}\theta + \left(\frac{F_{viento}}{Mg}\right)R\cos\theta\right]\left[\cos\theta - \left(\frac{F_{viento}}{Mg}\right)\text{sen}\theta\right]^{-1} - R = \boxed{3.477 \text{ m}}$$

Como es de esperar el resultado es mayor que el del apartado anterior.

Problema 2: Una pequeña esfera de 100 g de masa cuelga de un hilo de 2 m de longitud cuyo otro extremo está sujeto a un punto fijo. Lanzamos horizontalmente una segunda esfera que choca frontalmente con la primera, siendo el coeficiente de restitución *e* = 0.25.

a) Con qué velocidad mínima tendría que salir la esfera de 100 g después del choque para que describa un movimiento circular completo en el plano vertical (0,4 puntos).

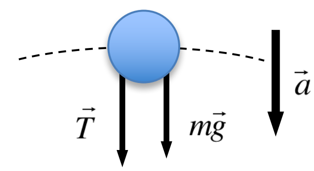
b) Cuando sucede lo anterior y la segunda esfera cae verticalmente después del choque, calcular la velocidad que ha de llevar la segunda esfera (0,6 puntos) y su masa (0,6 puntos).

c) ¿Qué energía se pierde en el choque? (0,4 puntos).

Nota: el coeficiente de restitución se define como $e = -\frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{2i} - v_{1i}}$.

Problema propuesto por los Profs. José Javier Sandonís y Jesús Rodríguez.

Solución:



a) La esfera 1 va a realizar un movimiento circular de radio R (a lo largo de la solución utilizaremos R o L indistintamente para referirnos a la longitude del hilo). Dibujando el diagrama de fuerzas cuando se encuentra en la parte más alta del círculo vemos que su aceleración va a ser vertical y por lo tanto sólo tendrá componente normal $a_n = \frac{v_{1,\text{arriba}}^2}{R}$. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\vec{T} + m_1\vec{g} = m_1\vec{a}_1 \quad \Rightarrow \quad T + m_1 g = m_1 a_1 = m_1 \frac{v_{1\,arriba}^2}{R} \quad \Rightarrow \quad T = m_1\left(\frac{v_{1\,arriba}^2}{R} - g\right)$$

Para la velocidad arriba mínima la cuerda pierde su tension, $T = 0$, con lo que

$$m_1\left(\frac{v_{1\,arriba}^2}{R} - g\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\substack{1\,arriba \\ mínima}} = \sqrt{gL}$$

Aplicando conservación de la energía entre la posición de arriba y la de abajo (justo al salir del choque):

$$\frac{1}{2} m_1 v_{\substack{1\,abajo \\ mínima}}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{\substack{1\,arriba \\ mínima}}^2 + m_1 g(2L) \quad \Rightarrow \quad v_{\substack{1\,abajo \\ mínima}} = \sqrt{v_{\substack{1\,arriba \\ mínima}}^2 + 4gL} = \sqrt{5gL} = \boxed{9.90 \text{ m/s}}$$

b) Si la segunda esfera, que impacta horizontalmente con la primera, cae después verticalmente quiere decir que su velocidad horizontal después del choque es nula. Aplicando la conservación del momento lineal (en la dirección horizontal) y la ecuación del coeficiente de restitución:

$$\left.\begin{array}{l} m_2 v_2 = m_1 v_{1\,\substack{abajo\\mínima}} \\[2ex] e = \dfrac{1}{4} = -\dfrac{v_{1\,\substack{abajo\\mínima}}}{-v_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m_2 = \dfrac{m_1}{4} = \boxed{25\ \text{g}} \\[2ex] v_2 = 4 v_{1\,\substack{abajo\\mínima}} = \boxed{39.60\ \text{m/s}} \end{array}\right.$$

c) La variación de energía cinética en el choque será:

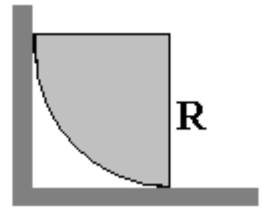
$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m_1 v^2_{1\,\substack{abajo\\mínima}} - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \boxed{-14.7\ \text{J}}$$

Problema 3: Una placa está formada por un cuarto de círculo de radio R y masa M. Se apoya sobre una pared vertical lisa y un suelo rugoso. Determinar:

a) Las coordenadas del centro de masas respecto del sistema de referencia pared-suelo (0,6 puntos).

b) El valor mínimo del coeficiente de rozamiento compatible con el equilibrio (0,8 puntos).

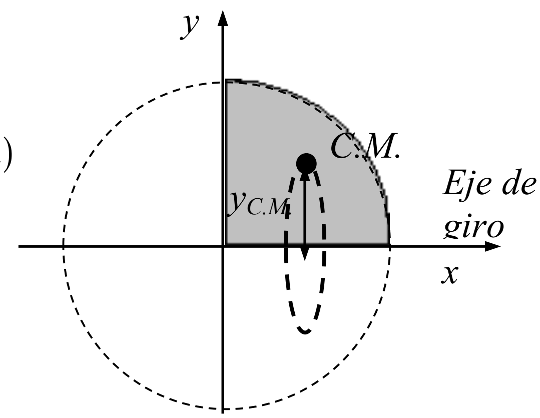
c) Las reacciones en los apoyos si M = 3 kg (0,6 puntos).



Problema propuesto por los Profs. José Javier Sandonís y Jesús Rodríguez.

Solución:

a) Aplicando el segundo teorema de Pappus Guldin a la placa de la figura:



$$Vol._{generado} = A_{placa} \cdot (\text{recorrido del C.M. de la placa})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{1}{4}\left(\pi R^2\right)\cdot\left(2\pi y_{C.M.}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y_{C.M.} = \frac{4R}{3\pi} \quad \overset{(\text{por simetría})}{\Rightarrow} \quad x_{C.M.} = \frac{4R}{3\pi}$$

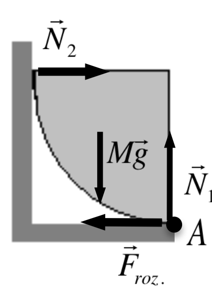
Teniendo en cuenta que nuestro origen de coordenadas se sitúa en la esquina entre la pared y el suelo:

$$\vec{r}_{C.M.} = (R,R) - \left(\frac{4R}{3\pi},\frac{4R}{3\pi}\right) = \boxed{\left(R-\frac{4R}{3\pi}, R-\frac{4R}{3\pi}\right)}$$

b) Dibujando el diagrama de fuerzas que actúan sobre la placa y aplicando las ecuaciones de la estática:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N_2 - F_{roz.} = 0 \\ N_1 - Mg = 0 \end{cases}$$

$$\sum_i \vec{\tau}_{i,A} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 R - Mg\cdot\frac{4R}{3\pi} = 0$$



$$\Rightarrow \quad \begin{cases} N_1 = Mg \\ F_{roz.} = N_2 = \dfrac{4}{3\pi} Mg \end{cases}$$

El valor mínimo necesario del coeficiente de rozamiento sería:

$$F_{roz.} \leq \mu N_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3\pi} \leq \mu \quad \Rightarrow \quad \mu_{mín.} = \boxed{\frac{4}{3\pi} = 0.4244}$$

c) Para el valor de masa que nos dan:

$$N_1 = Mg = \boxed{29.4 \text{ N}}$$

$$F_{roz.} = N_2 = \frac{4}{3\pi} Mg = \boxed{12.48 \text{ N}}$$