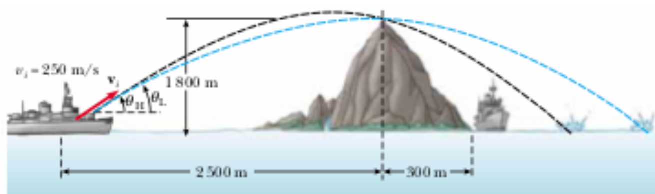
Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Enero de 2017
Problemas (Dos puntos por problema).

Problema 1: Un barco enemigo está en el lado este de una isla montañosa como se muestra en la figura. El barco enemigo puede maniobrar dentro de los 2500 m de distancia horizontal a la montaña de la isla que tiene 1800 m de altura y puede lanzar proyectiles a una velocidad inicial de 250 m/s. Si la orilla de la playa al oeste está a 300 m horizontalmente de la montaña ¿cuáles son las posiciones en el lado oeste en las que un barco estaría a salvo del barco enemigo?



Nota: recordad que $\frac{\mathbf{1}}{(\cos\boldsymbol{\theta})^2} = (\tan\boldsymbol{\theta})^2 + \mathbf{1}$

Solución:

Para resolver este problema tenemos que calcular cuáles son los ángulos máximo (θ_{H}) y mínimo (θ_{L}) que permiten superar la montaña, es decir que para una distancia $x = 2500$ m, $y = 1800$ m. El ángulo máximo nos dará el punto más próximo de impacto. El ángulo mínimo nos dará el punto más lejano de impacto (ver figura).

De acuerdo con las ecuaciones del tiro parabólico,

$$y_f = v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_i(\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2,$$

$$x_f = v_{xi}t = v_i(\cos\theta)t.$$

De esta segunda ecuación podemos despejar el tiempo, y sustituirlo en la primera

$$t = \frac{x_f}{v_i\cos\theta},$$

$$y_f = v_i(\sin\theta)\frac{x_f}{v_i\cos\theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x_f}{v_i\cos\theta}\right)^2 = x_f\tan\theta - \frac{gx_f^2}{2v_i^2(\cos\theta)^2}.$$

Como sabemos que $\frac{1}{(\cos\theta)^2} = (\tan\theta)^2 + 1$, entonces sustituyendo en esta última ecuación,

$$y_f = x_f\tan\theta - \frac{gx_f^2}{2v_i^2}(\tan\theta^2 + 1)$$

Reagrupando términos

$$0 = \frac{g x_f^2}{2 v_i^2} \tan\theta^2 - x_f \tan\theta + \left(\frac{g x_f^2}{2 v_i^2} + y_f\right).$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, encontramos dos posibles soluciones para la tangente, es decir, en dos posibles soluciones para el ángulo que se corresponden con el ángulo máximo y mínimo.

Para la primera de las soluciones:

$$\tan\theta = 3{,}905 \quad \Longrightarrow \quad \theta_{\mathrm{H}} = 75{,}6°$$

Que se traduce en un rango de alcance de

$$R(\theta_{\mathrm{H}}) = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_{\mathrm{H}}}{g} = 3{,}07{\times}10^3\,\mathrm{m},$$

medidos desde el barco enemigo. Si lo medimos con respecto a la playa del lado oeste,

$$R(\theta_{\mathrm{H}}) = 3{,}07{\times}10^3 - 2500 - 300 = 270\ \mathrm{m}.$$

Para la segunda de las soluciones:

$$\tan\theta = 1{,}197 \quad \Longrightarrow \quad \theta_{\mathrm{L}} = 50{,}1°$$

