Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Enero de 2015
Problemas (Dos puntos por problema).

Problema 1: La posición de una partícula móvil en el plano Oxy viene dada por :

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 \qquad y(t) = \frac{1}{2}\left(t^2 + 2t\right)$$

- **(a) Determinar la ecuación de la trayectoria de forma explícita $y = f(x)$ (0,25 puntos).**
- **(b) Determinar las expresiones del vector velocidad $\vec{v}(t)$, del vector aceleración $\vec{a}(t)$, así como los módulos de ambas $|\vec{v}(t)|,|\vec{a}(t)|$ (0,5 puntos).**
- **(c) Determinar las expresiones de los vectores: vector unitario tangente a la trayectoria $\vec{\tau}$, <u>vector</u> aceleración tangencial, $\vec{a}_\tau(t)$, <u>vector</u> aceleración normal $\vec{a}_n(t)$, y determinar el radio de curvatura ρ. Expresar los vectores en función de los vectores unitarios $\vec{i},\vec{j}$ (0,75 puntos).**
- **(d) Determinar el instante t^* en el cual el vector posición y el vector aceleración son perpendiculares (0,5 puntos).**

(Problema extraído del examen de Enero de 2014 del grado de Ingeniería Química de la Universidad Politécnica de Madrid).

Solución:

(a) Como $x(t) = \frac{1}{2}t^2$, entonces $t = \sqrt{2x}$. Sustituyendo en la expresión para y ,

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{2x}\right)^2 + 2\sqrt{2x}\right) = \frac{1}{2}\left(2x + 2\sqrt{2x}\right) = x + \sqrt{2x}.$$

Reordenando y elevando al cuadrado se obtiene

$$\left(y - x\right)^2 = 2x \qquad \Rightarrow \qquad x^2 - 2xy + y^2 - 2x = 0.$$

(b) El vector posición del punto es $\vec{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\vec{i} + \frac{1}{2}\left(t^2 + 2t\right)\vec{j}$.

El vector velocidad del punto es $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = t\vec{i} + \left(t+1\right)\vec{j}$.

El vector aceleración del punto es $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i} + \vec{j}$.

El módulo de la velocidad es

$$\left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{\left[t^2 + (t+1)^2\right]} = \sqrt{t^2 + t^2 + 2t + 1} = \sqrt{2t^2 + 2t + 1}.$$

El módulo de la aceleración es $\left|\vec{a}(t)\right| = \sqrt{2}$.

(c) El vector unitario tangente a la trayetoria es $\vec{\tau} = \dfrac{\vec{v}(t)}{\left|\vec{v}(t)\right|} = \dfrac{t\vec{i} + (t+1)\vec{j}}{\sqrt{2t^2 + 2t + 1}}$.

El vector aceleración tangencial es $\vec{a}_\tau(t) = \left|\vec{a}_\tau\right|\vec{\tau}$, donde

$$\left|\vec{a}_\tau\right| = \frac{d\left|\vec{v}\right|}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\left(2t^2 + 2t + 1\right)^{1/2}\right] = \frac{1}{2}(4t+2)\left(2t^2 + 2t + 1\right)^{-1/2} = \frac{2t+1}{\sqrt{2t^2 + 2t + 1}}.$$

Otra forma de hallar el módulo de la aceleración tangencial es proyectar la aceleración sobre el vector unitario en la dirección tangencial

$$\left|\vec{a}_\tau\right| = \vec{a}(t) \cdot \vec{\tau} = \frac{2t+1}{\sqrt{2t^2 + 2t + 1}}.$$

Por lo tanto, el vector aceleración tangencial vendrá dado finalmente por

$$\vec{a}_\tau(t) = \left|\vec{a}_\tau\right|\vec{\tau} = \frac{2t+1}{\sqrt{2t^2 + 2t + 1}}\left[\frac{t\vec{i} + (t+1)\vec{j}}{\sqrt{2t^2 + 2t + 1}}\right] = \frac{2t+1}{\left(2t^2 + 2t + 1\right)}\left[t\vec{i} + (t+1)\vec{j}\right] =$$

$$= \frac{1}{\left(2t^2 + 2t + 1\right)}\left[\left(2t^2 + t\right)\vec{i} + \left(2t^2 + 3t + 1\right)\vec{j}\right].$$

El vector aceleración normal vendrá dado por la diferencia entre la aceleración total y la aceleración tangencial, ya que $\vec{a}(t) = \vec{a}_\tau(t) + \vec{a}_n(t)$. Entonces,

$$\vec{a}_n(t) = \vec{a}(t) - \vec{a}_\tau(t) = \frac{1}{\left(2t^2 + 2t + 1\right)}\left[(t+1)\vec{i} - t\vec{j}\right].$$

