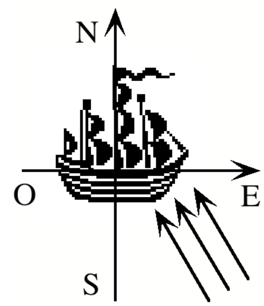
**Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química**
**Examen final. Enero de 2017**
**Cuestiones (Un punto por cuestión).**

**Cuestión 1: Un barco navega siguiendo el ecuador hacia el Este con una velocidad de 30 km/h. Desde el Sudeste hacia el ecuador sopla un viento con una velocidad de 15 km/h formando un ángulo de 60 ° con el ecuador.**




**(a) Hallar la velocidad del viento respecto al barco (0,5 puntos)**
**(b) Calcular el ángulo entre el ecuador y la dirección del viento en el sistema de referencia ligado al barco (0,5 puntos)**

**Solución:**

(a) Supongamos que tenemos un sistema de referencia fijo $(OXY)$ y otro móvil situado en el barco $(O'X'Y')$ de forma que ambos tengan los ejes paralelos. Si el eje $x$ es paralelo al ecuador, el sistema $(O'X'Y')$ se moverá con velocidad $\vec{V} = V\vec{\imath}$.

Tal como se discutió en la clase de teoría, la posición de una partícula respecto al sistema $O$ viene descrita un vector de posición $\vec{r}$, mientras que respecto al sistema $O'$ el vector de posición será $\vec{r}'$.

La relación entre los vectores posición en ambos sistemas es $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$.

Derivando, obtenemos la relación vectorial entre las velocidades,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{V} + \vec{v}',$$

de donde inmediatamente se deduce que

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}.$$

Como

$$\vec{V} = 30\vec{\imath}\ \mathrm{km/h},$$

$$\vec{v} = (-15 \ \cos 60 \, \vec{\imath} + 15 \ \sin 60 \, \vec{\jmath}) \text{ km/h} ,$$

entonces

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} = (-15 \ \cos 60 \, \vec{\imath} + 15 \ \sin 60 \, \vec{\jmath}) - 30 \, \vec{\imath} = (-37{,}5 \, \vec{\imath} + 12{,}99 \, \vec{\jmath}) \text{ km/h.}$$

$$|\vec{v}'| = 39{,}68 \text{ km/h.}$$

(b) Si el ángulo que forma la dirección del viento con el ecuador es $\theta$, su tangente vale

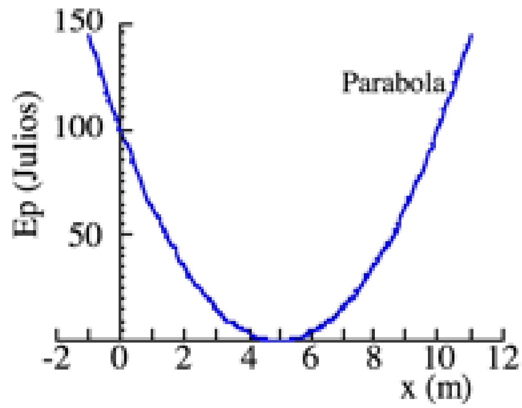
$$\tan \theta = \frac{v_y'}{|v_x'|} = \frac{12{,}99}{37{,}5} = 0{,}3464 \Rightarrow \theta = 19.1^\circ$$

**Cuestión 2: La gráfica representa la energía potencial de una partícula de masa m = 2 kg que se mueve a lo largo del eje x.**

**a) ¿Qué tipo de movimiento realiza la partícula? (0,2 puntos)**

**b) Si su energía potencial máxima es de 144 Julios, ¿que velocidad tendrá la partícula en x = 5 m.? (0,3 puntos)**

**c) Con la misma energía potencial, y sabiendo que para t = 0, x = 5 m, encuentra la ecuación del movimiento x(t) (0,5 puntos)**




**Solución:**

**a)** Como el potencial es parabólico, el movimiento será un movimiento vibratorio armónico simple (MAS) centrado en una posición $x_0 = 5$ m.

**b)** En x = 5m, la energía potencial vale 0, por lo que toda la energía será cinética, es decir, los 144 Julios serán de energía cinética:

$$(1/2)mv^2 = 144 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = (2\ 144/2)^{1/2} = 12\ m/s}$$

**c)** La ecuación general de un MAS es:

$(x - x_0) = A \cos(\omega t + \varphi)$, por lo que tenemos que encontrar los valores de A, ω y φ.

Al ser un MAS, la fuerza que lo genera es del tipo $F = -k\,(x-x_0)$, y tiene asociada una energía potencial que sigue la ecuación: $E_p = (1/2)k\,(x-x_0)^2$. Para determinar la constante k utilizamos los datos de la gráfica: sabemos que en x = 0, $E_p = 100$, por lo que $100 = (1/2)k\,(0 - 5)^2$, de donde despejamos k:

$$k = 200/25 = 8\ J/m^2\ (N/m).$$

Una vez conocida k, podemos determinar la amplitud y la frecuencia angular. Si la $E_p$ máxima es 144 J:

$$E_{pmax} = (1/2)\,k\,A^2 \quad \Rightarrow \quad A = (2E_{pmax} / k)^{1/2} \; = \; 6\ m$$