Que se traduce en un rango de alcance de

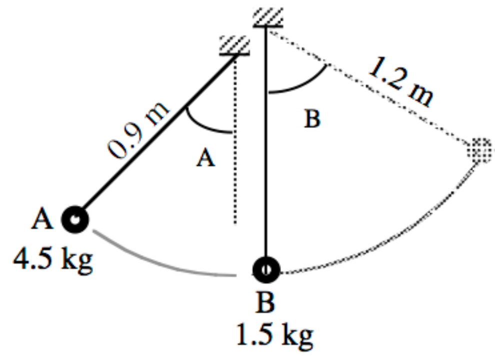
$$R(\theta_{\mathrm{L}}) = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_{\mathrm{L}}}{g} = 6{,}28{\times}10^3\,\mathrm{m},$$

medidos desde el barco enemigo. Si lo medimos con respecto a la playa del lado oeste,

$$R(\theta_{\mathrm{L}}) = 6{,}28{\times}10^3 - 2500 - 300 = 3{,}48{\times}10^3\ \mathrm{m}.$$

Es decir, el barco se encontrará a salvo si se encuentra a una distancia menor de 270 m o mayor de 3480 m medidos desde la orilla de la playa.

Problema 2: La esfera A parte del reposo desde un ángulo θ_A = 60°, y tras dejarla caer libremente golpea a la B, siendo el coeficiente de restitución e = 0.9. Determinar:



(a) La velocidad de A antes del choque (0,4 puntos).
(b) La tensión que soporta el hilo de A justo antes del choque (0,4 puntos).
(c) La altura que alcanza la bola B (0,4 puntos).
(d) La energía perdida en el choque (0,4 puntos).
(e) El ángulo θ_A desde el que debe dejarse caer A para que el ángulo θ_B sea de 90° (0,4 puntos).

Solución:

(a) La pérdida de energía potencial gravitatoria se convierte en energía cinética. Supongamos la configuración inicial del sistema como aquella en la cual la bola A parte del reposo y la configuración final como aquella justo antes de que la bola A impacte sobre B. Entonces, las energías mecánicas de las configuraciones inicial y final valen

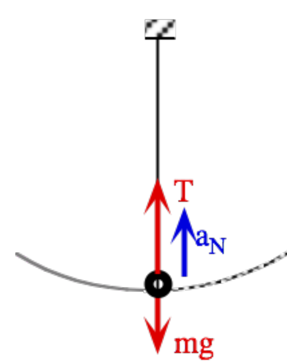
$$E_{\text{mec}}^{\text{ini}} = K^{\text{ini}} + U_{\text{pot. grav.}}^{\text{ini}} = mg\Delta h,$$

$$E_{\text{mec}}^{\text{fin}} = K^{\text{fin}} + U_{\text{pot. grav.}}^{\text{fin}} = \frac{1}{2}mv^2.$$

En las expresiones anteriores hemos tomado como cero de energías potenciales gravitatorias el punto en el que A impacta con B (el más bajo de la trayectoria).
Como no hay fuerzas disipativas, la energía mecánica se conserva, de donde resulta que

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\Delta h_A = mg(L_A - L_A\cos\theta_A) \Rightarrow v = \sqrt{2g(0{,}9 - 0{,}9\cos\theta_A)} = 2{,}97\ \text{m/s}.$$

(b) La masa A está realizando un movimiento circular, por lo que ésta poseerá una aceleración normal (a_N). Las dos únicas fuerzas que actúan sobre la misma son el peso y la tensión. Como la aceleración normal lleva la dirección de la tensión, significa que la tensión es mayor que el modulo del peso. Si escogemos un sistema de ejes en el cual el eje y toma valores positivos hacia arriba, entonces



$$\sum F_y = T - mg = ma_N = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad T = m\left(g + \frac{v^2}{r}\right)$$
$$= 88{,}29\ \text{N}.$$

En la expresión anterior, el radio de giro es la longitud de la cuerda de la que cuelga A.