El módulo de la aceleración normal viene dado por,

$$\left|\vec{a}_n(t)\right| = \frac{1}{\left(2t^2 + 2t + 1\right)}\sqrt{(t+1)^2 + t^2} = \frac{1}{\left(2t^2 + 2t + 1\right)}\sqrt{2t^2 + 2t + 1} = \frac{1}{\sqrt{2t^2 + 2t + 1}}.$$

De la relación entre el módulo de la aceleración normal y el radio de curvatura, sacamos este último,

$$\left|\vec{a}_n(t)\right| = \frac{\left|\vec{v}(t)\right|^2}{\rho} \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \frac{\left|\vec{v}(t)\right|^2}{\left|\vec{a}_n(t)\right|} = \sqrt{2t^2+2t+1}\left(2t^2+2t+1\right) = \left(2t^2+2t+1\right)^{3/2}.$$

(d) La condición de perpendicularidad es $\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t) = 0$.

$$\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t) = \left[\frac{1}{2}t^2\vec{i} + \frac{1}{2}\left(t^2+2t\right)\vec{j}\right]\cdot\left[t\vec{i} + \left(t+1\right)\vec{j}\right] = \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}\left(t^3+3t^2+2t\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2t^3+3t^2+2t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t\left(2t^2+3t+2\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} t = 0 \\ 2t^2+3t+2 = 0 \end{cases}$$

La ecuación de segundo grado da soluciones complejas. Por tanto el vector posición y el vector aceleración serán perpendiculares en $t^* = 0$, es decir, en la posición inicial.

Problema 2: Un trineo de 20 kg se desliza por una colina desde una altura de 20 m. El trineo inicia su movimiento a partir del reposo y tiene una velocidad de 16 m/s cuando llega al pie de la colina.

(a) Calcular la energía perdida por fricción (0,5 puntos).

(b) Si la pendiente de la colina es de 30°, calcular el coeficiente de rozamiento entre el trineo y el suelo (0,5 puntos).

(c) Calcular la potencia media desarrollada por la fuerza de rozamiento (0,5 puntos).

(d) Calcular la potencia instantánea desarrollada por la fuerza de rozamiento cuando la velocidad es de 16 m/s (0,25 puntos).

(e) Una vez que llega al pie de la colina, ¿cuántos metros recorre antes de detenerse? (suponer que el coeficiente de rozamiento es el mismo) (0,25 puntos).

Solución:

(a) Consideremos como configuración inicial aquella en la que el trineo está en lo más alto de la colina. La energía mecánica del sistema vendrá dada por la energía potencial gravitatoria del trineo (recordemos que parte del reposo). Tomando como origen de energías potenciales el suelo, entonces

$$E_{\mathrm{mec}}^{\mathrm{ini}} = mgh.$$

Tomamos como configuración final aquella en la que el trineo ha llegado al pie de la colina. En este caso, solo hay energía cinética

$$E_{\mathrm{mec}}^{\mathrm{fin}} = \frac{1}{2}mv^2.$$

Por el teorema de conservación de la energía, la diferencia en la energía mecánica tiene que ser igual al trabajo desarrollado por las fuerzas no conservativas (en este caso, el rozamiento).

$$\Delta E_{\mathrm{mec}} = E_{\mathrm{mec}}^{\mathrm{fin}} - E_{\mathrm{mec}}^{\mathrm{ini}} = W_{\mathrm{roz}} \quad \Rightarrow \quad W_{\mathrm{roz}} = \frac{1}{2}mv^2 - mgh = -1364\ J.$$

(b) Por definición de trabajo,

$$W_{\mathrm{roz}} = -F_{roz}d = -\left(\mu mg\cos\alpha\right)\left(\frac{h}{\sin\alpha}\right),$$

donde hemos tenido en cuenta que la fuerza de rozamiento es igual al coeficiente de rozamiento por el módulo de la normal, d es la distancia recorrida en el plano inclinado, y fuerza de rozamiento y desplazamiento forman un ángulo de 180°. Si despejamos el coeficiente de rozamiento y sustituimos los valores del problema, llegamos a la conclusión de que

$$\mu = -\frac{W_{\text{roz}} \tan\alpha}{mgh} = 0,2007.$$

(c) La potencia media es el trabajo dividido por el tiempo. El trabajo ya lo conocemos, por lo que solo nos queda por calcular el tiempo que tarda en descender el trineo. Tomamos como eje x la dirección paralela del plano inclinado. Como se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado a lo largo de esta dirección (prescindimos del símbolo de vector, puesto que todo está dirigido a lo largo de la dirección x)

$$v_f = v_i + at \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_f - v_i}{a}.$$