La frecuencia angular es $\omega = (k / m)^{1/2} = (8 / 2)^{1/2} = 2$ rad/s

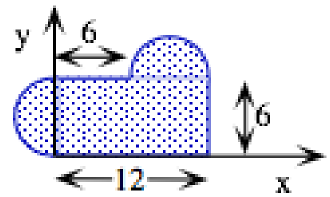
Finalmente, sabemos que para t = 0, x = 5m, por lo que aplicando la ecuación general en esas condiciones:

$$(5-5) = 6\cos(2\,0 + \varphi) \Rightarrow 0 = 6\cos(\varphi) \Rightarrow \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/2 \text{ o } 3\pi/2$$

por lo que la ecuación del movimiento será:

$$\boxed{x = 5 + 6\cos(2t + \pi/2) \text{ o bien } x = 5 + 6\cos(2t + 3\pi/2)}$$

**Cuestión 3: Determina el centro de masas de la placa homogénea de la figura.**

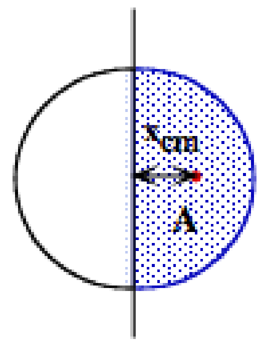



**Solución:**

La placa se supone la suma de tres placas, una rectangular y dos semicirculares.
Por simetría, el centro de masas de la placa rectangular está en el centro.

El centro de masas de la placa semicircular podemos determinarlo por el teorema de Pappus Guldin, que para un cuerpo de revolución dice que:

$$V = 2\pi x_{cm}\, A$$



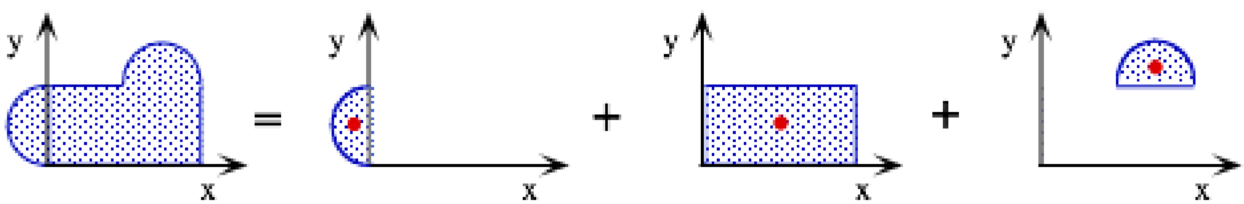

Con A = área de la placa $\Rightarrow$ $A = (1/2)\,\pi r^2$

y V = volumen de la esfera que genera $\Rightarrow$ $V = (4/3)\,\pi r^3$

Introduciendo estos valore en la ecuación: $(4/3)\,\pi r^3 = 2\pi x_{cm}\,(1/2)\,\pi r^2 \Rightarrow$

$$x_{cm} = (4r/3\pi) = (4/\pi)$$

Ahora descomponemos la placa en la suma de tres placas, y como son homogéneas, en lugar de utilizar masas, utilizamos áreas:




$A_1 = (1/2)\,\pi 3^2 = 4.5\,\pi$
$x_{cm1} = -4/\pi$
$y_{cm1} = 3$

$A_2 = 12 * 6 = 72$
$x_{cm2} = 6$
$y_{cm2} = 3$

$A_3 = (1/2)\,\pi 3^2 = 4.5\,\pi$
$x_{cm3} = 6 + 3 = 9$
$y_{cm3} = 6 + 4/\pi$

$$\boxed{x_{cm}} = \frac{\sum A_i\, x_{cmi}}{\sum A_i} = \frac{4.5\pi\left(-\frac{4}{\pi}\right) + 72 \cdot 6 + 4.5\pi \cdot 9}{4.5\pi + 72 + 4.5\pi} = \frac{541.23}{100.27} = \boxed{5.40}$$

$$\boxed{y_{cm}} = \frac{\sum A_i\, y_{cmi}}{\sum A_i} = \frac{4.5\pi \cdot 3 + 72 \cdot 3 + 4.5\pi\left(6 + \frac{4}{\pi}\right)}{4.5\pi + 72 + 4.5\pi} = \frac{361.23}{100.27} = \boxed{3.60}$$

Todas las unidades se encuentran medidas en el sistema internacional (áreas en $m^2$ y componentes de la posición en m).

**Cuestión 4: Asumiendo que los átomos de un gas ideal ocupan un pequeño volumen cúbico, estimad la distancia típica entre dos átomos de un gas ideal en condiciones de 1 atm de presión y 0 grados centígrados.**

**Solución:**

Sabemos que en las condiciones dadas un mol de átomos de un gas ideal ocupa 22,4 litros. Por lo tanto, podemos calcular el volumen que ocupa cada átomo.

$$\frac{22{,}4 \text{ litros}}{1 \text{ mol}} = \frac{22{,}4 \text{ litros}}{6{,}023\times 10^{23} \text{ átomos}} = \frac{22{,}4 \text{ dm}^3}{6{,}023\times 10^{23} \text{ átomos}} \times \left(\frac{10^9 \text{ Å}}{1 \text{ dm}}\right)^3$$
$$= 3.72\times 10^4 \,\frac{\text{Å}^3}{\text{átomo}}.$$

Si asumimos que el átomo ocupa un volumen cúbico, cuyo lado es $a$, entonces el volumen del cubo ocupado por cada átomo es $a^3$. El orden de magnitud del lado puede por lo tanto estimarse fácilmente como

$$a^3 = 3{,}72\times 10^4 \text{ Å}^3 \quad \Longrightarrow \quad a = 33{,}38 \text{ Å}.$$