(c) En el choque entre la bola A y la B sabemos que se conserva el momento lineal, con lo que

$$m_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} v_{\mathrm{B}} = m_{\mathrm{A}} v'_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} v'_{\mathrm{B}} \quad \Rightarrow \quad m_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{A}} = m_{\mathrm{A}} v'_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} v'_{\mathrm{B}}$$

A partir de la expresión del coeficiente de restitución, podemos despejar la velocidad de salida de la bola B después del choque

$$e = -\frac{v'_{\mathrm{B}} - v'_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{A}}} = \frac{v'_{\mathrm{B}} - v'_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{A}}} \quad \Longrightarrow \quad v'_{\mathrm{A}} = -e v_{\mathrm{A}} + v'_{\mathrm{B}}.$$

Introduciendo este valor en la ecuación de la conservación del momento lineal

$$m_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{A}} = m_{\mathrm{A}} v'_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} v'_{\mathrm{B}} = m_{\mathrm{A}}(-e v_{\mathrm{A}} + v'_{\mathrm{B}}) + m_{\mathrm{B}} v'_{\mathrm{B}},$$

$$m_{\mathrm{A}}(1+e) v_{\mathrm{A}} = (m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}) v'_{\mathrm{B}},$$

$$v'_{\mathrm{B}} = \frac{m_{\mathrm{A}}(1+e)}{(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})} v_{\mathrm{A}} = 4{,}23\ \mathrm{m/s}.$$

Una vez adquirida esta velocidad, la bola B comienza a oscilar ganando altura hasta que transforma toda su energía cinética en potencial. Siguiendo un procedimiento análogo al del apartado (a) llegamos a la conclusion de que

$$\Delta h_{\mathrm{B}} = \frac{v'^2_{\mathrm{B}}}{2g} = 0{,}91\ \mathrm{m}.$$

Este incremento de altura equivale a un ángulo de θ_{B} tal que

$$L_{\mathrm{B}} - L_{\mathrm{B}} \cos\theta_{\mathrm{B}} = \Delta h_{\mathrm{B}} \implies L_{\mathrm{B}}(1 - \cos\theta_{\mathrm{B}}) = \Delta h_{\mathrm{B}} \Longrightarrow \cos\theta_{\mathrm{B}} = 1 - \frac{\Delta h_{\mathrm{B}}}{L_{\mathrm{B}}} \implies \theta_{\mathrm{B}} = 76{,}2^{\circ}$$

(d) La energía perdida en el choque será la diferencia entre la energía cinética justo antes del choque y la de justo después del choque

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_{\mathrm{A}} v'^2_{\mathrm{A}} + \frac{1}{2} m_{\mathrm{B}} v'^2_{\mathrm{B}} - \frac{1}{2} m_{\mathrm{A}} v^2_{\mathrm{A}}.$$

Conocemos todos los datos menos v'_{A} , que la podemos obtener de la ecuación anterior

$$v'_{\mathrm{A}} = -e v_{\mathrm{A}} + v'_{\mathrm{B}} = 1{,}56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Sustituyendo los valores en la expresión de la variación de la energía resulta $\Delta E = -0.94\ J$.

(e) Si $\theta_{\mathrm{B}} = 90°$ $\Rightarrow$ $\Delta h_{\mathrm{B}} = 1{,}2$ m y utilizando la ecuación de la conservación de la energía mecánica para B entre el instante justo después del choque y el instante en el que se encuentra en el punto más alto,

$$\frac{1}{2} m_{\mathrm{B}} v_{\mathrm{B}}'^2 = m_{\mathrm{B}} g \Delta h_{\mathrm{B}} \quad \Longrightarrow \quad v_{\mathrm{B}}' = \sqrt{2g\Delta h_{\mathrm{B}}} = 4{,}85 \text{ m/s}.$$

El choque se produce en las mismas condiciones que en el apartado (c), por lo que podemos utilizar las mismas ecuaciones, en particular

$$v_{\mathrm{B}}' = \frac{m_{\mathrm{A}}(1+e)}{(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})} v_{\mathrm{A}},$$

que nos permite calcular cual debería ser la velocidad v_{A} de la bola A antes del choque, $v_{\mathrm{A}} = 3{,}40 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Aplicando la conservación de la energía que ya se había deducido en el apartado (a),

$$\frac{1}{2} m v_{\mathrm{A}}^2 = m g \Delta h_{\mathrm{A}} = m g (L_{\mathrm{A}} - L_{\mathrm{A}} \cos\theta_{\mathrm{A}}),$$