Para calcular la aceleración, calculamos la segunda ley de Newton a lo largo de la dirección del movimiento,

$$\sum F = ma \quad \Rightarrow \quad mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma \quad \Rightarrow \quad a = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right).$$

Sustituyendo en la ecuación del tiempo, y reemplazando los datos del problema, resulta que $t = 5\text{ s}$, por lo que la potencia media vale

$$P_{\text{m}} = \frac{W_{\text{roz}}}{t} = \frac{1364\ J}{5\text{ s}} = 272,8\,W.$$

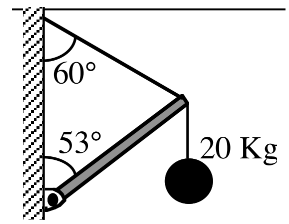
(d) La potencia instantánea es el producto de la fuerza por la velocidad,

$$P_{\text{i}} = F_{\text{roz}} v = \mu mg\cos\alpha\ v = 546,6\,W.$$

(e) Cuando se detiene (no hay energía cinética ni energía potencial al pie de la colina), toda la energía cinética que llevaba se ha perdido por el rozamiento,

$$0 - \frac{1}{2}mv^2 = -F_{\text{roz}} d_{\text{plano}} = -\mu mg d_{\text{plano}} \quad \Rightarrow \quad d_{\text{plano}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\mu mg} = 65,01\text{ m}.$$

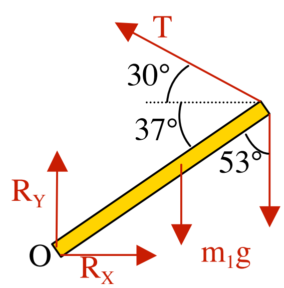
Problema 3: En una viga uniforme de 4 m de longitud y 10 kg cuelga una masa de 20 kg tal como se ve en la figura.



- **(a) Dibujar un diagrama de cuerpo libre para la viga (0,5 puntos).**
- **(b) Determinar la tensión en el alambre que una la viga con la pared (0,5 puntos).**
- **(c) Determinar las componentes de la fuerza de reacción en el eje (0,5 puntos).**
- **(d) Si la tensión máxima que puede soportar el alambre que una la viga con la pared es de 300 N, ¿hasta qué masa podemos colgar en el extremo de la viga en lugar de la de 20 kg sin que se rompa el alambre? (0,5 puntos).**

Solución:

(a) Las fuerzas que actúan sobre la viga de longitud L son



(recordad que la suma de los ángulos internos de un triángulo son 180°).

(b) Aplicando que la suma de momentos con respecto del punto O se anula en el equilibrio,

$$-m_1 g \frac{L}{2}\cos 37^\circ - m_2 g L \cos 37^\circ + TL\sin\left(180^\circ - 67^\circ\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{g\cos 37^\circ\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)}{\sin\left(180^\circ - 67^\circ\right)} = 212{,}78\text{ N}.$$

En esta expresión, hemos utilizado que el peso de la viga (m_1) se supone aplicado en el centro de masas y que, como ésta es homogénea, el centro de masas se sitúa en el centro de la misma. Si escogemos el eje x horizontal (sentido positivo hacia la derecha) y el eje y vertical (sentido positivo hacia arriba), entonces las coordenadas del centro de masas de la viga son $\left(\frac{L}{2}\cos 37^\circ, \frac{L}{2}\sin 37^\circ\right)$.

Por otra parte, la masa de 20 kg (m_2) está aplicada sobre la posición $\left(L\cos 37^\circ, L\sin 37^\circ\right)$.

Por último, para la tensión hemos aplicado que el módulo del momento de la fuerza es igual al módulo de la distancia por el módulo de la fuerza por el seno del ángulo que forman. El signo viene de aplicar la regla de la mano derecha.

(c) En el equilibrio, la suma de todas las fuerzas se anula,

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x - T\cos 30^{\circ} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x = T\cos 30^{\circ} = 184{,}27\text{N}.$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_y + T\sin 30^{\circ} - m_1 g - m_2 g = 0 \quad \Rightarrow \quad R_y = \left(m_1 + m_2\right) g - T\sin 30^{\circ} = 187{,}91\text{N}.$$

(d) De nuevo aplicamos $\sum M = 0$ respecto de O, pero ahora suponiendo que la tensión es de 300 N.

$$-m_1 g \frac{L}{2}\cos 37^{\circ} - m_2 g L\cos 37^{\circ} + TL\sin\left(180^{\circ} - 67^{\circ}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{T\sin\left(180^{\circ} - 67^{\circ}\right) - \frac{m_1}{2} g\cos 37^{\circ}}{g\cos\left(37^{\circ}\right)} = 30{,}25\text{ kg}.$$