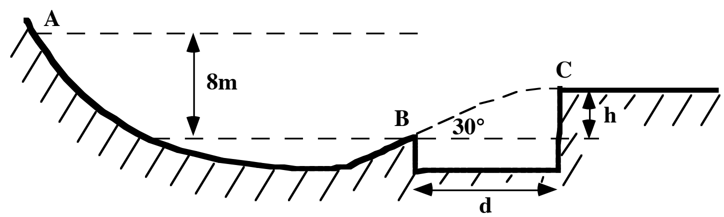
Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Enero de 2016
Problemas (Dos puntos por problema).



Problema 1: Una persona sentada en un trineo plano se propone descender por una pendiente cubierta de hielo a partir del punto A, salir despedida en el punto B y aterrizar con velocidad horizontal en el borde C. El ángulo de lanzamiento en B es de 30°. Despreciando la fricción y la resistencia del aire, determinar:

- **(a) la velocidad del trineo en el punto B (0,4 puntos).**
- **(b) Las dimensiones h y d que sitúan el punto C (0,4 puntos).**
- **(c) La velocidad del trineo en el momento de aterrizar en C (0,3 puntos).**
- **(d) Si en lugar del trineo es una bola (momento de inercia $I = \frac{2}{5}mr^2$) que baja rodando sin deslizar, encontrar la velocidad con la que llega al punto B (0,6 puntos).**
- **(e) Razonar según el resultado si la bola llegará al punto C (0,3 puntos).**

Solución:

a) Como la pendiente está cubierta de hielo no actúa ninguna fuerza de rozamiento durante todo el descenso de A a B. Tomando como origen de alturas en B y aplicando la conservación de la energía tenemos que la energía gravitatoria inicial en A (sale del reposo) se transforma en energía cinética en B:

$$mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh_A} = 12{,}52 \text{ m/s}.$$

(b) Al salir de B inicia un movimiento parabólico. Si ponemos a cero el cronómetro cuando sale de B y en esta posición ponemos el origen de coordenadas, las ecuaciones del movimiento serán:

$$x(t) = v_B \cos\theta \, t \qquad v_x(t) = v_B \cos\theta,$$
$$y(t) = v_B \sin\theta \, t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v_y(t) = v_B \sin\theta - gt.$$

Cuando llega a C la velocidad horizontal se anula con lo que si llamamos t_C al tiempo en que se llega a dicha posición

$$v_y\left(t_C\right) = v_B \sin\theta - g t_C = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_C = \frac{v_B \sin\theta}{g}.$$

En ese instante, los desplazamientos horizontal y vertical serán

$$d = x\left(t_C\right) = v_B \cos\theta \, t_C = 4\sqrt{3}\ \text{m} = 6{,}93\ \text{m},$$

$$\text{h=y}\left(t_C\right) = v_B \sin\theta \, t_C - \frac{1}{2} g t_C^2 = 2\ \text{m}.$$

(c) La velocidad del trineo al llegar a *C* solo tendrá componente horizontal, y esta tomará el valor

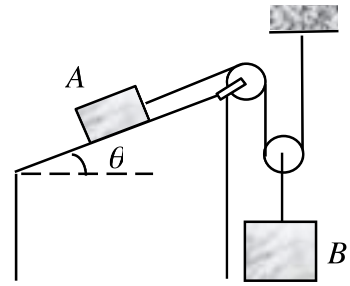
$$v_C = v_x\left(t_C\right) = v_B \cos\theta = 10{,}84\ \text{m/s}.$$

(d) Para que baje rodando necesitaríamos que en la pendiente hubiese rozamiento (otro tipo de superficie en vez de hielo) pero aún así podríamos aplicar conservación de la energía como se hizo en el apartado (a) ya que la fuerza de rozamiento que actúa es estática y no realiza trabajo. En este caso tenemos que la energía gravitatoria inicial en *A* (sale del reposo) se transforma en energía cinética en *B* que será ahora de dos tipos, de traslación y de rotación:

$$mgh_A = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} I \omega_B^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} m r^2\right)\left(\frac{v_B}{r}\right)^2 = \frac{7}{10} m v_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{\frac{10}{7} g h_A} = 10{,}58\ \text{m/s}.$$

(e) Como la velocidad de salida de *B* es ahora más pequeña, la bola no llegará al punto *C*.