$$\Delta h_{\mathrm{A}} = \frac{v_{\mathrm{A}}^2}{2g} = 0{,}59 \text{ m},$$

$$\Delta h_{\mathrm{A}} = (L_{\mathrm{A}} - L_{\mathrm{A}} \cos\theta_{\mathrm{A}}) = L_{\mathrm{A}}(1 - \cos\theta_{\mathrm{A}}) \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_{\mathrm{A}} = 1 - \frac{\Delta h_{\mathrm{A}}}{L_{\mathrm{A}}},$$

$$\cos\theta_{\mathrm{A}} = 0{,}34,$$

$$\theta_{\mathrm{A}} = 69{,}9°.$$

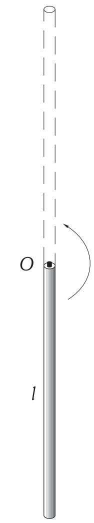
Problema 3: (a) Calcular el momento de inercia de una barra homogénea respecto a un eje perpendicular a ella y que pasa por su extremo. (0,5 puntos)

(b) ¿Cuál es la mínima velocidad angular que hay que comunicar a la barra de la figura para que ésta realice una vuelta completa alrededor de dicho eje partiendo de su posición inferior? (0,5 puntos)

En el caso de que se le comunique a la barra dicha velocidad angular mínima:

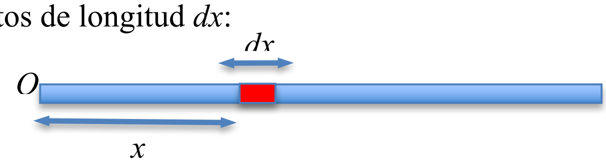
(c) ¿qué fuerza de reacción aparece en el enganche *O* en la posición inicial mostrada en la figura? (0,5 puntos)

(d) Calcular de nuevo dicha fuerza de reacción cuando la barra haya realizado un cuarto de vuelta y se encuentre pasando por la posición horizontal (0,5 puntos).



Solución:

a) Si colocamos la barra a lo largo del eje x con el origen en un extremo y dividimos la barra en elementos de longitud dx:

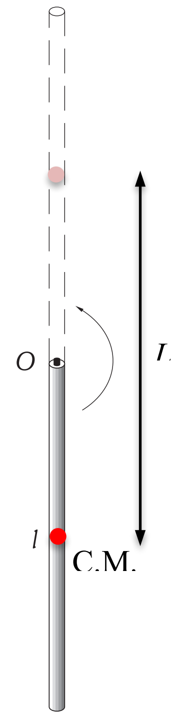


El momento de inercia respecto de un eje perpendicular a la barra y que pase por O será:

$$I_O = \int x^2\, dm = \int_0^L x^2 \lambda\, dx = \frac{1}{3}\lambda L^3 = \frac{1}{3}(\lambda L)L^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

donde λ es la densidad lineal de masa en la barra.

b) Cuando la barra pase por la parte superior en su recorrido circular lo puede hacer con cualquier velocidad, incluso con velocidad casi nula, ya que la barra no es una cuerda que pueda destensarse si la velocidad es baja (en el caso de la cuerda se requiere una velocidad mínima). Aplicando conservación de la energía entre la situación inferior y la superior:



$$\Delta E_{sist.} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_{\substack{pot.\\grav.}} + \Delta E_{cinet.} = 0$$

$$\Rightarrow \quad Mg\Delta h_{C.M.} + \left(\frac{1}{2} I_O \omega_{arriba}^2 - \frac{1}{2} I_O \omega_{abajo}^2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad MgL + \frac{1}{2} I_O \left(\omega_{arriba}^2 - \omega_{abajo}^2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{abajo}^2 = \frac{2MgL}{I_O} + \omega_{arriba}^2$$

La velocidad mínima será cuando pase por la parte superior con una velocidad prácticamente nula:

$$\Rightarrow \quad \omega_{\substack{abajo\\mínima}} = \sqrt{\frac{2MgL}{I_O}} = \boxed{\sqrt{\frac{6g}{L}}}$$

