Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Enero de 2016
Cuestiones (Un punto por cuestión).

Cuestión 1: Una partícula inicialmente localizada en el origen tiene una aceleración $\vec{a} = 3\,\vec{j}$ m/s^2 y una velocidad inicial $\vec{v}_0 = 5\,\vec{i}$ m/s.

(a) Hallar la velocidad y la posición en cualquier instante t (0,25 puntos).

(b) Determinar la velocidad y la posición para $t = 2$ s (0,25 puntos).

(c) Calcular los módulos de las aceleraciones tangencial y normal en ese instante ($t = 2$ s) (0,5 puntos).

Solución:

(a) Como la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, entonces

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad d\vec{v} = \vec{a}\,dt \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v} = \int \vec{a}\,dt = \int 3\vec{j}\,dt = 3t\,\vec{j} + \vec{C}_1.$$

La constante de integración se puede determinar a partir de las condiciones iniciales. Como para $t = 0$ la velocidad es $\vec{v}_0 = 5\,\vec{i}$ m/s entonces, sustituyendo en la ecuación anterior,

$$\vec{v}(t=0) = \vec{C}_1 = 5\vec{i} \text{ m/s.}$$

Por lo tanto, la expresión completa para la velocidad es

$$\vec{v}(t) = \left(5\vec{i} + 3t\,\vec{j}\right) \text{m/s.}$$

La velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo. Por lo tanto

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad d\vec{r} = \vec{v}\,dt \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r} = \int \vec{v}\,dt = \int \left(5\vec{i} + 3t\,\vec{j}\right)dt = 5t\,\vec{i} + \frac{3}{2}t^2\vec{j} + \vec{C}_2.$$

De nuevo la constante de integración se determina a partir de las condiciones iniciales. En el instante inicial, la partícula está en el origen de coordenadas, por lo que

$$\vec{r}(t=0) = \vec{C}_2 = 0.$$

Finalmente, la expresión completa para la posición como función del tiempo es

$$\vec{r}(t) = \left(5t\,\vec{i} + \frac{3}{2}t^2\,\vec{j}\right)\,\text{m}.$$

(b) Particularizamos las expresiones anteriores para $t = 2$ s

$$\vec{r}(t=2) = \left(10\,\vec{i} + 6\,\vec{j}\right)\,\text{m},$$
$$\vec{v}(t=2) = \left(5\,\vec{i} + 6\,\vec{j}\right)\,\text{m/s}.$$

(c) Por definición, el módulo de la aceleración tangencial viene dado por

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\left(25+9t^2\right)^{1/2}\right] = \frac{1}{2}(18t)\left(25+9t^2\right)^{-1/2} = \frac{9t}{\sqrt{25+9t^2}},$$

con lo que, para $t = 2$ s,

$$a_t(t=2) = \frac{18}{\sqrt{61}} = 2.30\ \text{m/s}^2.$$

Para conocer el módulo de la aceleración normal, utilizamos la propiedad

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad \Rightarrow \quad a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{3^2 - 2.3^2} = 1.93\ \text{m/s}^2.$$

Cuestión 2: Un obrero empuja hacia arriba un bloque de peso P, con una velocidad v constante por una calle inclinada que forma un ángulo $\theta = 30^\circ$ con la horizontal. Si la fuerza de rozamiento es un 10 % del valor del peso del bloque, determinar la potencia desarrolla por el obrero para subir deslizando sin que éste vuelque.
(Cuestión propuesta en el examen de Julio de 2015 en el Grado de Ingeniería Química de la Universidad Politécnica de Madrid).