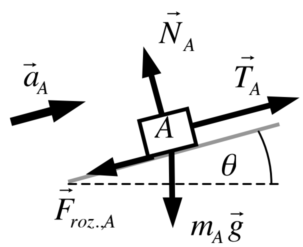
Problema 2: Los dos bloques de la figura parten del reposo. El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo A y el plano inclinado es μ = 0.25. Si se desprecia el peso de las poleas y de las cuerdas así como el rozamiento entre ambas, calcular la aceleración de cada bloque y las tensiones de las cuerdas.
Datos: M_A = 100 kg, M_B = 200 kg, θ = 30°.

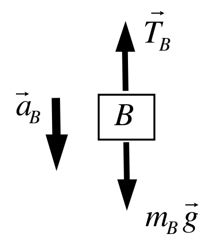


Solución:

Cada bloque va a realizar un movimiento rectilíneo. En general no tenemos por qué conocer con certeza hacia donde se produce el movimiento. Como regla general, debemos tomar un sentido positivo de movimiento para cada uno de ellos (como cuando uno tomaba un sistema de referencia para los movimientos unidimensionales). Al final el signo del resultado nos informará del sentido de movimiento. Vamos a tomar en nuestro caso el sentido positivo de movimiento ascendente para *A* y descendente para *B*.

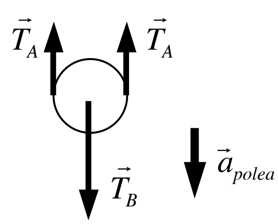
Dibujando el diagrama de fuerzas para los dos cuerpos (considerando que el movimiento real se produce hacia la derecha para poder dibujar las fuerzas de rozamiento):





Si suponemos que la cuerda que engancha *A* con el techo es ideal (sin masa) y que la polea es también ideal (sin masa) la tensión es la misma en todos los puntos de la cuerda. Aplicando la segunda ley de Newton a la polea móvil, podemos ver que la tensión que tira de *B* es el doble que la tensión que tira de *A*:

$$T_B - 2T_A = m_{polea}a_{polea} = 0$$



Planteando la segunda ley de Newton para cada cuerpo y teniendo en cuenta que el rozamiento sobre *A* es dinámico $\left(F_{roz.} = \mu N_A\right)$:

$$\vec{F}_{roz.A} + \vec{T} + \vec{N}_A + m_A\vec{g} = m_A\vec{a}_A$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} N_A = m_A g\cos\theta \\ T - F_{roz.A} - m_A g\,\mathrm{sen}\,\theta = m_A a_A \end{array} \right\} \Rightarrow T - \mu m_A g\cos\theta - m_A g\,\mathrm{sen}\,\theta = m_A a_A \quad (1)$$

$$m_B\vec{g} + 2\vec{T} = m_B\vec{a}_B \quad \Rightarrow \quad m_B g - 2T = m_B a_B \quad (2)$$

Tenemos 2 ecuaciones y tres incógnitas: T, a_A, a_B. Necesitamos una tercera ecuación para resolver el sistema. Esta ecuación se obtiene teniendo en cuenta que A está unido al techo por una cuerda de longitud fija, lo cual impone una relación entre la aceleración de los dos cuerpos. Cuando el bloque A se desplaza una cierta distancia en el sentido positivo escogido para su movimiento unidimensional, en nuestro caso ascendiendo por el plano, el bloque B se desplaza una distancia mitad, también en el sentido positivo de su movimiento, en nuestro caso descendente. Si los desplazamientos de B son siempre la mitad de los desplazamientos de A, derivando dos veces obtenemos que la relación entre aceleraciones es similar:

$$a_B = \frac{a_A}{2} \quad (3)$$

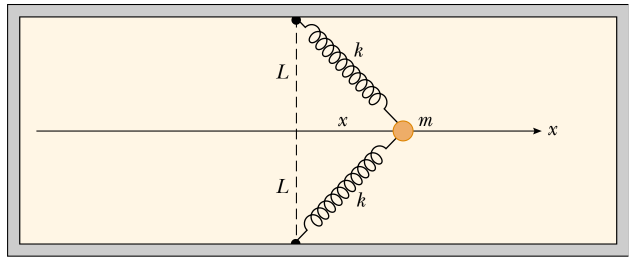
Una vez encontrada la última ecuación podemos resolver el sistema:

$$a_A = \left[\frac{2m_B - 4m_A\left(\mathrm{sen}\theta + \mu_{din.}\cos\theta\right)}{4m_A + m_B}\right] g = \boxed{1.852\,\mathrm{m/s^2}}$$

$$a_B = \left[\frac{m_B - 2m_A\left(\mathrm{sen}\,\theta + \mu_{din.}\cos\theta\right)}{4m_A + m_B}\right] g = \boxed{0.926\,\mathrm{m/s^2}}$$

$$T = \left[\,2 + \mathrm{sen}\,\theta + \mu\cos\theta\,\right]\left(\frac{m_A m_B}{4m_A + m_B}\right) g = \boxed{887.3\,\mathrm{N}}$$

Problema 3: Una partícula de masa 1.18 kg se encuentra entre dos muelles idénticos sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Los muelles tienen una constante de recuperación k y ninguno de ellos está deformado inicialmente.



Top View

(a) Si se desplaza la partícula una distancia x a lo largo de una dirección perpendicular a la configuración inicial de los muelles, como se muestra en la figura, calcular la energía potencial del sistema (1 punto).

(b) Si la partícula es arrastrada una distancia de 0.500 m hacia la derecha y luego se suelta partiendo del reposo, calcular el módulo de su velocidad cuando alcanza el punto de equilibrio $x = 0\ \mathrm{m}$. Asumir que $L = 1{,}20\ \mathrm{m}$ y $k = 40\ \mathrm{N/m}$. (1 punto).

(Problema extraído del Serway-Jewett, Sexta Edición, Capítulo 8).

Solución:

(a) Lo primero que tenemos que hacer es calcular cuánto se ha estirado el muelle. En la situación inicial, la longitud de cada uno de los muelles es L.

Después de haber desplazado la partícula una distancia x hacia la derecha, la longitud del muelle viene dada por

$$L' = \sqrt{L^2 + x^2}.$$

Por lo tanto, el muelle se ha estirado una distancia

$$\Delta L = L' - L = \sqrt{L^2 + x^2} - L.$$

La energía potencial elástica almacenada en cada uno de los muelles viene dada por

$$\begin{aligned}
U_{\text{pe}}^{\text{muelle}} &= \frac{1}{2}k\left(\Delta L\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{L^2 + x^2} - L\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}k\left(L^2 + x^2 + L^2 - 2L\sqrt{L^2 + x^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}k\left(2L^2 + x^2 - 2L\sqrt{L^2 + x^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}kx^2 + kL\left(L - \sqrt{L^2 + x^2}\right).
\end{aligned}$$

Como tenemos dos muelles tenemos que multiplicar por 2 la energía potencial elástica anterior

$$U_{\rm pe}^{\rm tot} = 2U_{\rm pe}^{\rm muelle} = kx^2 + 2kL\left(L - \sqrt{L^2 + x^2}\right).$$

(b) Como no hay rozamiento, se conserva la energía meánica del sistema. Tomaremos la superficie de la mesa como el cero de energías potenciales gravitatorias. Entonces, cuando la partícula se encuentra desplazada $x = 0.5\ \mathrm{m}$ hacia la derecha y parte del reposo, solo tiene energía potencial elástica. Cuando pasa por la posición de equilibrio, solo tiene energía cinética. A partir de esto se puede deducir que

$$E_{\rm mec}^{\rm ini} = kx^2 + 2kL\left(L - \sqrt{L^2 + x^2}\right) = 0{,}4\ \mathrm{J}.$$

$$E_{\rm mec}^{\rm fin} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_{\rm mec}^{\rm ini} = E_{\rm mec}^{\rm fin} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{2}{m}E_{\rm mec}^{\rm ini}} = 0{,}823\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$