Nota: Si se quiere dividir la energía cinética de la barra en parte de traslación y parte de rotación habría que tener en cuenta el momento de inercia respecto al C.M.:

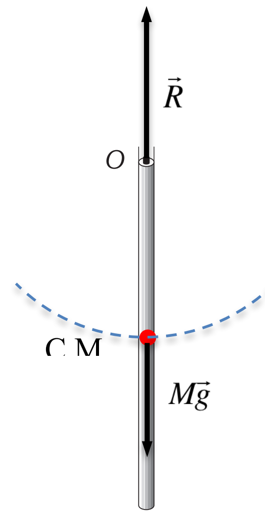
$$E_{cinet.} = E_{\substack{cinet.\\traslac.}} + E_{\substack{cinet.\\rotac.}} = \frac{1}{2} M V_{C.M.}^2 + \frac{1}{2} I_{C.M.} \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} M \left(\omega \frac{L}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} I_{C.M.} \omega^2 = \frac{1}{2} \left[I_{C.M.} + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right] \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} I_O \omega^2 \quad \left(\text{aplicando el teorema de Steiner} \right)$$

Pero como se puede ver el resultado es el mismo que utilizar sólo energía cinética de rotación alrededor del eje que pasa por *O*.

c) Si calculamos momentos de fuerza respecto de O la reacción en dicho punto no contribuye y el peso tampoco si la barra se encuentra en la posición vertical inferior. En este caso:



$$\left.\begin{array}{l}\sum_i \vec{M}_{i,O} = 0 \\ \sum_i \vec{M}_{i,O} = I_O\vec{\alpha}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \vec{\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{tangencial} = 0$$

El C.M. de la barra sólo tendrá aceleración normal, con lo que la reacción en O será vertical y aplicando la segunda ley de Newton:

$$\vec{R} + M\vec{g} = M\vec{a} \quad \Rightarrow \quad R - Mg = Ma_{normal} = M\omega^2_{\substack{abajo\\mínima}}\left(\frac{L}{2}\right) = 3Mg$$

$$\Rightarrow \quad R = \boxed{4Mg}$$

d) Cuando la barra haya realizado un cuarto de vuelta y se encuentre pasando por la posición horizontal aplicando de nuevo la conservación de la energía entre la situación inferior y la horizontal podemos calcular la velocidad de la barra al pasar por dicha posición:

$$\Delta E_{sist.} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_{\substack{pot.\\grav.}} + \Delta E_{cinet.} = 0$$

$$\Rightarrow \quad Mg\Delta h_{C.M.} + \left(\frac{1}{2}I_O\omega^2_{horizontal} - \frac{1}{2}I_O\omega^2_{\substack{abajo\\mínima}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad Mg\left(\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{2}I_O\left(\omega^2_{horizontal} - \omega^2_{\substack{abajo\\mínima}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{horizontal} = \sqrt{\omega^2_{\substack{abajo\\mínima}} - \frac{MgL}{I_O}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Si calculamos momentos de fuerza respecto de O la reacción en dicho punto no contribuye y el único momento de fuerzas es el ejercido por el peso. En este caso (cogiendo el sentido positivo de rotación antihorario, es decir el eje Z positivo hacia fuera de la figura):

$$\left.\begin{aligned}\sum_i \vec{M}_{i,O} &= -Mg\left(\frac{L}{2}\right)\hat{k}\\ \sum_i \vec{M}_{i,O} &= I_O\vec{\alpha}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{3g}{2L} \quad \Rightarrow \quad a_{tangencial} = \alpha\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{3}{4}g$$

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\vec{R} + M\vec{g} = M\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} R_x &= -Ma_{normal} = -M\omega^2_{horizontal}\left(\frac{L}{2}\right) = \boxed{-\frac{3}{2}Mg}\\ R_y - Mg &= Ma_{tangencial} = -\frac{3}{4}Mg \quad \Rightarrow \quad R_y = \boxed{\frac{1}{4}Mg}\end{aligned}\right.$$