Solución:

Podemos calcular la potencia como el producto escalar de la fuerza por la velocidad. Como la velocidad solo tiene una componente en la dirección paralela al plano, tenemos que calcular la componente de la fuerza que ejerce el obrero en esa misma dirección,

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_{\text{ob}} \cdot v. \qquad (1)$$

Para conocer la componente de la fuerza en la dirección paralela al plano inclinado, proyectamos todas las fuerzas que actúan sobre el bloque en esa dirección y aplicamos la segunda ley de Newton,

$$\sum F_{//} = ma_{//} = 0,$$

La última igualdad se debe a que sabemos que la velocidad es constante y, por lo tanto, la aceleración es nula. Las fuerzas que actúan sobre el bloque son la fuerza ejercida por el obrero (F_{ob}, apunta hacia arriba en el plano inclinado), su peso (P, la componente paralela al plano apunta hacia abajo) y el rozamiento (f_{roz}, que si el objeto desliza hacia arriba, la fuerza de rozamiento apunta hacia abajo), por lo que

$$F_{\text{ob}} - P\sin\theta - f_{\text{roz}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_{\text{ob}} = P\sin\theta + f_{\text{roz}} = \frac{P}{2} + \frac{P}{10} = \frac{3}{5}P.$$

Sustituyendo en (1),

$$P = F_{\text{ob}} \cdot v = \frac{3}{5}Pv.$$

Cuestión 3: Dos partículas de igual masa m se mueven en el plano $\{O,x,y\}$ con diferentes direcciones y con el mismo módulo de la velocidad v. Chocan y siguen moviéndose unidas (choque perfectamente inelástico) en la dirección del eje Ox y sentido positivo con velocidad $\vec{v} = \frac{v}{2}\vec{i}$. Determinar el ángulo que formaban sus direcciones con el eje Ox antes del choque.

(Cuestión propuesta en el examen de Julio de 2014 en el Grado de Ingeniería Química de la Universidad Politécnica de Madrid).

Solución:

Una de las partículas forma un ángulo φ_1 con la horizontal, mientras que la otra forma un ángulo φ_2. Al no haber fuerzas externas, el momento total del sistema se conserva. Por lo tanto,

$$\begin{cases} \sum P_x = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad mv\cos\varphi_1 + mv\cos\varphi_2 = 2m\dfrac{v}{2} \\ \sum P_y = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad mv\sin\varphi_1 + mv\sin\varphi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 = 1 \\ \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 = 0 \end{cases}$$

De la segunda de estas ecuaciones deducimos que

$$\sin\varphi_1 = -\sin\varphi_2 = \sin(-\varphi_2) \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = -\varphi_2.$$

Sustituyendo esta expresión en la primera

$$\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi_1 + \cos(-\varphi_1) = 2\cos\varphi_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi_1 = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\varphi_1 = 60^\circ,$$
$$\varphi_2 = -60^\circ.$$

Cuestión 4: Una lata de spray que contiene un gas propelente a dos veces la presión atmosférica (202 kPa) y con un volumen de 150,00 cm^3 se encuentra a 22 °C. En ese momento, se arroja la lata a un fuego. Cuando la temperatura del gas dentro de la lata alcanza los 195 °C, cuánto vale la presión dentro de la lata? Se asume que el cambio de volumen de la lata puede despreciarse.
(Cuestión extraída del Serway, Sexta edición, capítulo 19).

Solución: Asumimos que el gas obedece la ley de los gases ideales, entonces

$$\frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f},$$

donde el subíndice i hace referencia a los valores a la Temperatura inicial y el subíndice f a los correspondientes valores a la Temperatura final.

Como se supone que la variación en el volumen del gas es despreciable, entonces $V_i = V_f$, y

$$\frac{P_i}{T_i} = \frac{P_f}{T_f}.$$

Despejando para la presión final

$$P_f = \frac{T_f}{T_i} P_i = \left(\frac{468\ \text{K}}{295\ \text{K}}\right)(202\ \text{kPa}) = 320\ \text{kPa}.$$

Evidentemente, cuanto mayor es la temperatura, mayor es la presión ejercida por el gas encerrado. Si la presión se incrementa lo suficiente, la lata puede explotar. Debido a esta posibilidad, nunca se deben tirar las latas de spray al fuego.